# 1. Rovnice, nerovnice a soustavy

**1.1. Lineární rovnice.** Rovnice $f(x) = g(x)$ o jedné neznámé $x \in \mathbf{R}$, kde $f, g$ jsou reálné funkce, se nazývá lineární rovnice, jestliže ekvivalentními úpravami dostaneme tvar

$$\boxed{ax + b = 0, \quad \text{kde } a, b \in \mathbf{R},\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}}$$

*Poznámka:* Ekvivalentní úprava je taková úprava, při které získáme rovnici se stejným oborem řešení. Pokud provádíme neekvivalentní úpravy, je nutné se zkouškou přesvědčit, zda získané řešení je také řešením původní rovnice. Při řešení rovnic se používají tyto ekvivalentní úpravy:

- K oběma stranám rovnice lze přičíst tentýž výraz.
- Obě strany rovnice lze násobit tímtéž nenulovým výrazem.

**Pozor!** Umocňování a odmocňování nejsou ekvivalentní úpravy!

Řešíme-li lineární rovnici

$$ax + b = 0, \quad \text{kde } a, b \in \mathbf{R},$$

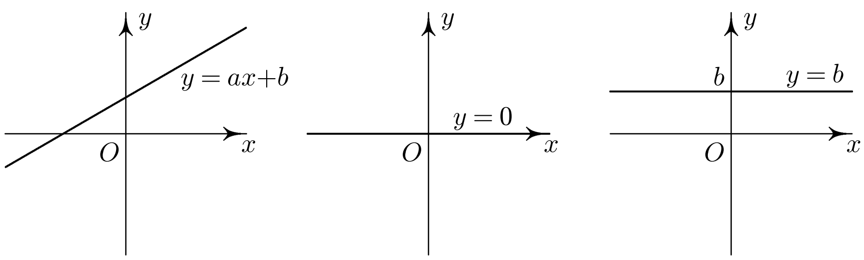
nastane právě jedna z možností:

a) $a \neq 0$, rovnice má jedno řešení $x = -\dfrac{b}{a}$;

b) $a = 0,\ b = 0$, řešením rovnice jsou všechna $x \in \mathbf{R}$;

c) $a = 0,\ b \neq 0$, rovnice nemá řešení.

Řešení lineární rovnice lze znázornit graficky. Počet kořenů rovnice $ax + b = 0$ je roven počtu průsečíků přímky $y = ax + b$ s osou $x$ (jeden, nekonečně mnoho, žádný – viz obr. 1.1 a, b, c).




Obr. 1.1 a　　Obr. 1.1 b　　Obr. 1.1 c

**1.2. Lineární rovnice o jedné neznámé $x$ s parametrem $p$** je rovnice, ve které se kromě neznámé $x$ vyskytuje proměnná $p$ (parametr). Řešení rovnice pak závisí na hodnotě parametru $p$. Jelikož pro lineární rovnici můžeme dostat tři rozdílné případy řešení, provádíme diskusi řešitelnosti vzhledem k parametru $p$.

**1.3. Nerovnice.** Nerovnicí nazýváme úlohu nalézt všechna $x \in \mathbf{R}$, pro která platí

$$f(x) > g(x), \quad \text{resp.} \quad f(x) \geq g(x), \ \text{kde } f \text{ a } g \text{ jsou reálné funkce.}$$

Při řešení nerovnic používáme ekvivalentních úprav, podobně jako při řešení rovnic, tj. :

- K oběma stranám nerovnice lze přičíst tentýž výraz.
- Obě strany nerovnice lze násobit **kladným** výrazem.
- Násobíme-li nerovnici záporným výrazem, znamení nerovnice se obrátí, tj. je-li $k < 0$, potom

$$f(x) > g(x), \text{ resp. } f(x) \geq g(x) \Longleftrightarrow kf(x) < kg(x), \text{ resp. } kf(x) \leq kg(x).$$

**1.4. Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou** řešíme tak, že nejdříve použijeme definice absolutní hodnoty k odstranění absolutní hodnoty a dále postupujeme již známým způsobem. Je

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \in (0, \infty), \text{ resp. } \langle 0, \infty) \\ -a & \text{pro } a \in (-\infty, 0\rangle, \text{ resp. } (-\infty, 0). \end{cases}$$

Nejdříve musíme určit nulové body všech výrazů v absolutních hodnotách. Ty nám množinu $\mathbf{R}$ rozdělí na intervaly, ve kterých určíme, zda jsou výrazy v absolutních hodnotách kladné či záporné a absolutní hodnoty odstraníme podle definice. Pro přehlednost použijeme znázornění na číselné ose. Dále pak řešíme úlohu na jednotlivých intervalech.

**1.5. Soustavy lineárních rovnic.** Soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých má tvar

$$\boxed{\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}}$$

kde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

**Metody řešení.**

1. **Metoda dosazovací.** Z jedné rovnice vyjádříme jednu neznámou pomocí druhé neznámé a dosadíme do zbývající rovnice, kterou pak vyřešíme. Zpětným dosazením dostaneme první neznámou.
2. **Metoda sčítací.** Dané rovnice vynásobíme vhodnými nenulovými čísly tak, aby se při sečtení (resp. odečtení) rovnic vyrušila jedna neznámá. Tím dostaneme rovnici pro druhou neznámou. Tu vypočteme, dosadíme do jedné z daných rovnic a vypočteme první neznámou. První neznámou ovšem můžeme vypočítat též tak, že vyměníme role neznámých.
3. **Metoda srovnávací.** Z obou rovnic vyjádříme tutéž neznámou v závislosti na druhé neznámé a získané výrazy porovnáme. Dostaneme lineární rovnici pro jednu neznámou a tu vyřešíme. Dosazením do libovolné z rovnic vypočteme druhou neznámou.

Při řešení soustavy lineárních rovnic mohou nastat tři případy:

- Soustava má jediné řešení.
- Soustava má nekonečně mnoho řešení.
- Soustava nemá řešení.

*Poznámka.* Graficky řešit soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých znamená najít průsečík dvou přímek v rovině.

**1.6. Soustavy lineárních rovnic o více neznámých** se definují a řeší obdobným způsobem jako soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

*Poznámka.* Pro $n = 3$ graficky řešit soustavu znamená nalézt společné body tří rovin.

**1.7. Soustavy nerovnic o jedné neznámé** řešíme tak, že vyřešíme každou zvlášť a najdeme průnik množin jejich řešení.

**1.8. Kvadratická rovnice.** Rovnice $f(x) = g(x)$ o jedné neznámé $x \in \mathbf{C}$, kde $f$ a $g$ jsou funkce, se nazývá kvadratická rovnice, jestliže ekvivalentními úpravami dostaneme tvar

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{kde } a,\, b,\, c \in \mathbf{R},\ a \neq 0,\ x \in \mathbf{C}}$$

**1.9. Řešení kvadratické rovnice.** Kvadratická rovnice má řešení

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Výraz $b^2 - 4ac$ se nazývá **diskriminant** kvadratické rovnice a označujeme jej písmenem $D$. Při řešení nastává jeden ze tří případů:

- Je-li $D > 0$, rovnice má dva reálné různé kořeny.
- Je-li $D < 0$, rovnice má dva kořeny imaginární (komplexně sdružená čísla).
- Je-li $D = 0$, rovnice má jeden reálný dvojnásobný kořen.

Je zřejmé, že reálné kořeny kvadratické rovnice můžeme znázornit též graficky; jsou to průsečíky paraboly $y = ax^2 + bx + c$ s přímkou $y = 0$, tj. s osou $x$.
V případě komplexních kořenů parabola osu $x$ neprotíná.

**1.10.** Je-li v kvadratické rovnici koeficient $a = 1$, je její tvar $x^2 + bx + c = 0$, respektive s jiným označením $x^2 + px + q = 0$. Rovnice tohoto tvaru se nazývá **normovaná kvadratická rovnice** a má řešení

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

**1.11.** Rovnice **ryze kvadratická** má tvar $ax^2 + c = 0$, kde $a, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$, a její řešení je

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\,.$$

Je-li výraz $\dfrac{c}{a} < 0$, jsou řešení rovnice čísla reálná, je-li výraz $\dfrac{c}{a} > 0$, jsou řešení rovnice čísla ryze imaginární komplexně sdružená, a je-li $c = 0$, je nula dvojnásobným kořenem.

**1.12.** Kvadratická rovnice **bez absolutního členu** má tvar $ax^2 + bx = 0$, kde $a \neq 0,\ b \neq 0$. Řešíme ji rozkladem na součin $x(ax + b) = 0$, odkud

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = -\frac{b}{a}\,.$$

Řešením jsou tedy vždy dvě reálná čísla, z nichž jedno je nula.

**1.13. Vztahy mezi kořeny a koeficienty** kvadratické rovnice. Normovaná kvadratická rovnice má kořeny $x_1, x_2$; lze ji tedy upravit na tvar

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0, \qquad \text{tj.} \qquad x^2 + x(-x_1 - x_2) + x_1x_2 = 0.$$

Srovnáním se zápisem normované kvadratické rovnice $x^2 + px + q = 0$ je zřejmé, že platí vztahy

$$x_1 + x_2 = -p, \text{ a } x_1x_2 = q.$$

Výrazy $x - x_1, x - x_2$ se nazývají **kořenové činitele**.

Pro obecnou rovnici analogicky platí

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0, \quad \text{kde} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \text{ a } x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Kvadratickou rovnici tedy také můžeme řešit rozkladem kvadratického trojčlenu v součin kořenových činitelů (vhodné pro reálné kořeny).

**1.14. Kvadratická nerovnice.** Řešením kvadratické nerovnice nazýváme úlohu nalézt všechna $x \in \mathbf{R}$, pro která platí jedna z následujících nerovnic:

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0, \quad ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0,$$

kde $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

**1.15. Postup při řešení kvadratické nerovnice.** Řešení je závislé na hodnotě diskriminantu $D$:

- Je-li $D > 0$, upravíme kvadratický trojčlen $ax^2+bx+c$ podle odst. 1.13 na součin $a(x-x_1)(x-x_2)$ a využijeme vlastností součinu tří činitelů.
- Je-li $D < 0$, má výraz $ax^2 + bx + c$ pro všechna $x \in \mathbf{R}$ stejné znaménko. Výraz je kladný pro $a > 0$ a záporný pro $a < 0$. Nerovnice buď řešení nemá, nebo jí vyhovují všechna reálná čísla.
- Je-li $D = 0$, tj. existuje-li jeden dvojnásobný reálný kořen $x_0 = x_1 = x_2 = x_{1,2}$ kvadratické rovnice, upravíme kvadratický trojčlen na součin $a(x - x_0)^2$ a snadno řešíme takto upravenou nerovnici.

**1.16. Iracionální rovnice** je taková rovnice, v níž je neznámá pod odmocninou.

Vyskytuje-li se v rovnici jen jedna odmocnina s neznámou, osamostatníme ji a pak rovnici umocníme. Tím odmocninu odstraníme.

Jsou-li v rovnici dvě odmocniny s neznámou, resp. více odmocnin, osamostatníme zpravidla jednu z nich a opět rovnici umocníme, resp. tento postup opakujeme. Tím je úloha převedena na předchozí případ.

Umocňování rovnice není ekvivalentní úprava, proto musíme ověřit, zda řešení vyhovuje předpokladům, nebo provést zkoušku dosazením.

**1.17. Exponenciální a logaritmické rovnice.** Při řešení vycházíme z vlastností exponenciální a logaritmické funkce, a to především z toho, že jsou obě funkce prosté, tj. že platí:

$$a^x = a^y \iff x = y \quad (x, y \in \mathbf{R}, a > 0 \wedge a \neq 1)$$
$$\log_a x = \log_a y \iff x = y \quad (x, y > 0, a > 0 \wedge a \neq 1)$$

a z definice logaritmu

$$a^x = y \iff x = \log_a y \quad (x \in \mathbf{R}, y > 0, a > 0 \wedge a \neq 1).$$

**1.18. Goniometrické rovnice.** Základní goniometrická rovnice má tvar

$$f(x) = a,$$

kde $f$ je goniometrická funkce, $a \in \mathbf{R}$ je konstanta a $x \in \mathbf{R}$ je neznámá. Ostatní goniometrické rovnice se pomocí goniometrických vzorců a ekvivalentních úprav snažíme převést na základní tvar.

**1.19. Řešené příklady.**

1. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici
$$\frac{5}{3x-1}+\frac{2}{3x+1}+\frac{4}{9x^2-1}=0\,.$$
**Řešení:** Aby zlomky měly smysl, musí platit $x \neq \pm\frac{1}{3}$. Řešení rovnice budeme hledat v množině $D=\mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}$.
Po vynásobení společným jmenovatelem dostaneme
$$5(3x+1)+2(3x-1)+4=0, \quad x=-\frac{1}{3}\,.$$
Protože $-\frac{1}{3}\notin D$, rovnice nemá řešení.

2. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici
$$\frac{x+2}{x}-\frac{(x+1)(x-2)}{x(x+2)}=\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x}\,.$$
**Řešení:** Předpokládáme $x\neq 0$, $x\neq -2$, takže $D=\mathbf{R}\setminus\{0,-2\}$. Odstraníme zlomky, upravíme a dostaneme
$$\begin{aligned} x^2+4x+4-x^2+x+2&=2x+3x+6\\ 5x+6&=5x+6\\ 0&=0\,.\end{aligned}$$
Rovnice je splněna pro všechna $x\in D$.

3. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici
$$\frac{x}{3a+x}-\frac{x}{x-3a}=\frac{a^2}{9a^2-x^2}$$
s parametrem $a\in\mathbf{R}$.
**Řešení:** $D=\mathbf{R}\setminus\{-3a,3a\}$. Obě strany rovnice vynásobíme společným jmenovatelem a upravíme:
$$\begin{aligned} x(3a-x)+x(3a+x)&=a^2\\ 3ax-x^2+3ax+x^2&=a^2\\ 6ax&=a^2\end{aligned}$$
Provedeme diskusi vzhledem k parametru $a$:
   - Je-li $a=0$, potom $0\cdot x=0$ a dané rovnici vyhovuje každé $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ .
   - Je-li $a\neq 0$, je $x=\frac{a^2}{6a}$, tj. $x=\frac{a}{6}$.

4. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici $|3x-2|-|5+x|=2-|x|$.
**Řešení:** Nulové body výrazů $3x-2$, $5+x$, $x$ a jejich znaménka v příslušných intervalech znázorníme na číselné ose:

| | I | | II | | III | | IV |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x-2$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ |
| $5+x$ | $-$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $x$ | $-$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ |
| | I | $-5$ | II | $0$ | III | $\frac{2}{3}$ | IV |

Řešíme na čtyřech intervalech I, II, III a IV:

I. $x \in (-\infty, -5)$: $-3x + 2 + 5 + x = 2 - x$, $3x = 5$, $x = \dfrac{5}{3}$ ; $\dfrac{5}{3} \notin (-\infty, -5) \Longrightarrow x = \dfrac{5}{3}$ není řešením.

II. $x \in \langle -5, 0)$: $-3x + 2 - 5 - x = 2 + x$, $5x = -5$, $x = -1$ ; $-1 \in \langle -5, 0) \Longrightarrow x = -1$ je řešením.

III. $x \in \left\langle 0, \dfrac{2}{3} \right)$: $-3x + 2 - 5 - x = 2 - x$, $3x = 5$, $x = -\dfrac{5}{3}$ ; $-\dfrac{5}{3} \notin \left\langle 0, \dfrac{2}{3} \right) \Longrightarrow x = -\dfrac{5}{3}$ není řešením.

IV. $x \in \left\langle \dfrac{2}{3}, \infty \right)$: $3x - 2 - 5 - x = 2 - x$, $3x = 9$, $x = 3$ ; $3 \in \left\langle \dfrac{2}{3}, \infty \right) \Longrightarrow x = 3$ je řešením.

Rovnice má dvě řešení $x_1 = -1$ a $x_2 = 3$ .

5. Pro která reálná $x$ platí nerovnost $\dfrac{3}{x-1} < 1$ ?

**Řešení:** Předpokládáme, že $x \neq 1$ , a tedy $D = \mathbf{R} \setminus \{1\}$ . Nerovnici vyřešíme dvěma způsoby.

I. Chceme-li jako u rovnic vynásobit nerovnici výrazem $x - 1$ , víme podle odst. 1.3, že záleží na tom, zda je $x - 1 > 0$ (znamení nerovnice se nezmění), nebo $x - 1 < 0$ (znamení nerovnice se změní na opačné). Budeme tedy řešit nerovnici na dvou intervalech: $(-\infty, 1)$ a $(1, \infty)$ .

- Je-li $x \in (-\infty, 1)$ , dostáváme $3 > x - 1$ , $4 > x \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 4)$ . Řešením jsou čísla $x \in (-\infty, 4) \cap (-\infty, 1) = (-\infty, 1)$ .
- Je-li $x \in (1, \infty)$ , dostáváme $3 < x - 1$ , $4 < x \Longleftrightarrow x \in (4, \infty)$ . Řešením jsou čísla $x \in (1, \infty) \cap (4, \infty) = (4, \infty)$ .

Dané nerovnici tedy vyhovují všechna $x \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$ .

II. Nerovnici upravíme tak, aby na jedné straně byla nula, potom převedeme na společného jmenovatele a upravíme; postupně tedy dostaneme:

$$\frac{3}{x-1} - 1 < 0\,, \quad \frac{3 - x + 1}{x - 1} < 0\,, \quad \frac{4 - x}{x - 1} < 0\,.$$

Máme zjistit, pro která $x$ je zlomek záporný. Ve zlomku se nedá krátit. V čitateli i jmenovateli jsou lineární funkce, proto čitatel i jmenovatel při průchodu přes své nulové body mění znaménko. Využijeme-li této vlastnosti, můžeme jednoduše stanovit znaménko zlomku. Situaci si znázorníme na číselné ose:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $4-x$ | $+$ | | $+$ | | $-$ |
| $x-1$ | $-$ | | $+$ | | $+$ |
| | | $1$ | | $4$ | |
| $\dfrac{4-x}{x-1}$ | $-$ | | $+$ | | $-$ |

V našem případě jsou nulové body 1 a 4; na obrázku jsou vyznačeny symbolem $\circ$ , neboť pro $x = 1$ nemá výraz na levé straně nerovnice smysl a pro $x = 4$ není nerovnice splněna. Body 1 a 4 dělí číselnou osu na tři intervaly $(-\infty, 1)$ , $(1, 4)$ a $(4, \infty)$ . Určíme znaménko zlomku v každém z nich. Jak je vidět, znaménka se pravidelně střídají, tj. v sousedních intervalech jsou opačná. Stačí proto určit znaménko zlomku pouze v jediném bodě, např. v bodě $x = 0$ .

Protože $\dfrac{4-0}{0-1} < 0$ , zlomek je v intervalu $(-\infty, 1)$ záporný, v intervalu $(1, 4)$ kladný a v intervalu $(4, \infty)$ záporný.

Řešením nerovnice jsou tedy právě všechna čísla $x \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$ .

6. Řešte v $\mathbf{R}$ soustavu lineárních rovnic s parametry $a,\ b \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} ax - y &= -2 \\ x + y &= b\,. \end{aligned}$$

**Řešení:** Použijeme s výhodou sčítací metodu a dostaneme rovnici

$$x(1+a) = b - 2\,.$$

Provedeme diskusi řešení vzhledem k parametrům $a$, $b$:

- Je-li $a + 1 = 0$ a $b - 2 \neq 0$, pak poslední rovnice, a tedy ani daná soustava, nemá řešení.
- Je-li $a + 1 = 0$ a $b - 2 = 0$, potom daná soustava má tvar

  $$-x - y = -2, \quad x + y = 2\,.$$

  Rovnice jsou ekvivalentní a řešením dané soustavy jsou všechny uspořádané dvojice $(x, 2-x)$, kde $x \in \mathbf{R}$.
- Je-li $a+1 \neq 0$, $b$ libovolné, potom $x = \dfrac{b-2}{a+1}$, $y = \dfrac{ab+2}{a+1}$ a daná soustava má jediné řešení $\left(\dfrac{b-2}{a+1}, \dfrac{ab+2}{a+1}\right)$.

7. Řešte v $\mathbf{R}$ soustavu nerovnic

$$\begin{aligned} 3x + 2 \le 7x - 4 &< 5x + 3 \\ 4x - 8 \le 5x - 3 &< 6x + 2\,. \end{aligned}$$

**Řešení:** Postupně vyřešíme čtyři nerovnice:

$$\begin{array}{lll}
a)\ 3x+2 \le 7x-4 & b)\ 7x-4 < 5x+3 & c)\ 4x-8 \le 5x-3 \\
\quad 6 \le 4x & \quad 2x < 7 & \quad x \ge -5 \\
\quad x \ge \dfrac{3}{2} & \quad x < \dfrac{7}{2} & d)\ 5x-3 < 6x+2 \\
 & & \quad x > -5\,.
\end{array}$$

Řešením jsou všechna čísla $x \in \left\langle \dfrac{3}{2}, \infty \right) \cap \left(-\infty, \dfrac{7}{2}\right) \cap (-5, \infty) = \left\langle \dfrac{3}{2}, \dfrac{7}{2} \right)$.

8. Řešte v $\mathbf{R}$ nerovnici $\dfrac{|x-1|}{2-x} < 1$.

**Řešení:** Předpoklad je $x \neq 2$. Nulové body výrazů $x - 1$ a $2 - x$, tj. čísla 1 a 2, dělí číselnou osu na tři intervaly, na nichž budeme nerovnici postupně řešit. Řešení bude záviset též na znaménku výrazu $2 - x$, jímž budeme nerovnici násobit. Situaci si opět znázorníme na číselné ose:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | | $+$ | | $+$ |
| $2-x$ | $+$ | | $+$ | | $-$ |
| | I | 1 | II | 2 | III |

Řešíme postupně tři nerovnosti bez absolutních hodnot:

I. $x \in (-\infty, 1):\ -x+1 < 2-x,\ 1<2$ platí, každé $x \in (-\infty, 1)$ je řešením.

II. $x \in \langle 1, 2):\ x-1 < 2-x,\ x < \dfrac{3}{2}$; každé $x \in \langle 1, 2) \cap \left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right) = \left\langle 1, \dfrac{3}{2}\right)$ je řešením.

III. $x \in (2, \infty):\ x-1 > 2-x,\ x > \dfrac{3}{2}$; každé $x \in \left(\dfrac{3}{2}, \infty\right) \cap (2, \infty) = (2, \infty)$ je řešením.

Řešením nerovnice jsou právě všechna čísla $x \in \left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right) \cup (2, \infty)$.

9. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici $4x^2 - 9 = 0$.

**Řešení:**

$$4x^2 = 9, \quad x^2 = \frac{9}{4}, \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}\,.$$

10. Řešte v $\mathbf{C}$ rovnici $4x^2 + 9 = 0$.

**Řešení:**

$$4x^2 = -9, \quad x^2 = -\frac{9}{4}, \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{9}{4}} = \pm\, i\,\frac{3}{2}\,.$$

11. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici $3x^2 + 5x = 0$.

**Řešení:** Rozložíme v součin

$$x(3x+5) = 0, \quad \text{odtud} \quad x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{5}{3}\,.$$

12. Řešte $\mathbf{R}$ rovnici $10x^2 + 9x - 9 = 0$.

**Řešení:**

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 + 4\cdot 10\cdot 9}}{2\cdot 10} = \frac{-9\pm 21}{20}, \quad x_1 = \frac{3}{5},\ x_2 = -\frac{3}{2}\,.$$

13. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici $x^2 - 6x - 27 = 0$.

**Řešení:** a) Použitím vzorce pro řešení normované rovnice dostáváme

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9+27} = 3 \pm 6; \quad x_1 = 9,\ x_2 = -3.$$

b) Použitím vlastností kořenových činitelů normované rovnice dostáváme

$$x_1 + x_2 = 6, \quad x_1 \cdot x_2 = -27\,.$$

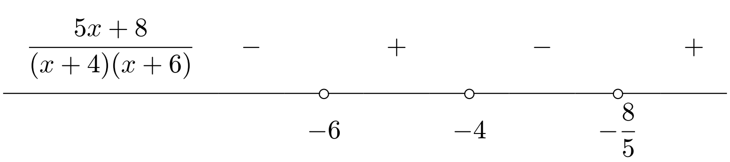
Této soustavě vyhovuje řešení $x_1 = 9$, $x_2 = -3$; jsou to kořeny dané kvadratické rovnice.

14. Řešte v $\mathbf{R}$ nerovnici $\dfrac{2-x}{4+x} > \dfrac{5-x}{x+6}$.

**Řešení:** Nerovnici budeme postupně upravovat, přičemž předpokládáme, že $x \neq -6$ a $x \neq -4$:

$$\frac{2-x}{4+x} - \frac{5-x}{x+6} > 0\,, \quad \frac{(2-x)(x+6)-(5-x)(4+x)}{(4+x)(x+6)} > 0\,, \quad \frac{5x+8}{(x+4)(x+6)} < 0\,.$$

Tuto nerovnici řešíme pomocí číselné osy (viz 1.19, příklad 5), na které vyznačíme nulové body jednotlivých dvojčlenů:



Do zlomku dosadíme za $x$ např. nulu:

$$\frac{5\cdot 0+8}{(0+4)(0+6)}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}>0\,.$$

Tudíž na intervalu $\left(-\frac{8}{5},\infty\right)$ je zlomek pro všechny hodnoty kladný, v sousedním intervalu záporný, atd.

Řešením nerovnice jsou čísla $x\in(-\infty,-6)\cup\left(-4,-\frac{8}{5}\right)$.

15. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-5}=1\,.$

    **Řešení:** Aniž bychom rovnici řešili, vidíme, že pro žádné $x\in\mathbf{R}$ není splněna, protože není pravdivá konjunkce $3-x\geq 0\wedge x-5\geq 0\,.$

16. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici $\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x-9}-\sqrt{7x+2}=0\,.$

    **Řešení:** Použijeme postupu v 1.16 a výpočet ověříme zkouškou. Osamostatníme jednu odmocninu

    $$\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x-9}=\sqrt{7x+2}\,,$$

    umocníme a upravíme:

    $$\begin{aligned} 2x+5+2\sqrt{5x-9}\cdot\sqrt{2x+5}+5x-9&=7x+2\\ \sqrt{10x^2+7x-45}&=3\,. \end{aligned}$$

    Po opětném umocnění dostaneme kvadratickou rovnici $10x^2+7x-54=0$, jejíž kořeny jsou $x_1=2,\ x_2=-\frac{27}{10}$. Provedeme zkoušku:

    $x_1=2:\ L=\sqrt{9}+\sqrt{1}-\sqrt{16}=0,\ P=0,\ L=P\Rightarrow x_1=2$ je řešením rovnice;
    $x_2=-\dfrac{27}{10}:\ L=\sqrt{-\dfrac{2}{5}}+\sqrt{-\dfrac{45}{2}}-\sqrt{-\dfrac{169}{10}}$ není v $\mathbf{R}$ definováno $\Rightarrow x_2=-\dfrac{27}{10}$ není řešením rovnice.
    Rovnice má jediné řešení $x=2$.

17. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici

    $$\frac{1}{3^{3x+1}}=243\,.$$

    **Řešení:** Rovnici můžeme přepsat do tvaru

    $$3^{-3x-1}=3^5\,.$$

    Odtud (viz odst. 1.17) ihned plyne: $-3x-1=5\,,\ x=-2\,.$

    Rovnice má tedy jediné řešení $x=-2\,.$

18. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici

    $$2^{3x-2}=5\,.$$

    **Řešení:** Zlogaritmováním a následující úpravou získané lineární rovnice postupně dostaneme:

    $$(3x-2)\log 2=\log 5\,,\quad 3x-2=\frac{\log 5}{\log 2}\,,\quad x=\frac{1}{3}\left(2+\frac{\log 5}{\log 2}\right)\,.$$

    Řešením rovnice je tedy číslo $x=\dfrac{1}{3}\left(2+\dfrac{\log 5}{\log 2}\right)$.

19. Řešte v **R** rovnici
$$\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = 2{,}5\,.$$

**Řešení:** Jednoduchými úpravami postupně dostaneme:
$$\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \frac{5}{2}\,, \quad e^x + e^{-x} = 5\,, \quad e^{2x} - 5e^x + 1 = 0\,.$$
Položíme v poslední rovnici $e^x = u$ a dostaneme:
$$u^2 - 5u + 1 = 0\,, \quad u_1 = \frac{5+\sqrt{21}}{2},\ u_2 = \frac{5-\sqrt{21}}{2}.$$
Protože $u_{1,2} > 0$, je:
$$e^{x_1} = \frac{5+\sqrt{21}}{2} \Rightarrow x_1 = \ln\frac{5+\sqrt{21}}{2}\,, \qquad e^{x_2} = \frac{5-\sqrt{21}}{2} \Rightarrow\ x_2 = \ln\frac{5-\sqrt{21}}{2}\,.$$
Rovnice má dvě řešení $x_1 = \ln\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$ a $x_2 = \ln\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$.

20. Řešte v **R** rovnici
$$\log(x+2) - \log(x-1) = 2 - \log 4\,.$$

**Řešení:** Vzhledem k definičnímu oboru logaritmu musí být $x + 2 > 0$ a $x - 1 > 0$, což je ekvivalentní jediné podmínce $x > 1$. Využijeme vlastností logaritmů a postupně dostaneme:
$$\log\frac{x+2}{x-1} = \log\frac{100}{4}\,, \quad \frac{x+2}{x-1} = 25\,, \quad x = \frac{27}{24}\,, \quad x = \frac{9}{8}\,.$$
Řešením rovnice je $x = \dfrac{9}{8}$.

21. Řešte v **R** rovnici
$$\frac{2\log x}{\log(5x-4)} = 1\,.$$

**Řešení:** Rovnici řešíme v oboru $x > 0,\ \ 5x - 4 > 0$ a $5x - 4 \neq 1,$ tj. za předpokladu $x \neq 1,$ a $x > \dfrac{4}{5}$. Postupnými úpravami postupně dostaneme:
$$\begin{aligned} 2\log x &= \log(5x-4) \\ \log x^2 &= \log(5x-4) \\ x^2 &= 5x - 4 \\ x^2 - 5x + 4 = 0\,,&\ x = 1 \vee x = 4\,. \end{aligned}$$
Vzhledem k podmínce $x \neq 1$ rovnici vyhovuje pouze $x = 4$.

22. Řešte v **R** rovnici
$$3\cdot 2^{\log x} + 8\cdot 2^{-\log x} = 5(1 + 10\log\sqrt[5]{100})\,.$$

**Řešení:** Vzhledem k definičnímu oboru logaritmu musí platit $x > 0$. Zavedeme substituci $2^{\log x} = z$ a postupně dostaneme
$$\begin{gathered} 3z + \frac{8}{z} = 5(1 + 10\cdot\frac{2}{5}) \\ 3z^2 - 25z + 8 = 0\,, \quad z_1 = 8\,,\ z_2 = \frac{1}{3}\,. \end{gathered}$$

Pro $x$ tedy dostáváme rovnice:

$$2^{\log x} = 8\,, \quad 2^{\log x} = 2^3\,, \quad \log x = 3\,, \quad x = 1000\,;$$
$$2^{\log x} = \frac{1}{3}\,, \quad \log x \cdot \log 2 = -\log 3\,, \quad \log x = -\frac{\log 3}{\log 2}\,.$$

Řešením rovnice jsou čísla $x = 1000$ a $x = 10^{-\log 3/\log 2}$.

23. Řešte goniometrické rovnice:

a) $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} = 3\,,$ b) $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0\,,$

c) $\sin x + \cos 2x = 1\,,$ d) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\,,$

e) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x\,.$

**Řešení:**

a) Rovnici řešíme za podmínky $1 - \sin x \neq 0$, tj. v oboru $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbf{Z}\right\}$. Postupně dostáváme:

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = 3\,, \quad 1 + \sin x = 3 - 3\sin x\,, \quad 4\sin x = 2\,, \quad \sin x = \frac{1}{2},$$
$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\,, \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}\,.$$

b) Použijeme vzorec (4.1)z odst. 4.6. Z rovnice vyloučíme $\sin x$ a dostaneme kvadratickou rovnici pro $\cos x$:

$$2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0\,, \quad 2 - 2\cos^2 x - 5\cos x + 1 = 0\,,$$
$$2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$$
$$\cos x = \begin{cases} \frac{1}{4}(-5 + \sqrt{25+24}) = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbf{Z} \\ \frac{1}{4}(-5 - \sqrt{25+24}) = -3\,,\ \text{což není možné.} \end{cases}$$

c) Použijeme vzorec (4.4) z odst. 4.6 pro kosinus dvojnásobného úhlu, potom z rovnice vyloučíme $\cos x$ a dostaneme kvadratickou rovnici pro $\sin x$:

$$\sin x + \cos 2x = 1\,, \quad \sin x + \cos^2 x - \sin^2 x = 1\,,$$
$$\sin x - 2\sin^2 x = 0$$
$$\sin x(1 - 2\sin x) = 0$$
$$\sin x(1 - 2\sin x) = 0 \Longrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = \frac{1}{2}$$
$$\sin x = 0 \Longrightarrow x = k\pi\,,\ k \in \mathbf{Z}\,;$$
$$\sin x = \frac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbf{Z} \\ x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\,,\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

d) Podle příkladu 5 z odst. 4.10 platí

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3+1}\sin(x + \varphi) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\,.$$

Daná rovnice je tedy ekvivalentní rovnici

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\,,$$

z níž plyne

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1\,,\quad x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\,,\quad x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\,,\ k\in\mathbf{Z}\,.$$

e) Použijeme vzorce (4.7) z odst. 4.6 pro $\sin 3x+\sin x$, $\cos 3x+\cos x$ a potom rovnici upravíme:

$$\begin{aligned}
\sin x+\sin 2x+\sin 3x&=\cos x+\cos 2x+\cos 3x\\
\sin 2x+2\sin 2x\cos x&=\cos 2x+2\cos 2x\cos x\\
\sin 2x(1+2\cos x)&=\cos 2x(1+2\cos x)\\
(1+2\cos x)(\sin 2x-\cos 2x)&=0\Longrightarrow\\
&\Longrightarrow \cos x=-\frac{1}{2}\vee(\operatorname{tg}2x=1\wedge\cos 2x\neq 0)\,,\\
\cos x=-\frac{1}{2}&\Longrightarrow x=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi\,,\ k\in\mathbf{Z},\\
\operatorname{tg}2x=1\Longrightarrow 2x&=\frac{\pi}{4}+k\pi\,,\ x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\,,\ k\in\mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

24. Řešte v $\mathbf{R}$ soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
2x-y+2z&=9\\
x-4y+3z&=5\\
3x-5y+z&=6\,.
\end{aligned}$$

**Řešení:** Při řešení použijeme kombinace metody dosazovací a sčítací. Z první rovnice vyjádříme $y=2x+2z-9$ a dosadíme do zbývajících dvou rovnic:

$$\begin{aligned}
x-4(2x+2z-9)+3z&=5\\
3x-5(2x+2z-9)+z&=6\,.
\end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme soustavu

$$\begin{aligned}
7x+5z&=31\\
7x+9z&=39\,.
\end{aligned}$$

Odtud odečtením

$$4z=8,\ z=2\,.$$

Po dosazení pak postupně dostaneme:

$$7x+5\cdot 2=31,\ x=3,\ y=2\cdot 3+2\cdot 2-9=1\,.$$

Řešením dané soustavy je trojice $x=3,\ y=1,\ z=2.$

### 1.20. Neřešené příklady.

Řešte v $\mathbf{R}$ rovnice:

1. $|2x+1|+|2x-1|=3$ $\left[\pm\frac{3}{4}\right]$
2. $|x-1|+|x-2|=1$ $[x\in\langle 1,2\rangle]$

3. $|1-x|+|x|=-1$ [Nemá řešení]

4. $x^2+2|x-1|=6$ $[1-\sqrt{5},2]$

5. $\dfrac{1}{|x-1|}=|x+1|$ $[0,\pm\sqrt{2}]$

6. $\dfrac{-2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}=0$ [Nemá řešení]

7. $0,25^{2-x}=\dfrac{256}{2^{x+3}}$ [3]

8. $3^{2x-1}+3^{2x-2}-3^{2x-4}=315$ [3]

9. $\dfrac{1}{5^x}+5^x=\dfrac{26}{5}$ $[1,-1]$

10. Vypočítejte $y$ z rovnice $x=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$ $\left[y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]$

11. Vypočítejte $y$ z rovnice $x=\dfrac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}$ $\left[y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\,; \quad |x|<1\right]$

12. $\log(x+13)-\log(x-3)=1-\log 2$ [7]

13. $\dfrac{\log(2x+3)}{\log(x+5)}=2$ [Nemá řešení]

14. $\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}=0$ $[e]$

15. $\dfrac{-\ln x+2}{x\ln^3 x}=0$ $[e^2]$

16. $1-\cos x=0$ $[2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}]$

17. $\operatorname{tg} x=1$ $[\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}]$

18. $\sin 2x=\cos x$ $\left[(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\,,\ \dfrac{\pi}{6}+2k\pi\,,\ \dfrac{5}{6}\pi+2k\pi\,,\ k\in\mathbf{Z}\right]$

19. $\sin 2x=\operatorname{tg} x,\ x\in\langle 0,2\pi)$ $\left[0\,,\ \dfrac{\pi}{4}\,,\ \pi\,,\ \dfrac{3}{4}\pi\,,\ \dfrac{5}{4}\pi\,,\ \dfrac{7}{4}\pi\right]$

Řešte v $\mathbf{R}$ nerovnice:

1. $|x-3|<\dfrac{1}{4}$ $\left[\left(\dfrac{11}{4};\dfrac{13}{4}\right)\right]$

2. $\dfrac{|2x-2|}{2-x}<1$ $\left[\left(0,\dfrac{4}{3}\right)\cup(2,\infty)\right]$

3. $|3x-1|<|x|<|3x+1|$ $\left[\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)\right]$

4. Kdy je výraz reálný ?

   a) $\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$ $[\langle 1, 2)]$

   b) $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+1} - 1}$ $[(-\infty, -1) \cup \langle 2; \infty)]$