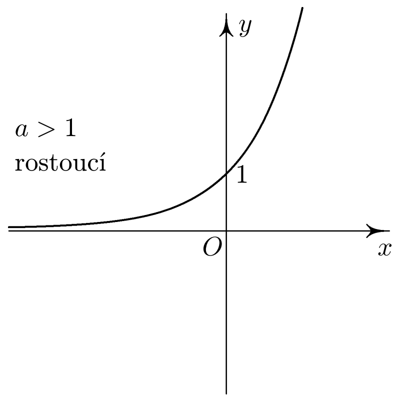
3. Exponenciální a logaritmická funkce

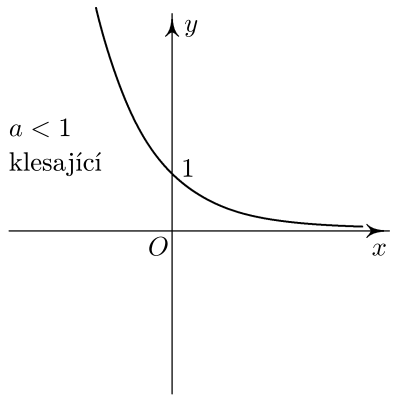
3.1. Exponenciální funkce. Exponenciální funkce je funkce daná předpisem:

$$\boxed{y = a^x, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbf{R}}$$

Grafem je exponenciální křivka, viz obr. $3.1\,a, b$.



Obr. 3.1 a



Obr. 3.1 b

Poznámka. Velký význam má funkce $y = e^x$, kde číslo

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281\ldots$$

je základ přirozených logaritmů.

Vlastnosti exponenciálních funkcí. Pro $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $x, y \in \mathbf{R}$ platí vztahy:

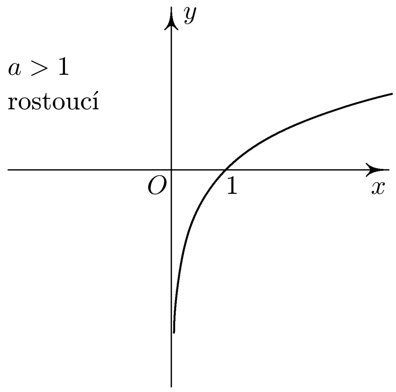
$$\boxed{\begin{array}{c} a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad (a^x)^y = a^{xy} \\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x} \\ a^x = a^y \Longleftrightarrow x = y, \quad a^x = b^x \text{ pro } x \neq 0 \Longleftrightarrow a = b \end{array}}$$

3.2. Logaritmická funkce. Každá exponenciální funkce a^x je prostá a jejím oborem hodnot je interval $\mathbf{R}^+ = (0, \infty)$. K funkci a^x existuje tedy funkce inverzní. Tuto funkci s definičním oborem $\mathbf{R}^+$ nazýváme **logaritmickou funkcí** o základu a a značíme $\log_a x$. Platí tedy:

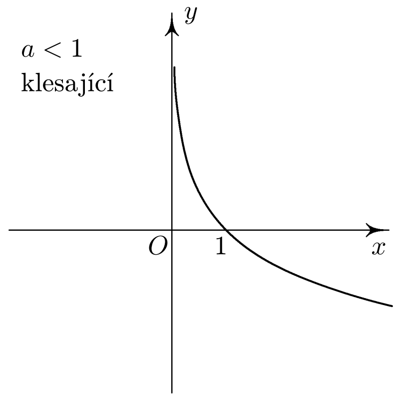
$$\boxed{y = \log_a x \Longleftrightarrow x = a^y, \quad \text{kde } a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbf{R}^+}$$

Grafem je logaritmická křivka (viz obr. 3.2 a,b).

Logaritmy o základu $a = 10$ se nazývají **dekadické** a značí se $\log x$. Logaritmy o základu $a = e$ se nazývají **přirozené** a značí se $\ln x$ nebo též $\lg x$.



Obr. 3.2 a



Obr. 3.2 b

Vlastnosti logaritmických funkcí. Pro libovolná čísla $a, r, s \in \mathbf{R}^+$, $a \neq 1$, a libovolná čísla $p, x \in \mathbf{R}$ platí vztahy:

• $\log_a 1 = 0$	• $\log_a rs = \log_a r + \log_a s$
• $\log_a a = 1$	• $\log_a \dfrac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$
• $\log_a a^x = x$	• $\log_a r^p = p \log_a r$
• $a^{\log_a r} = r$	• $\log_a r = \log_a s \Longleftrightarrow r = s$

Pro logaritmy s různými základy platí vzorec

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad a, b, x \in \mathbf{R}^+, \ a \neq 1, \ b \neq 1}$$

Ve speciálním případě $a = 10$, $b = e$ dostáváme vztah

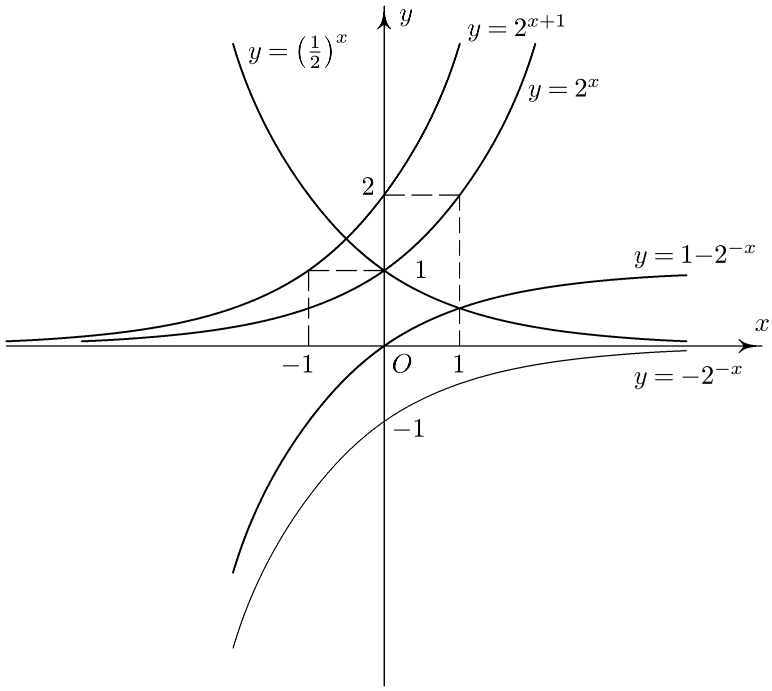
$$\boxed{\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \ln x \cdot \log e, \quad x \in \mathbf{R}^+}$$

3.3. Řešené příklady.

1. Nakreslete (do jednoho obrázku) grafy funkcí

$$\text{a)} \ y = 2^x, \quad \text{b)} \ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad \text{c)} \ y = 2^{x+1}, \quad \text{d)} \ y = 1 - 2^{-x}.$$

Řešení: Graf funkce $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ je souměrně sdružený s grafem funkce $y = 2^x$ podle osy y; graf funkce $y = 2^{x+1}$ dostaneme z grafu funkce $y = 2^x$ posunutím o 1 doleva ve směru osy x; a graf funkce $y = 1 - 2^{-x}$ dostaneme z grafu funkce $y = -2^{-x}$, který je souměrně sdružený s grafem funkce $y = 2^{-x}$ podle osy x, posunutím o 1 nahoru ve směru osy y. Grafy všech čtyř funkcí jsou na obr. 3.3.

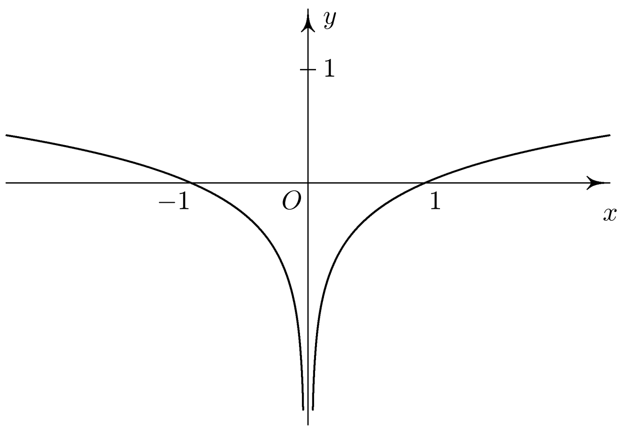


Obr. 3.3

2. Nakreslete grafy funkcí a) $y = \log|x|$, b) $y = |\log|x||$.

Řešení:

a) $y = \log|x|$: Funkce je sudá s $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, takže graf (viz obr. 3.4) je souměrný podle osy y a $y = \log x$ pro $x > 0$.

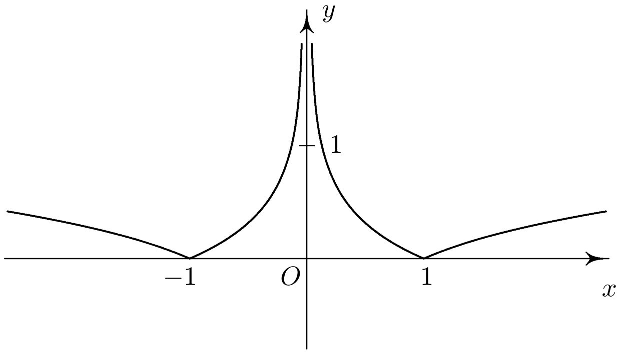


Obr. 3.4

b) $y = |\log|x||$: Funkce je opět sudá s $D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ a graf (viz obr. 3.5) je tedy opět souměrný podle osy y. Protože

$$y = \begin{cases} \log x & \text{pro } x \geq 1 \\ -\log x & \text{pro } 0 < x < 1, \end{cases}$$

graf snadno získáme z grafu funkce $y = \log x$.



Obr. 3.5

3.4. Neřešené příklady.

Určete definiční obory a nakreslete grafy funkcí, vždy do jednoho obrázku:

1. $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}$, $y = 2^{x+1}$ $[(-\infty, \infty)]$
2. $y = e^x$; $y = e^{x-1}$; $y = e^{x+1}$; $y = e^x + 1$ $[(-\infty, \infty)]$
3. $y = e^{-|x|}$; $y = e^{-|x+3|}$ $[(-\infty, \infty)]$
4. $y = \log_2 x$; $y = 2\log_2(x-1) - 3$; $y = |\log_2(x+2)|$ $[(0, \infty);\ (1, \infty);\ (-2, \infty)]$
5. $y = \ln x$; $y = \ln(x+2)$; $y = \ln(x-2)$ $[(0, \infty);\ (-2, \infty);\ (2, \infty)]$
6. $y = \ln|x|$; $y = |\ln x|$; $y = |\ln|x||$ $[(-\infty, 0) \cup (0, \infty)]$