

4. Goniometrie

Nejprve si připomeňme z geometrie pojem orientovaného úhlu a jeho velikosti.

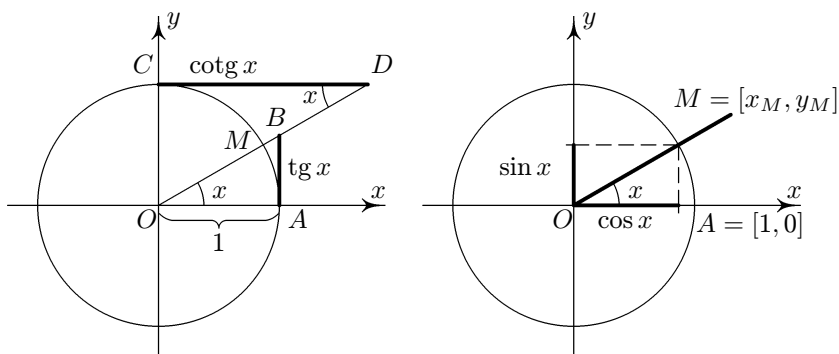
4.1. Orientovaný úhel a jeho velikost. Orientovaným úhlem v rovině rozumíme uspořádanou dvojici polopřímek se společným počátkem. První z těchto polopřímek nazýváme **počátečním ramenem orientovaného úhlu** a druhou nazýváme **koncovým ramenem orientovaného úhlu**. Společný počátek obou ramen se nazývá **vrchol orientovaného úhlu**. Orientovaný úhel s počátečním ramenem VA a koncovým ramenem VB označíme \widehat{AVB} ; podle definice je tedy $\widehat{AVB} \neq \widehat{BVA}$. **Nulový orientovaný úhel** je orientovaný úhel \widehat{AVB} , kde polopřímky VA, VB jsou identické.

Budiž dán orientovaný úhel \widehat{AVB} . Polopřímky VA, VB dělí rovinu na dva neorientované úhly. Označíme-li jejich velikosti α, β , platí $\alpha + \beta = 360^\circ$ (v míře stupňové), resp. $\alpha + \beta = 2\pi$ radiánů (v míře obloukové). Radián (značíme rad) je velikost středového úhlu, který přísluší oblouku kružnice, jehož délka je rovna poloměru kružnice. Platí $1 \text{ rad} \doteq 57^\circ 17' 45''$. **Velikostí orientovaného úhlu \widehat{AVB}** nazýváme každé reálné číslo tvaru $\alpha + 2k\pi$ (v míře obloukové), resp. každé reálné číslo tvaru $\alpha + k \cdot 360^\circ$ (v míře stupňové), kde $k \in \mathbf{Z}$ a

- $\alpha = 0$, resp. $\alpha = 0^\circ$, jsou-li polopřímky VA, VB identické,
- α je velikost neorientovaného úhlu, který vznikne otočením počátečního ramene VA do polohy koncového ramene VB v kladném smyslu (tj. proti směru pohybu hodinových ručiček), nejsou-li polopřímky VA, VB identické.

Je tedy $0 \leq \alpha < 2\pi$, resp. $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$; číslo α se nazývá **základní velikost orientovaného úhlu**.

4.2. Goniometrické funkce obecného úhlu. Zvolme v rovině kladně orientovanou kartézskou soustavu souřadnic s počátkem O , osami x, y a stejnou délkovou jednotkou na obou osách; předpoklad, že soustava je kladně orientovaná, znamená, že orientovaný úhel, jehož počátečním ramenem je kladná poloosa x a koncovým ramenem je kladná poloosa y , má základní velikost $\frac{\pi}{2}$ (v obloukové míře). Na kladné poloose x zvolme bod $A = [1, 0]$ a kolem počátku opišme kružnici o poloměru jedna, tzv. jednotkovou kružnici. Každému reálnému číslu x nyní můžeme přiřadit právě jeden orientovaný úhel, jehož počátečním ramenem je polopřímka OA ; je to tzv. **orientovaný úhel velikosti x v základní poloze**. Průsečík koncového ramene tohoto orientovaného úhlu s jednotkovou kružnicí označme $M = [x_M, y_M]$. Goniometrické funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens jsou nyní definovány takto (viz obr. 4.1):



Obr. 4.1

$\sin x = y_M, \quad x \in \mathbf{R}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y_M}{x_M}, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}$
$\cos x = x_M, \quad x \in \mathbf{R}; \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{x_M}{y_M}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$

Z definice je zřejmé, že **goniometrické funkce jsou periodické**: základní perioda T funkcí sinus a kosinus je rovna 2π a základní perioda funkcí tangens a kotangens je rovna π . To znamená, že platí:

$$\begin{aligned} \sin(x + 2k\pi) &= \sin x, & x \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}, \\ \cos(x + 2k\pi) &= \cos x, & x \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}, \\ \operatorname{tg}(x + k\pi) &= \operatorname{tg} x, & x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \\ \operatorname{cotg}(x + k\pi) &= \operatorname{cotg} x, & x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Funkce sinus, kosinus jsou kromě toho antiperiodické se základní antiperiodou π , tj. pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí vztahy:

$$\sin x = -\sin(x + \pi), \quad \cos x = -\cos(x + \pi)$$

Funkce sinus, tangens a kotangens jsou liché, zatímco funkce kosinus je sudá. To znamená, že platí

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x, & \operatorname{tg}(-x) &= -\operatorname{tg} x, & \operatorname{cotg}(-x) &= -\operatorname{cotg} x, & \cos(-x) &= \cos x, \\ & & & & & & & \text{kdykoliv má jedna strana rovnice smysl} \end{aligned}$$

Z definice goniometrických funkcí plynou ještě tyto jejich vlastnosti:

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\ \cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\ \operatorname{tg} x &= \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\ \operatorname{cotg} x &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \end{aligned}$$

4.3. Monotonie a znaménka goniometrických funkcí v jednotlivých kvadrantech.

	Kvadrant			
	I	II	III	IV
$\sin x$	roste +	klesá +	klesá -	roste -
$\cos x$	klesá +	klesá -	roste -	roste +
$\operatorname{tg} x$	roste +	roste -	roste +	roste -
$\operatorname{cotg} x$	klesá +	klesá -	klesá +	klesá -
	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3}{2}\pi)$	$(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$
	Interval			

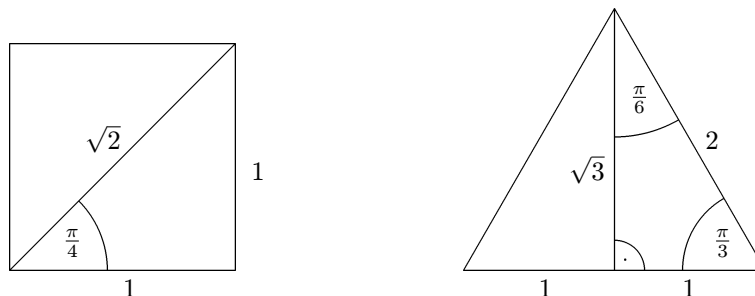
Goniometrické funkce jsou ve skutečnosti monotónní na větších intervalech. Pro každé celé číslo k totiž platí:

- Funkce sinus roste od -1 do $+1$ na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$ a klesá od $+1$ do -1 na intervalu $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle$.
- Funkce kosinus klesá od $+1$ do -1 na intervalu $\langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$ a roste od -1 do $+1$ na intervalu $\langle -\pi + 2k\pi, 2k\pi \rangle$.
- Funkce tangens roste od $-\infty$ do $+\infty$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.
- Funkce kotangens klesá od $+\infty$ do $-\infty$ na intervalu $(k\pi, \pi + k\pi)$.

4.4. Funkční hodnoty goniometrických funkcí pro některá $x \in \mathbf{R}$.

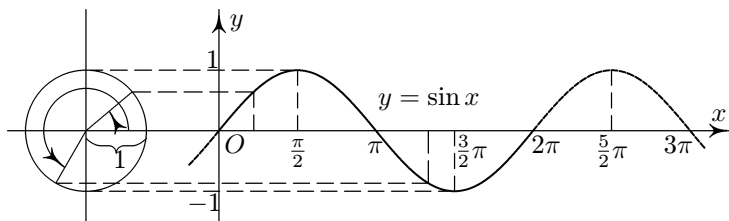
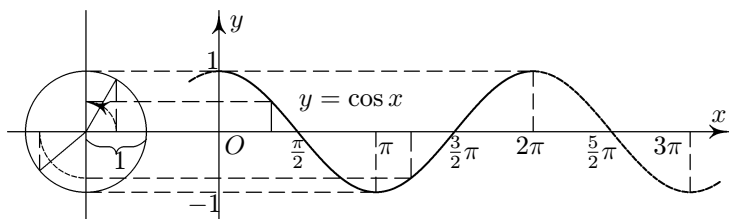
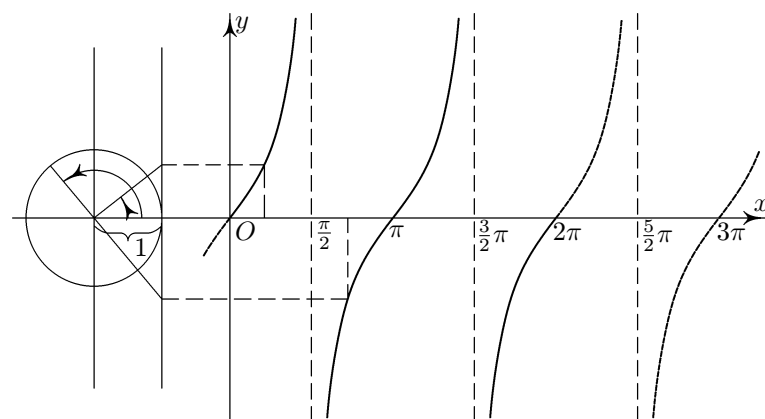
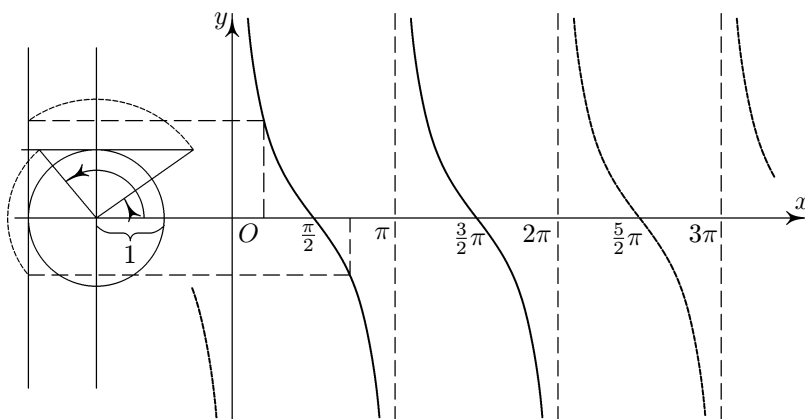
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*	0	*	0
$\operatorname{cotg} x$	*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	*	0	*

Znak „*“ v některých polích tabulky značí, že funkce uvedená v prvním poli řádku není pro hodnotu x uvedenou v prvním poli sloupce definována. Většina hodnot goniometrických funkcí v této tabulce je důsledkem vztahů mezi stranami a úhlopříčkou ve čtverci a vztahů mezi stranami a výškou v rovnostranném trojúhelníku (viz obr. 4.2).



Obr. 4.2

4.5. Grafy goniometrických funkcí.

Obr. 4.3: $y = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \langle -1, 1 \rangle$, $T = 2\pi$ Obr. 4.4: $y = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \langle -1, 1 \rangle$, $T = 2\pi$ Obr. 4.5: $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbf{Z} \right\}$, $y \in \mathbf{R}$, $T = \pi$ Obr. 4.6: $y = \operatorname{cotg} x$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$, $y \in \mathbf{R}$, $T = \pi$

4.6. Vztahy mezi goniometrickými funkcemi.

- Základní vztah

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1} \quad (4.1)$$

- Součtové vzorce

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \end{aligned}} \quad (4.2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \\ \operatorname{cotg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} y \pm \operatorname{cotg} x} \end{aligned}} \quad (4.2')$$

- Vzorce pro sinus a kosinus dvojnásobného a polovičního úhlu

$$\boxed{\begin{aligned} \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \left| \sin \frac{x}{2} \right| &= \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \\ \left| \cos \frac{x}{2} \right| &= \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \end{aligned}} \quad (4.3) - (4.6)$$

- Součty a rozdíly sinů a kosinů

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \end{aligned}} \quad (4.7)$$

Z těchto vzorců plynou vztahy

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x \sin y &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)] \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)] \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)] \end{aligned}} \quad (4.8)$$

4.7. Užití goniometrických funkcí v geometrii. Základem aplikací goniometrických funkcí v geometrii jsou jednak jejich definice, jednak následující dvě důležité věty platné pro každý trojúhelník se stranami a , b , c a úhly α , β , γ . Přitom, jak je obvyklé, úhel α je protilehlý straně a , úhel β je protilehlý straně b a úhel γ je protilehlý straně c .

- **Věta sinová**

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \quad (4.9)$$

- **Věta kosinová**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (4.10)$$

Přímo z definice sinu plyne, že obsah P obecného trojúhelníka je dán vzorcem

$$P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \quad (4.11)$$

4.8. Harmonické kmity. V technické praxi se setkáváme s harmonickými kmity (harmonickými veličinami), tj. s kmity (veličinami), jejichž matematickým vyjádřením je funkce tvaru

$$y = A \sin(\omega x + \varphi), \quad \text{kde } A, \varphi, \omega \in \mathbf{R} \text{ (konstanty), } x \in \mathbf{R} \text{ (proměnná).}$$

Konstanty A , φ , ω mají svoje názvy: A je tzv. **amplituda**, ω je tzv. **úhlový kmitočet** nebo též **kruhovú frekvence** a φ je tzv. **počáteční fáze** nebo **fázový úhel** nebo též **fázový posun**.

Harmonický kmit je periodická funkce se základní periodou $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Příkladem harmonické veličiny je okamžitá hodnota střídavého napětí nebo okamžitá hodnota střídavého proudu.

4.9. Sestrojení grafu funkce $y = A \sin(\omega x + \varphi)$.

- Graf funkce $y = A \sin x$, kde $A > 0$, získáme z grafu funkce $y = \sin x$ dilatací ve směru osy y s koeficientem A . To znamená, že všechny úsečky rovnoběžné s osou y A -násobně prodloužíme v případě $A > 1$ a $\frac{1}{A}$ -násobně zkrátíme v případě $A < 1$. Pro $A < 0$ dostaneme graf souměrný ke grafu funkce $y = -A \sin x$, kde $-A > 0$ podle osy x .
- Graf funkce $y = \sin \omega x$, kde $\omega > 0$, dostaneme z grafu funkce $y = \sin x$ dilatací ve směru osy x s koeficientem $\frac{1}{\omega}$. Je-li $\omega < 0$, pak $\sin \omega x = -\sin |\omega|x$. Graf funkce $y = \sin \omega x$, kde $\omega < 0$, je souměrný ke grafu funkce $y = \sin \omega x$, kde $\omega > 0$ podle osy x .
- Graf funkce $y = \sin(x + \varphi)$ dostaneme z grafu funkce $y = \sin x$ posunutím ve směru osy x , a to posunutím doleva, je-li $\varphi > 0$, a posunutím doprava, je-li $\varphi < 0$.

Máme-li sestavit graf funkce $y = A \sin(\omega x + \varphi)$, použijeme a), b) a c). Jejich pořadí je podrobeno jedné podmínce: b) vždy musí předcházet c). Podobně sestavíme grafy funkcí $y = A \cos(\omega x + \varphi)$, $y = A \operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$, $y = A \operatorname{cotg}(\omega x + \varphi)$.

4.10. Řešené příklady.

- Vypočítejte $\sin^2 \frac{5}{3}\pi + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cos \frac{5}{6}\pi + \operatorname{cotg} \frac{17}{4}\pi$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{5}{3}\pi + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cos \frac{5}{6}\pi + \operatorname{cotg} \frac{17}{4}\pi &= \sin^2 \left(\frac{2}{3}\pi + \pi \right) + \sqrt{3} \left(-\cos \frac{\pi}{6} \right) + \operatorname{cotg} \left(\frac{\pi}{4} + 4\pi \right) = \\ &= \sin^2 \frac{\pi}{3} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2. Zjednodušte $\cos(45^\circ + x) - \cos(45^\circ - x)$.

Řešení: Užitím jednoho ze vzorců (4.7) dostaneme

$$\cos(45^\circ + x) - \cos(45^\circ - x) = -2 \sin 45^\circ \sin x = -\sqrt{2} \sin x.$$

3. Dokažte vztahy:

$$\text{a) } \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right),$$

$$\text{b) } \cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

Řešení: V obou případech použijeme součtové vzorce (4.2):

a)

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &= \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \sin x = \\ &= \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \cos x + \sin x. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &= \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \cos x - \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \sin x = \\ &= \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \cos x - \sin x. \end{aligned}$$

4. Vyjádřete $\sin x$, $\cos x$, znáte-li $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Řešení: Ze vzorců (4.5) a (4.6) plyne $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$. Odtud vypočteme $\cos x$:

$$(1 + \cos x) \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x, \quad \cos x \left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 \right) = 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2},$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

K vyjádření $\sin x$ nyní použijeme základní vztah (4.1):

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= 1 - \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \right)^2 \\ &= \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2} - 1 + 2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2}}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)^2} = \frac{4 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)^2}, \\ \sin x &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

5. Vyjádřete $a \sin x + b \cos x$, kde x je proměnná, $a, b > 0$, ve tvaru $A \sin(x + \varphi)$, kde $A > 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Řešení: Předpokládejme, že je takové vyjádření možné, tj. že existují A a φ s požadovanými vlastnostmi tak, že pro všechna x platí rovnost

$$A \sin(x + \varphi) = a \sin x + b \cos x.$$

Levou stranu upravíme s pomocí součtového vzorce, viz (4.2), a dostaneme vztah

$$A \sin x \cos \varphi + A \cos x \sin \varphi = a \sin x + b \cos x.$$

Protože tento vztah podle předpokladu platí pro všechna $x \in \mathbf{R}$, platí speciálně pro $x = 0$ a pro $x = \frac{\pi}{2}$. Postupným dosazením těchto dvou hodnot proměnné x však dostaneme rovnice

$$A \sin \varphi = b, \quad A \cos \varphi = a,$$

z nichž plyne (protože $A, a, b > 0$):

$$A^2 = a^2 + b^2, \quad A = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

Jelikož náš postup je zřejmě možno obrátit, hledané vyjádření má tvar

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi).$$

6. Vyjádřete $\sin x \cos 5x$ ve tvaru součtu či rozdílu goniometrických funkcí.

Řešení: Z posledního ze vzorců (4.8) plyne

$$\sin x \cos 5x = \frac{1}{2} [\sin(x + 5x) + \sin(x - 5x)] = \frac{1}{2} [\sin 6x + \sin(-4x)] = \frac{1}{2} \sin(6x) - \frac{1}{2} \sin(4x).$$

7. Nakreslete graf funkce $f(x) = -\frac{1}{3} \cos\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$.

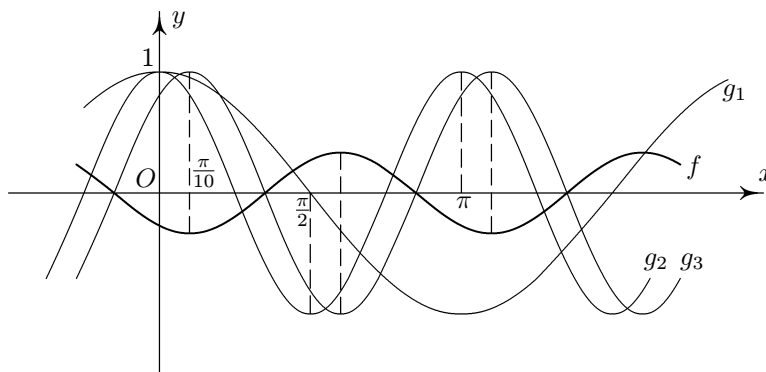
Řešení: Funkční vztah upravíme na ekvivalentní tvar

$$f(x) = -\frac{1}{3} \cos 2\left(x - \frac{\pi}{10}\right)$$

a postupně sestrojíme grafy funkcí (viz obr. 4.7)

$$g_1(x) = \cos x, \quad g_2(x) = \cos 2x, \quad g_3(x) = g_2\left(x - \frac{\pi}{10}\right),$$

$$f(x) = -\frac{1}{3} g_3(x).$$



Obr. 4.7

4.11. Neřešené příklady.

Nakreslete grafy goniometrických funkcí:

$$1. y = \sin x; y = \sin \frac{x}{2}; y = \sin 2x; y = 2 \sin x; y = \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right) \quad [\text{Do jednoho obrázku}]$$

$$2. y = 3 \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$3. y = \frac{1}{3} \sin \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$4. y = \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$5. y = \operatorname{cotg} \left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Použití goniometrických funkcí v Matematice 1

Vypočtěte limity:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad \left[\frac{1}{2}\right]$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} \quad [2]$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x} \quad [0]$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x\right) \quad \left[\frac{1}{2}\right]$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x} \quad [2]$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \quad \left[\frac{1}{2}\right]$$

Vypočtěte integrály:

$$1. \int \sin^2 x \, dx \quad \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c\right]$$

$$2. \int \sin x \sin 5x \, dx \quad \left[-\frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}\sin 4x + c\right]$$

$$3. \int \frac{dx}{1 + \cos x} \quad \left[\operatorname{tg} \frac{x}{2} + c\right]$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos x} \, dx \quad [2]$$