5. Posloupnosti, geometrická řada a kombinatorika.

5.1. Posloupnosti. Posloupnost je funkce, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel. Funkční hodnota této funkce přiřazená číslu $n \in \mathbf{N}$ se nazývá n**-tý člen posloupnosti** a značí se nejčastěji a_n, b_n apod. Posloupnost s n-tým členem a_n se značí $\{a_n\}$. **Grafem posloupnosti** je množina izolovaných bodů $[n, a_n]$ roviny, kde $n \in \mathbf{N}$.

Posloupnost je nejčastěji zadána jedním z těchto dvou způsobů:

- vzorcem, vyjadřujícím n-tý člen posloupnosti pomocí n,
- rekurentně udáním prvního členu posloupnosti a rekurentního vzorce, který vyjadřuje $(n+1)$-ní člen posloupnosti pomocí členů předchozích.

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **rostoucí**, jestliže $a_{n+1} > a_n$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$;
- **klesající**, jestliže $a_{n+1} < a_n$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$;
- **neklesající**, jestliže $a_{n+1} \geq a_n$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$;
- **nerostoucí**, jestliže $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$;
- **konstantní**, jestliže $a_{n+1} = a_n$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$;
- **omezená (ohraničená)**, jestliže existuje $K > 0$ tak, že $|a_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$.

5.2. Aritmetická posloupnost. Aritmetickou se nazývá posloupnost, ve které rozdíl dvou sousedních členů je konstantní.

$$\boxed{\text{Posloupnost } \{a_n\} \text{ je aritmetická} \iff \{a_{n+1} - a_n\} \text{ je konstantní.}}$$

Konstantní rozdíl $d = a_{n+1} - a_n$ se nazývá **diference aritmetické posloupnosti**.

V aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$ s diferencí d platí tyto vztahy $(n, m \in \mathbf{N})$:

$$\boxed{\begin{array}{c} a_n = a_1 + (n-1)d\,, \quad a_n = \dfrac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) \text{ pro } n > 1, \\ a_n = a_m + (n-m)d\,, \quad s_n = a_1 + \cdots + a_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n) \end{array}}$$

Dále platí:

$$\boxed{\begin{array}{c} \{a_n\} \text{ je rostoucí} \iff d > 0\,, \quad \{a_n\} \text{ je klesající} \iff d < 0, \\ \{a_n\} \text{ je konstantní} \iff d = 0 \end{array}}$$

Grafem aritmetické posloupnosti je množina izolovaných bodů ležících na přímce (důsledek vzorce pro n-tý člen).

5.3. Geometrická posloupnost. Geometrickou se nazývá posloupnost, ve které podíl dvou sousedních členů je konstantní.

$$\boxed{\text{Posloupnost } \{a_n\} \text{ je geometrická} \iff \left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} \text{ je konstantní.}}$$

Konstantní podíl $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ se nazývá **kvocient geometrické posloupnosti**. Z definice geometrické posloupnosti plyne, že všechny její členy jsou nenulové.

V geometrické posloupnosti $\{a_n\}$ s kvocientem q platí tyto vztahy $(n, m \in \mathbf{N})$:

$$\boxed{\begin{gathered} a_n = a_1 \cdot q^{n-1}\,, \quad a_n = a_m \cdot q^{n-m}\,, \quad |a_n| = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}} \text{ pro } n > 1, \\ s_n = a_1 + \cdots + a_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ pro } q \neq 1\,, \quad s_n = n \cdot a_1 \text{ pro } q = 1. \end{gathered}}$$

Dále platí:

$$\boxed{\begin{gathered} \{a_n\} \text{ je rostoucí} \Longleftrightarrow q > 1\,, \quad \{a_n\} \text{ je klesající} \Longleftrightarrow 1 > q > 0\,, \\ \{a_n\} \text{ je konstantní} \Longleftrightarrow q = 1. \end{gathered}}$$

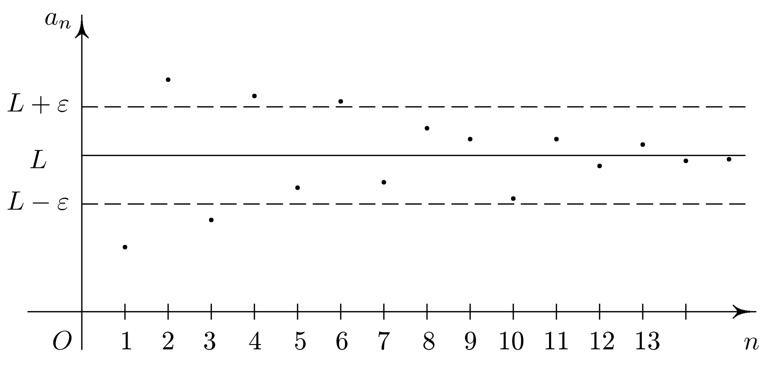
Grafem geometrické posloupnosti s kvocientem $q > 0$ je množina izolovaných bodů ležících na exponenciální křivce (důsledek vzorce pro n-tý člen).

5.4. Limita posloupnosti. Říkáme, že **posloupnost** $\{a_n\}$ **má limitu** $L \in \mathbf{R}$ a píšeme

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n\,,$$

právě když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $n_0 \in \mathbf{N}$, že pro všechna přirozená $n \geq n_0$ platí $|a_n - L| < \varepsilon$.

Právě vyslovenou definici ilustruje obr. 5.1:



Obr. 5.1

Ať si předepíšeme $\varepsilon > 0$ jakkoliv malé, vždy se najde n_0 tak, že všechny body $[n, a_n]$, kde $n \geq n_0$, budou ležet v pásu vymezeném rovnoběžkami $y = L + \varepsilon$, $y = L - \varepsilon$.

Posloupnost, která má limitu, se nazývá **konvergentní**.

5.5. Věty o limitách posloupností.

- Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu (snadný důsledek definice).
- Konvergentní posloupnost je omezená (ohraničená).
- Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ konverguje a $c \in \mathbf{R}$, potom konverguje i posloupnost $\{ca_n\}$ a platí

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n}$$

- Jestliže posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ konvergují, potom konvergují i posloupnosti $\{a_n \pm b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$ a platí:
$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n}$$

- Jestliže posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ konvergují, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ a $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, potom konverguje i posloupnost $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ a platí:
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}}$$

Poznámka. V úlohách se omezíme pouze na aritmetické a geometrické posloupnosti.

5.6. Nekonečné řady. Je-li $\{a_n\}$ posloupnost, pak symbol
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \quad \text{resp.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
nazýváme nekonečnou řadou. Říkáme, že tato **řada konverguje**, jestliže konverguje posloupnost $\{s_n\}$, kde
$$s_n = a_1 + \cdots + a_n$$
je tzv. n-tý částečný součet dané řady. **Součtem konvergentní nekonečné řady** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme limitu s posloupnosti jejích částečných součtů a píšeme
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s\,.$$

Pro nás je důležitá nekonečná geometrická řada
$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots\,.$$
Tato řada je konvergentní, právě když $|q| < 1$, a má potom součet
$$s = \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}\,.$$
Jinými slovy,
$$\boxed{a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{pro } |q| < 1}$$

5.7. Kombinatorika. V kombinatorice potřebujeme tyto pojmy:

- Funkci "n*-faktoriál*" označovanou $n!$ a definovanou pro všechna přirozená čísla n a 0 vztahy
$$\boxed{n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad 0! = 1.}$$
Pro tuto funkci platí rekurentní vyjádření
$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

- **Kombinační číslo** ” n *nad* k ”, označované $\binom{n}{k}$, je definováno pro všechna $n, k = 0, 1, 2, \dots$, $n \geq k$ výrazem

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 2\cdot 1}}$$

Vlastnosti kombinačních čísel jsou:

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ pro $0 \leq k \leq n$,
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$,
- $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$,
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, je-li $0 \leq k \leq n-1$.

5.8. Permutace. Nechť M je neprázdná množina, která má $n \in N$ navzájem různých prvků, tedy $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $a_i \neq a_j$ pro $i \neq j$. *Uspořádanou* n-tici z n různých prvků $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ nazýváme permutací. Zaměníme-li pořadí prvků v této n-tici, např. $(a_2, a_1, a_3, \dots, a_n)$, vytvoříme jinou permutaci prvků množiny M. Zjišťujeme-li, kolik různých permutací z n prvků množiny M můžeme vytvořit, zjišťujeme vlastně, kolik je různých pořadí prvků množiny M. Na prvním místě se vystřídá všech n prvků. Je-li na prvním místě určitý prvek, na druhém místě se vystřídá již jen $(n-1)$ zbývajících prvků množiny M atd., až na poslední místo zbude jediný prvek. Počet permutací z n prvků množiny M označíme $P(n)$ a je

$$\boxed{P(n) = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\dots 2\cdot 1 = n!}$$

Jestliže se mezi prvky množiny M vyskytne a_1 k-krát, a_2 ℓ-krát, a_3 m-krát, $\dots$, pak počet všech různých uspořádaných n-tic je

$$\boxed{P_{k,\ell,m,\dots}(n) = \frac{n!}{k!\ \ell!\ m!\ \dots}}$$

5.9. Variace. Nechť je dána množina M z 5.8 a přirozené číslo $k \leq n$. *Uspořádanou* k-tici navzájem různých prvků z množiny M: $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ nazveme variací k-té třídy z n prvků množiny M. Počet variací z n prvků k-té třídy označíme $V_k(n)$. Je roven

$$\boxed{V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Je-li např. $M = \{a, b, c\}$, všechny možné variace druhé třídy ze 3 prvků množiny M jsou (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b).

5.10. Kombinace. Nechť je dána množina M z 5.8 a přirozené číslo $k \leq n$. Vytvořme množinu $P \subset M$, která má k navzájem různých prvků: $P = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. *Neuspořádanou* k-tici navzájem různých prvků množiny M nazýváme kombinací k-té třídy z n prvků množiny M. Počet všech různých podmnožin s k prvky, které lze získat z n prvků množiny M, tzn. počet kombinací k-té třídy z n prvků je

$$\boxed{C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Je-li např. $M = \{a, b, c\}$, potom $(a, b), (a, c)$ a (b, c) jsou všechny různé kombinace druhé třídy z prvků množiny M. Jejich počet je $C_2(3) = \binom{3}{2} = 3$.

5.11. Binomická věta. Pro libovolná reálná i komplexní čísla a, b a pro libovolné přirozené číslo n platí vztah

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n .$$

Symbolicky zapsáno

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

Binomické koeficienty $\binom{n}{k}$ lze přehledně zapsat do tzv. **Pascalova trojúhelníku** a z něho je vyhledávat.

n	$\binom{n}{k}$ je k-tý prvek v řádku n
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	1 1
..	....

Známe-li v tomto nekonečném trojúhelníku r-tý řádek, potom snadno určíme i řádek $(r+1)$. Protože platí

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

je Pascalův trojúhelník symetrický a k-tý prvek v $(r+1)$-tém řádku je součtem $(k-1)$-tého a k-tého prvku v r-tém řádku, tj. součtem dvou prvků v r-tém řádku, které jsou mu nejblíže.

5.12. Řešené příklady.

1. Zjistěte, zda je posloupnost rostoucí nebo klesající:

$$\text{a) } \{1-n^2\}, \quad \text{b) } \{\frac{n^3}{10}\}.$$

Řešení:

a) Určíme několik prvních členů posloupnosti:

$$0, -3, -7, -15, \dots .$$

Vidíme, že daná posloupnost bude asi klesající. Dokážeme tedy, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$, tj. jinými slovy, že nerovnici

$$1 - n^2 > 1 - (n+1)^2$$

vyhovují všechna přirozená čísla. Poslední nerovnice je však ekvivalentní nerovnici $(n+1)^2 > n^2$, která je zřejmě splněna pro všechna $n \in \mathbf{N}$.

b) Z několika počátečních členů

$$\frac{1}{10}, \frac{8}{10}, \frac{27}{10}, \frac{64}{10}, \dots$$

usoudíme, že posloupnost bude asi rostoucí. Dokážeme tedy , že pro všechna přirozená čísla n platí $a_{n+1} > a_n$, tj.

$$\frac{(n+1)^3}{10} > \frac{n^3}{10} .$$

Poslední nerovnost je však ekvivalentní nerovnosti $(n+1)^3 > n^3$, která zřejmě platí pro všechna $n \in \mathbf{N}$.

2. Dokažte, že posloupnost $\{\frac{2n-1}{3}\}$ je aritmetická.

Řešení: Vyšetříme rozdíl dvou po sobě jdoucích členů posloupnosti:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-1}{3} - \frac{2n-1}{3} = \frac{2n+2-1-2n+1}{3} = \frac{2}{3} .$$

Vidíme, že tento rozdíl je konstantní a roven $\frac{2}{3}$. Posloupnost je tedy aritmetická, $a_1 = \frac{1}{3}$ a diference $d = \frac{2}{3}$.

3. Členy aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$ vyhovují rovnicím

$$a_2 + a_4 + a_7 = 56 , \quad 7(a_1 + a_3) = 6a_6 .$$

Určete a_5.

Řešení: Použijeme vztah $a_n = a_1 + (n-1)d$ a všechny členy posloupnosti, které se vyskytují v uvedených rovnicích, vyjádříme pomocí a_1 a d. Dostaneme rovnice

$$3a_1 + 10d = 56 , \quad 8a_1 - 16d = 0 .$$

Z druhé rovnice vypočteme $a_1 = 2d$ a po dosazení do první rovnice dostaneme rovnici $16d = 56$, z níž plyne $d = \frac{7}{2}$. Tedy $a_1 = 7$ a $a_5 = a_1 + 4d = 7 + 4 \cdot \frac{7}{2} = 7 + 14 = 21$.

Výsledek: $a_5 = 21$.

4. V aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$ je $a_3 = 2$ a $s_3 = -3$. Určete s_5.

Řešení: Protože $s_5 = \frac{5}{2}(a_1 + a_5)$, vyjádříme a_1, a_2, s_3 pomocí a_3 a d:

$$a_1 = a_3 - 2d , \quad a_2 = a_3 - d , \quad s_3 = (a_3 - 2d) + (a_3 - d) + a_3 .$$

Nyní dosadíme do rovnice $s_3 = -3$ a postupně dostaneme:

$$2 - 2d + 2 - d + 2 = -3 , \quad 3d = 9 , \quad d = 3 .$$

Tedy

$$s_5 = \frac{5}{2}(a_1 + a_5) = \frac{5}{2}(2 - 2 \cdot 3 + 2 + 2 \cdot 3) = \frac{5}{2} \cdot 4 = 10 .$$

Výsledek: $s_5 = 10$.

5. Součin tří po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti se rovná jejich součtu. Určete tyto členy, víte-li, že $d = \dfrac{13}{3}$.

   Řešení: Označíme-li si hledané členy a_{k-1} , a_k , a_{k+1} , potom platí rovnice

$$a_{k-1}a_k a_{k+1} = a_{k-1} + a_k + a_{k+1} \,.$$

   Vyjádříme a_{k-1} , a_{k+1} pomocí a_k a d , dosadíme a postupně upravíme:

$$\begin{aligned} (a_k - d)a_k(a_k + d) &= a_k - d + a_k + a_k + d \\ a_k(a_k^2 - d^2) &= 3a_k \\ a_k(a_k^2 - d^2 - 3) = 0 &\Longrightarrow \begin{cases} a_k = 0 \\ a_k^2 = d^2 + 3\,,\ a_k = \pm\sqrt{\dfrac{169}{9} + 3} = \pm\dfrac{14}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

   Úloze tedy vyhovují všechny aritmetické posloupnosti, které obsahují jednu z těchto tří trojic po sobě jdoucích členů:

$$-\frac{13}{3}\,,\ 0\,,\ \frac{13}{3}\,; \qquad \frac{1}{3}\,,\ \frac{14}{3}\,,\ 9\,; \qquad -9\,,\ -\frac{14}{3}\,,\ -\frac{1}{3}\,.$$

6. V geometrické posloupnosti je součet prvních dvou členů 4, součet jejich druhých mocnin 10. Určete součet prvních pěti členů.

   Řešení: Nejprve určíme a_1 a q . Ze zadání úlohy vyplývají vztahy

$$a_1 + a_2 = 4 \quad a_1^2 + a_2^2 = 10\,.$$

   Vyjádříme a_2 pomocí a_1 a q a dosadíme; dostaneme rovnice

$$a_1 + a_1 q = 4\,, \quad a_1^2 + a_1^2 q^2 = 10\,.$$

   Z první rovnice vypočteme $a_1 = \dfrac{4}{1+q}$ a po dosazení do druhé rovnice postupně dostaneme:

$$\frac{16}{(1+q)^2}\,(1+q^2) = 10\,, \quad 3q^2 - 10q + 3 = 0$$

$$q_1 = 3\,,\ q_2 = \frac{1}{3}\,.$$

   To znamená, že úloze vyhovují dvě geometrické posloupnosti $\{a_n\}$. U jedné z nich je $q = 3$, $a_1 = 1$, a tedy

$$s_5 = 1 \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 121\,.$$

   V druhé posloupnosti je $q = \dfrac{1}{3}$, $a_1 = 3$, a tedy

$$s_5 = 3\,\frac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^5 - 1}{\dfrac{1}{3} - 1} = \frac{121}{27}\,.$$

   Součet prvních pěti členů je buď 121 nebo $\dfrac{121}{27}$.

7. V geometrické posloupnosti je $a_7 - a_5 = 96$, $a_5 + a_6 = 96$, $s_n = 2046$. Určete a_1 , q , n .

Řešení: Dosadíme do těchto vztahů $a_6 = a_5 q$, $a_7 = a_5 q^2$ a dostaneme rovnice

$$a_5 q^2 - a_5 = 96\,, \quad a_5 + a_5 q = 96\,,$$

z nichž okamžitě plyne nerovnost $q \neq \pm 1$. První rovnici vydělíme druhou a postupně dostaneme:

$$\frac{q^2-1}{q+1} = 1\,, \quad q - 1 = 1\,, \quad q = 2\,,$$
$$a_1 = a_5 q^{-4} = \frac{96}{1+q}\,q^{-4} = \frac{96}{3} \cdot \frac{1}{16} = 2\,.$$

Zbývá určit n , pro které $s_n = 2046$. K tomu použijeme vzorec pro s_n , do kterého dosadíme $s_n = 2046$, $a_1 = 2$, $q = 2$, a postupně dostaneme:

$$2046 = 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2-1}\,, \quad 2^n = 1024\,, \quad 2^n = 2^{10}\,, \quad n = 10\,.$$

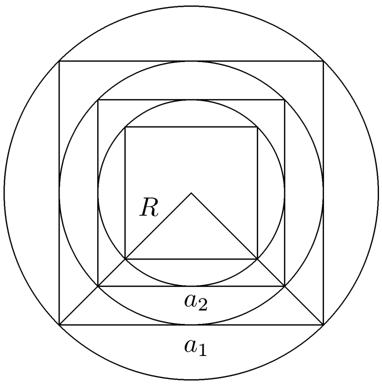
Výsledek: $a_1 = 2$, $q = 2$, $n = 10$.

8. Do kružnice o poloměru R je vepsán čtverec a do něho kružnice, do této kružnice opět čtverec atd. Vypočtěte

   a) stranu pátého čtverce,

   b) součet obvodů všech nekonečně mnoha takto vzniklých čtverců.

Řešení: Označme R_n poloměr n-té takto vzniklé kružnice, takže



Obr. 5.2

$R = R_1$. Dále označme a_n délku strany čtverce vepsaného do n-té kružnice. Ukážeme nejprve, že posloupnost $\{a_n\}$ je geometrická. Jak je patrné z obrázku, pro každé n platí vztahy

$$a_n = R_n\sqrt{2}$$

$$R_{n+1} = \frac{1}{2}a_n\,,$$

a tedy

$$a_{n+1} = R_{n+1}\sqrt{2} = \frac{1}{2}a_n\sqrt{2} = a_n\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Posloupnost je tedy opravdu geometrická, přičemž její první člen a kvocient jsou dány vztahy

$$a_1 = R\sqrt{2}\,, \quad q = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Nyní už lehce zodpovíme obě otázky:

a) Strana pátého čtverce je dána vztahem

$$a_5 = a_1 q^4 = R\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = R\,\frac{\sqrt{2}}{4}\,.$$

b) Součet s obvodů všech čtverců je součtem geometrické řady $4a_1 + 4a_2 + 4a_3 \dots$ s prvním členem $4R\sqrt{2}$ a kvocientem $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, a tedy

$$s = \frac{4R\sqrt{2}}{1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8R\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{8R}{\sqrt{2} - 1} = 8R\,(\sqrt{2} + 1)\,.$$

Výsledek: $a_5 = R\,\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, součet obvodů všech čtverců $s = 8R\,(\sqrt{2} + 1)$.

9. Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici

$$\frac{8}{x + 10} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{27}{x^3} + \cdots\,.$$

Řešení: Řešení musí splňovat podmínky $x \neq 0$ a $x \neq -10$, aby zlomky v rovnici měly smysl. Pravá strana rovnice je součtem s geometrické řady, kde $a_1 = 1$ a $q = -\frac{3}{x}$. Aby tato řada konvergovala, musí platit $|q| < 1$, což je ekvivalentní podmínce $|x| > 3$. Je-li tato podmínka splněna, je

$$s = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 + \dfrac{3}{x}} = \frac{x}{x + 3}\,.$$

Dosadíme tento výsledek do zadané rovnice a postupnými úpravami dostaneme

$$\frac{8}{x + 10} = \frac{x}{x + 3}\,, \quad 8x + 24 = x^2 + 10x\,, \quad x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$x_1 = -6\,, \ \ x_2 = 4\,.$$

Oba kořeny splňují všechny tři výše uvedené podmínky, a proto jsou oba řešením zadané rovnice.

Rovnice má dvě řešení $x_1 = -6$, $x_2 = 4$.

10. Kolika způsoby můžeme rozestavit na šachovnici (o osmi sloupcích a osmi řadách) 8 věží tak, aby se žádné dvě z nich vzájemně neohrožovaly?

Řešení. V každém sloupci a v každé řadě musí stát jediná věž. Uvažujme jednu z těchto poloh

$$a_1, a_2, \dots, a_8\,,$$

kde a_1 je číslo obsazeného pole v 1. řadě, a_2 je číslo obsazeného pole ve druhé řadě atd. Pak je $(a_1, a_2, \dots, a_8)$ jistá permutace čísel 1, 2, ... , 8. Odtud plyne, že počet hledaných poloh je roven počtu permutací čísel 1, 2, ... , 8, tj. číslu

$$P(8) = 8! = 8 \cdot 7 \cdots 2 \cdot 1 = 40\,320\,.$$

Věže můžeme na šachovnici rozestavit 40 320 způsoby.

11. Angličané obvykle dávají svým dětem několik jmen. Kolika způsoby lze pojmenovat ne více než třemi jmény novorozeně, je-li k dispozici 300 různých jmen ?

Řešení. Je jasné, že

jedno jméno lze dát dítěti .... 300 způsoby,
dvě jména lze dát dítěti .... $V_2(300) = 300 \cdot 299$ způsoby,
tři jména lze dát dítěti .... $V_3(300) = 300 \cdot 299 \cdot 298$ zp.

Ve druhém případě se totiž jedná o variace druhé třídy ze 300 prvků a ve třetím případě o variace třetí třídy ze 300 prvků, neboť zde zřejmě záleží na pořadí. Novorozeněti tedy můžeme vybrat nejvýše 3 jména

$$300 + 300 \cdot 299 + 300 \cdot 299 \cdot 298 = 26\,820\,600$$

způsoby.

12. Z 52 účastníků zasedání má být vybrána 5-tičlenná delegace. Kolika způsoby to lze provést?

Řešení. Máme vybrat 5ti-člennou skupinu z 52 prvků, přičemž nezáleží na pořadí. Jedná se tedy o kombinaci 5. třídy z 52 prvků. Všech kombinací 5. třídy z 52 prvků je

$$C_5(52) = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\,47!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2\,598\,960\,.$$

Výběr pěti delegátů lze tedy provést 2 598 960 způsoby.

13. Pro přípustné hodnoty upravte $V = \dfrac{n!}{(n-2)!} - 2\dbinom{n}{2}$.

Řešení. Za předpokladu $n \geq 2$ je

$$V = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1}{(n-2)(n-3)\cdots 2 \cdot 1} - 2\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} = n(n-1) - n(n-1) = 0\,.$$

14. V množině přirozených čísel řešte rovnici $\dbinom{n-1}{n-3} - n = 8$.

Řešení. Musí platit nerovnosti $n \geq 1$, $n \geq 3$, což je ekvivalentní jedné nerovnosti $n \geq 3$. Použijeme vztahu $\dbinom{m}{k} = \dbinom{m}{m-k}$ pro $m = n-1$ a $k = n-3$ a upravíme naši rovnici na tvar

$$\binom{n-1}{2} - n = 8\,.$$

Odtud postupně dostáváme

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - n = 8\,, \quad n^2 - n - 2n + 2 - 2n = 16$$
$$n^2 - 5n - 14 = 0\,, \quad n_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+56}}{2} = \begin{cases} 7 \\ -2 \end{cases}.$$

Vzhledem k podmínce $n \geq 3$ rovnici vyhovuje pouze $n = 7$.

15. Určete $x \in \mathbf{R}^+$ tak, aby pátý člen v binomickém rozvoji mocniny $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2}\right)^{10}$ byl 105.

Řešení. Pátý člen rozvoje podle uvedeného tvaru binomické věty je $A_5 = \dbinom{10}{4} a^6 b^4$, takže máme určit x tak, aby platila rovnice

$$\binom{10}{4}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^6 \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = 105\,.$$

Odtud postupně dostáváme

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2^6 x^3} \cdot \frac{1}{2^4} = 105\,, \quad x^3 = \frac{6 \cdot 7}{21 \cdot 2^{10}} = \frac{1}{2^9}\,, \quad x = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}\,.$$

Výsledek: $x = \dfrac{1}{8}$.

5.13. Neřešené příklady.

1. Zjistěte, zda posloupnost $\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}\right\}$ je rostoucí či klesající. [Klesající]

2. V aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$ je $a_2 + a_3 = 9$, $a_2 \cdot a_3 = 14$. Určete a_{10} .
[$a_{10} = -33$, je-li $a_1 = 12, d = -5$, nebo $a_{10} = 42$, je-li $a_1 = -3, d = 5$]

3. V geometrické posloupnosti $\{a_n\}$ určete první člen a_1 a kvocient q je-li:
   a) $a_1 + a_4 = 195$, $a_2 + a_3 = 60$, $\left[q = 4, a_1 = 3 \text{ nebo } q = \frac{1}{4}, a_1 = 192\right]$
   b) $a_1 - a_2 + a_3 = 15$, $a_4 - a_5 + a_6 = 120$. [$a_1 = 5$, $q = 2$]

4. Řešte v R rovnice:
   a) $\frac{5}{3} = x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + \dots,$ $\left[x_1 = -\frac{5}{7},\ x_2 = \frac{1}{2}\right]$
   b) $2^x + 4^x + 8^x + 16^x + \cdots = 1,$ [$x = -1$]
   c) $\log x + \log \sqrt{x} + \log \sqrt[4]{x} + \cdots = 2,$ [$x = 10$]
   d) $1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \cdots = \frac{4x-3}{3x-4}.$ [$x = 6$]

5. Dokažte že pro $|q| < 1$ je součet geometrické řady $s = \dfrac{a_1}{1-q}$.

6. Dokažte podle definice, že posloupnost $\left\{\dfrac{3n+4}{n}\right\}$ je rostoucí a má limitu 3 .

7. Vypočtěte limity:
   a) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+3\cdots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}\right),$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$
   b) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}\right),$ $\left[\frac{4}{3}\right]$
   c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!-n!}.$ [0]

8. Upravte výrazy:
   a) $\dfrac{(n+1)!}{n!} - \dfrac{n!}{(n+1)!},$ $\left[\frac{n^2+2n}{n+1}\right]$
   b) $\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!} + \dfrac{(3n+3)!}{(3n+4)!}.$ $\left[\frac{(n+2)^2}{n(n+1)(3n+4)}\right]$

9. Řešte v $\mathbf{N}$ rovnice:
   a) $\binom{x}{1} + \binom{x}{x-2} = 66,$ [11]
   b) $\binom{x-1}{x-3} + \binom{x-2}{x-4} = 9.$ [5]

10. Určete desátý člen binomického rozvoje mocniny $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x} + \sqrt[3]{x}\right)^{20}.$ $\left[\binom{20}{9}\frac{\sqrt{x}}{x^3}\right]$