

6. Analytická geometrie lineárních a kvadratických útvarů v rovině.

6.1. V této kapitole budeme studovat geometrické úlohy v rovině analyticky, tj. lineárně a kvadratické geometrické útvary vyjádříme pomocí vztahů mezi souřadnicemi.

V celé kapitole budeme předpokládat, že v rovině je pevně zvolena kartézská soustava souřadnic $(0; x, y)$.

Nechť jsou dány v rovině body $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$. **Vzdálenost** $|AB|$ bodů A, B je dána vzorcem

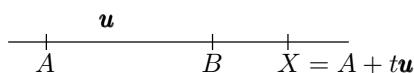
$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

6.2. Parametrické vyjádření přímky v rovině.

Zvolme na přímce dva různé body A, B . Body A, B určují na přímce nenulový vektor $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$. Rovnici

$$X = A + t\mathbf{u}, \text{ kde } t \in \mathbf{R},$$

kde X je libovolný bod přímky, nazveme **parametrickou rovnicí přímky**, kde A je bod přímky, t je **parametr** a \mathbf{u} je **směrový vektor** přímky (viz obr. 6.1).



Obr. 6.1

- Je-li $t \in \langle 0, \infty \rangle$, je bod X bodem polopřímky AB .
- Je-li $t \in \langle -\infty, 0 \rangle$, je bod X bodem polopřímky opačné k polopřímce AB .
- Je-li $t \in \langle 0, 1 \rangle$, je bod X bodem úsečky AB .
- Je-li $t = \frac{1}{2}$, je bod X středem úsečky AB .

Nechť je dán v rovině bod $A = [a_1, a_2]$ a vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Potom přímka, která prochází bodem A a má směrový vektor \mathbf{u} , má toto **parametrické vyjádření v souřadnicích**:

$$\begin{cases} x = a_1 + tu_1 \\ y = a_2 + tu_2, t \in \mathbf{R} \end{cases}$$

$X = [x, y]$ je libovolným bodem přímky.

Přímku určenou bodem A a směrovým vektorem \mathbf{u} budeme značit $p(A, \mathbf{u})$.

6.3. Neparametrické vyjádření přímky v rovině.

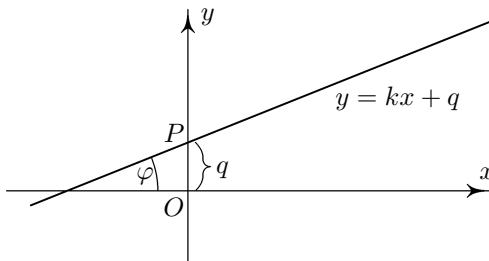
- **Směrnice rovnice přímky** (viz obr. 6.2) má tvar

$$y = kx + q, k, q \in \mathbf{R} \tag{6.1}$$

Koeficient k se nazývá **směrnice přímky**. Jeho geometrický význam je dán vztahem $k = \operatorname{tg} \varphi$, kde φ je **směrový úhel přímky**, tj. úhel, který přímka svírá s kladnou poloosou x . Koeficient q je úsek, který přímka vytíná na ose y , tj. y -ová souřadnice průsečíku přímky s osou y . Je-li v rovnici (6.1) $q = 0$, přímka prochází počátkem, je-li $k = 0$, přímka je rovnoběžná s osou x . Rovnicí (6.1) nelze vyjádřit přímku rovnoběžnou s osou y . Přímka rovnoběžná s osou y má rovnici $x = c, c \in \mathbf{R}$.

- **Přímka určená bodem** $A = [a_1, a_2]$ a **směrnicí** k , má rovnici

$$y - a_2 = k(x - a_1), \quad k \in \mathbf{R} \quad (6.2)$$

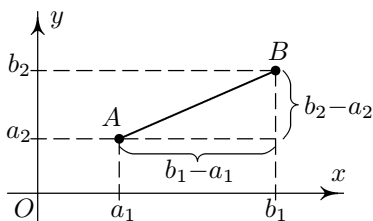


Obr. 6.2

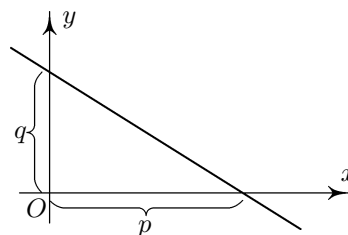
- **Přímka určená dvěma různými body** $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, kde $a_1 \neq b_1$, má rovnici

$$y - a_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1) \quad (6.3)$$

Dostaneme ji z rovnice (6.2), vyjádříme-li $k = \operatorname{tg} \varphi$ z pravoúhlého trojúhelníku na obr. 6.3.



Obr. 6.3



Obr. 6.4

- Přímka vytínající na osách x, y úseky p, q má rovnici

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1, \quad p, q \in \mathbf{R}, \quad p \cdot q \neq 0$$

(viz obr. (6.4)). Této rovnici se říká **úseková rovnice přímky**.

- Všechny dosud uvedené tvary rovnice přímky v rovině jsou speciálním případem lineární rovnice o dvou neznámých x a y tvaru

$$ax + by + c = 0, \quad (a, b) \neq (0, 0)$$

Tato rovnice se nazývá **obecná rovnice přímky**.

6.4. Vzdálenost bodu od přímky. Nechť je v rovině dána přímka p rovnicí $ax + by + c = 0$, kde $(a, b) \neq (0, 0)$ a bod $M = [m_1, m_2]$. Potom vzdálenost bodu M od přímky p je

$$v = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (6.4)$$

6.5. Odchylka α dvou přímek v rovině. Jsou-li $p: y = k_1x + q_1$, $q: y = k_2x + q_2$ dvě přímky, pak jejich odchylka α je dána vzorcem

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|, \quad k_1 \cdot k_2 \neq -1, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \text{je-li } k_1 \cdot k_2 = -1. \quad (6.5)$$

Kvadratické útvary v rovině (kuželosečky) jsou analyticky popsány kvadratickou rovnicí. Jsou to: kružnice, elipsa, hyperbola, parabola. V této kapitole budeme analyticky vyjadřovat jen kuželosečky, jejichž osy leží na osách kartézské soustavy souřadnic, nebo jsou s nimi rovnoběžné.

6.6. Kružnice. Kružnice je množina bodů, které mají od daného bodu, zvaného **střed kružnice**, stejnou nemulovou vzdálenost zvanou **poloměr kružnice**.

- Kružnice se středem $S = [x_0, y_0]$ a s poloměrem r má rovnici

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \quad r \in \mathbf{R}^+ \quad (6.6)$$

- Je-li střed $S = [0, 0]$, kružnice má rovnici

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad r \in \mathbf{R}^+ \quad (6.7)$$

Tečna ke kružnici s rovnicí (6.6) a s bodem dotyku $T = [x_1, y_1]$ má rovnici

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) = r^2$$

Je-li střed $S = [0, 0]$, tj. v případě kružnice s rovnicí (6.7), má tečna rovnici

$$xx_1 + yy_1 = r^2$$

6.7. Elipsa. Elipsa je křivka (viz obr. 6.5), jejíž všechny body mají konstantní součet vzdáleností od dvou různých pevně zvolených bodů. Tyto body se označují F_1 , F_2 a nazývají se **ohniska elipsy**. Součet vzdáleností $|F_1M| + |F_2M|$, kde M je libovolný bod elipsy, se označuje $2a$; zřejmě $a \in \mathbf{R}^+$, $2a > |F_1F_2|$. Střed S úsečky F_1F_2 se nazývá **střed elipsy**. Přímka F_1F_2 se nazývá **hlavní osa** a kolmice k ní vedená bodem S se nazývá **vedlejší osa** elipsy. Průsečíky A_1 , A_2 elipsy s hlavní osou a průsečíky B_1 , B_2 s vedlejší osou se nazývají **vrcholy** elipsy. Úsečky SA_1 a SA_2 , pro jejichž velikosti platí vztah $|SA_1| = |SA_2| = a$, se nazývají **hlavní poloosy** a úsečky SB_1 a SB_2 , jejichž velikost se značí b , se nazývají **vedlejší poloosy**. Pro velikost hlavní a vedlejší poloosy platí vztah $a > b$. (Hlavní, resp. vedlejší poloosou se často nazývá též číslo a , resp. číslo b .) Číslo $e = |SF_1| = |SF_2|$ se říká **excentricita (výstřednost)**. Velikost hlavní poloosy a , velikost vedlejší poloosy b a excentricita e splňují rovnici

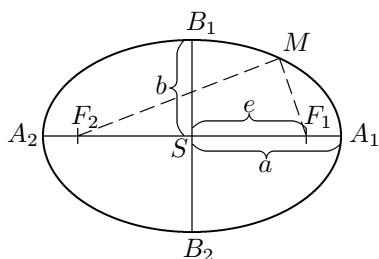
$$e^2 = a^2 - b^2$$

Elipsa se středem $S = [x_0, y_0]$, s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b má rovnici

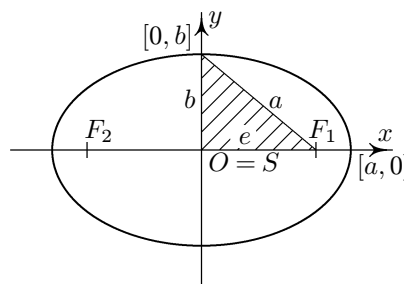
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0 \quad (6.8)$$

Je-li střed $S = [0, 0]$ (viz obr. 6.6), elipsa má rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0 \quad (6.9)$$



Obr. 6.5



Obr. 6.6

Poznámky:

- Z definice elipsy je zřejmé, že elipsa daná rovnicí (6.9) má hlavní osu totožnou s osou x (ohniska leží na ose x).
- Je-li v rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a = b$, $a, b \in \mathbf{R}^+$, pak tato rovnice popisuje kružnici s poloměrem a a středem v počátku.

Tečna k elipse s rovnicí (6.8) a s bodem dotyku $T = [x_1, y_1]$ má rovnici

$$\frac{(x - x_0)(x_1 - x_0)}{a^2} + \frac{(y - y_0)(y_1 - y_0)}{b^2} = 1$$

Je-li střed $S = [0, 0]$, tj. v případě elipsy s rovnicí (6.9), má tečna rovnici

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

6.8. Hyperbola. Hyperbola je křivka (viz obr. 6.7), jejíž všechny body mají konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností od dvou různých pevně zvolených bodů. Tyto body se označují F_1 , F_2 a nazývají se **ohniska hyperboly**. Absolutní hodnota rozdílu vzdáleností $||F_1M| - |F_2M||$, kde M je libovolný bod hyperboly, se označuje $2a$; zřejmě $a \in \mathbf{R}^+$, $2a < |F_1F_2|$. Střed S úsečky F_1F_2 se nazývá **střed hyperboly**. Příčka F_1F_2 se nazývá **hlavní osa** a kolmice k ní vedená středem S se nazývá **vedlejší osa** hyperboly. Průsečíky hyperboly s její hlavní osou, body A_1 , A_2 , se nazývají **vrcholy** hyperboly. Úsečky SA_1 , SA_2 jsou tzv. **hlavní poloosy**; pro jejich délku platí vztah $|SA_1| = |SA_2| = a$. (Často se hlavní poloosou nazývá též číslo a .) Vzdálenost $e = |SF_1| = |SF_2|$ se nazývá **excentricita (výstřednost)** hyperboly. **Vedlejší poloosy** jsou úsečky SB_1 , SB_2 , kde body B_1 a B_2 jsou jediné body na vedlejší ose hyperboly, jejichž vzdálenost od bodů A_1 a A_2 je rovna e . (I pod vedlejší poloosou se často rozumějí nejen úsečky SB_1 , SB_2 , ale i jejich velikost.) Velikost b vedlejší poloosy splňuje rovnici

$$e^2 = a^2 + b^2$$

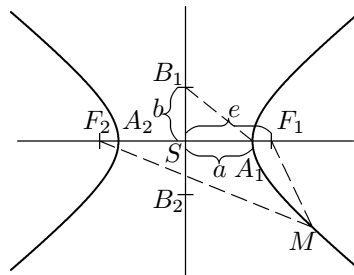
Jestliže $a = b$, **hyperbola** se nazývá **rovnoosá**.

Hyperbola se středem $S = [x_0, y_0]$, s hlavní poloosou a , vedlejší poloosou b má rovnici

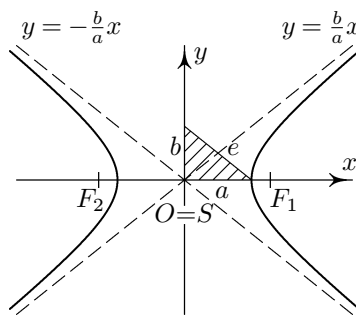
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad a, b \in \mathbf{R}^+ \quad (6.10)$$

Je-li střed $S = [0, 0]$ (viz obr. 6.8 a), hyperbola má rovnici

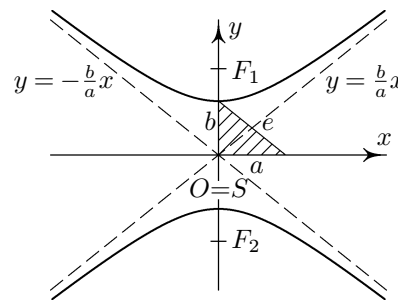
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b \in \mathbf{R}^+ \quad (6.11)$$



Obr. 6.7



Obr. 6.8 a



Obr. 6.8 b

Poznámky:

- Z definice hyperboly je zřejmé, že hyperbola daná rovnicí (6.11) má hlavní osu totožnou s osou x (ohniska leží na ose x).
- Hyperbola, která má střed $S = [0, 0]$, hlavní osu totožnou s osou y (ohniska leží na ose y), hlavní poloosu b , vedlejší poloosu a , má rovnici $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (viz obr. 6.8 b).

Tečna k hyperbole s rovnicí (6.10) a s bodem dotyku $T = [x_1, y_1]$ má rovnici

$$\frac{(x - x_0)(x_1 - x_0)}{a^2} - \frac{(y - y_0)(y_1 - y_0)}{b^2} = 1$$

Je-li střed $S = [0, 0]$, tj. v případě hyperboly s rovnicí (6.11), má tečna rovnici

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Asymptoty hyperboly jsou přímky, které procházejí jejím středem a svírají s její hlavní osou úhel α , kde $\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{b}{a}$. Asymptoty hyperboly s rovnicí (6.10) mají rovnice

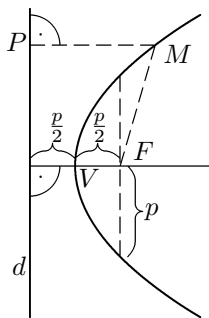
$$y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$$

a asymptoty hyperboly s rovnicí (6.11) mají rovnice

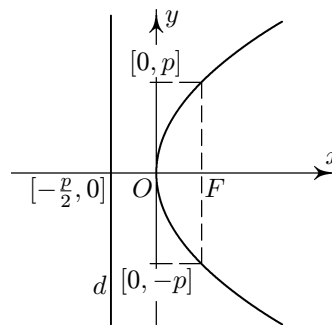
$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$

6.9. Parabola. Parabola je křivka (viz obr. 6.9), jejíž každý bod je stejně vzdálen od daného bodu F , zvaného **ohnisko** paraboly, a od dané přímky d , zvané **řídící přímka** paraboly. Je-li tedy M libovolný

bod paraboly a P je jeho pravouhlý průmět na řídicí přímku, platí rovnost $|FM| = |PM|$. Vzdálenost ohniska F od řídicí přímky se nazývá **parametr** paraboly a značí se p ; je tedy $p \in \mathbf{R}^+$. (Někdy se parametrem paraboly rozumí číslo $2p$ a číslo p se nazývá **poloparametrem** paraboly.) Kolmice k řídicí přímce procházející ohniskem F se nazývá **osa paraboly** a její průsečík s parabolou, bod V , se nazývá **vrchol** paraboly. Pro vrchol V platí vztah $|VF| = \frac{p}{2}$.



Obr. 6.9



Obr. 6.10

Parabola s vrcholem $V = [x_0, y_0]$ a s ohniskem $F = [\frac{p}{2} + x_0, y_0]$ má rovnici

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0), p \in \mathbf{R}^+ \quad (6.12)$$

Je-li vrchol $V = [0, 0]$ a ohnisko $F = [\frac{p}{2}, 0]$ (viz obr. 6.10), parabola má rovnici

$$y^2 = 2px, p \in \mathbf{R}^+ \quad (6.13)$$

Poznámka: Parabola s vrcholem v počátku a s ohniskem ležícím na záporné poloose x , resp. na kladné poloose y , resp. na záporné poloose y má rovnici

$$y^2 = -2px, \quad \text{resp.} \quad x^2 = 2py, \quad \text{resp.} \quad x^2 = -2py, p \in \mathbf{R}^+.$$

Tečna k parabole s rovnicí (6.13) a s bodem dotyku $T = [x_1, y_1]$ má rovnici

$$p(x + x_1) = yy_1$$

Tečnu k parabole s rovnicí (6.12) lze z této rovnice odvodit posunutím souřadnic.

Poznámky:

- Rovnice (6.6) až (6.11) se nazývají středové rovnice.
- Rovnice (6.12) a (6.13) se nazývají vrcholové rovnice.
- Rovnice (6.7), (6.9), (6.11), (6.13) se nazývají rovnice v základní poloze.
- Rovnice $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, kde $A, B, C, D, E \in \mathbf{R}$ a alespoň jedno z čísel A, B je nenulové, může vyjadřovat některou z kuželoseček daných rovnicemi (6.6) až (6.13), pokud lze tuto rovnici algebraickými úpravami převést na některý z uvedených tvarů.
- Rovnice $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, kde $A, B, C, D, E, F \in \mathbf{R}$, $C \neq 0$ a alespoň jedno z čísel A, B je nenulové, může vyjadřovat kuželosečku, která nemá osy (pro parabolu osu) rovnoběžné ani totožné s osami souřadnic. Vyšetřování kuželoseček v této poloze není v osnovách střední školy.

- Vzájemnou polohu přímky a kuželosečky vyšetřujeme tak, že hledáme jejich společné body řešením soustavy jejich rovnic.
- Společné body dvou kuželoseček hledáme řešením soustavy jejich rovnic.

6.10. Řešené příklady.

Ve všech následujících úlohách předpokládáme, že souřadnice bodů a vektorů jsou dány v kartézské soustavě souřadnic.

1. Vypočtete výšku v_a trojúhelníku ABC s vrcholy $A = [5, 2]$, $B = [1, 5]$, $C = [-2, 1]$.

Řešení: Výšku v_a vypočteme jako vzdálenost vrcholu A od přímky BC , jejíž rovnice podle vzorce (6.4) je

$$y - 5 = \frac{1 - 5}{-2 - 1}(x - 1), \quad \text{tj. po úpravě} \quad 4x - 3y + 11 = 0.$$

Pak podle vzorce (12.4) $v_a = \frac{|4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 + 11|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{25}{5} = 5.$

2. Napište rovnici přímky l tak, aby se souřadnými osami vytvořila trojúhelník o obsahu $P = 3$ a procházela bodem $A = [4, -3]$.

Řešení: Je-li

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

úseková rovnice přímky l , potom platí vztahy

$$2P = pq = 6, \quad \frac{4}{p} - \frac{3}{q} = 1.$$

Druhou rovnici upravíme na tvar $4q - 3p = pq$, vypočteme z ní $q = \frac{1}{4}(3p + 6)$ a dosadíme do první rovnice. Dostaneme kvadratickou rovnici

$$3p^2 + 6p - 24 = 0,$$

z níž plyne $p_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 8}$, a tedy $p_1 = -4$, $q_1 = -\frac{3}{2}$ nebo $p_2 = 2$, $q_2 = 3$. Úloze tedy vyhovují dvě přímky:

$$l_1: \frac{x}{-4} + \frac{y}{-\frac{3}{2}} = 1, \quad \text{tj.} \quad 3x + 8y + 12 = 0;$$

$$l_2: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1, \quad \text{tj.} \quad 3x + 2y - 6 = 0.$$

3. Určete průsečík M a odchylku přímek

$$a: 2x - y - 6 = 0, \quad b: x - y + 3 = 0.$$

Řešení: Souřadnice průsečíku M vyhovují soustavě dvou lineárních rovnic

$$2x - y - 6 = 0, \quad x - y + 3 = 0,$$

z níž plyne $x = 9$, $y = 12$, tj. $M = [9, 12]$.

Odchylku α daných přímek určíme pomocí vzorce (6.5). Protože směrnice k_a , k_b přímek a , b jsou $k_a = 2$, $k_b = 1$, dostaneme

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_a - k_b}{1 + k_a \cdot k_b} \right| = \left| \frac{2 - 1}{1 + 2 \cdot 1} \right| = \frac{1}{3},$$

a tedy $\alpha \doteq 18^\circ 26'$.

4. Napište rovnici přímky, která prochází bodem $A = [-4, 3]$ a má od počátku vzdálenost $v = 5$.

Řešení: Ze zadání úlohy plyne, že hledanou přímkou lze vyjádřit rovnicí tvaru (6.1). Odtud a ze vzorce (6.4) pro vzdálenost přímky od bodu plyne, že p , q musí splňovat rovnice

$$4k + 3 - q = 0, \quad 5 = \frac{|q|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Z první rovnice dosadíme do druhé $q = 4k + 3$ a po umocnění dostaneme kvadratickou rovnici $9k^2 - 24k + 16 = 0$, která má jediné řešení $k = \frac{4}{3}$. Tedy $q = \frac{16}{3} + 3 = \frac{25}{3}$.

Hledaná přímka má rovnici $y = \frac{1}{3}(4x + 25)$, neboli $4x - 3y + 25 = 0$.

Poznámka. Všimneme-li si, že vzdálenost bodu A od počátku je rovna 5, potom můžeme okamžitě usoudit, že hledaná přímka musí být kolmá na přímkou OA a musí mít tedy podle vzorce (6.5) směrnici $k = \frac{4}{3}$. Úsek q pak dostaneme dosazením souřadnic bodu A do rovnice $y = \frac{4}{3}x + q$.

5. Určete střed S a poloměr r kružnice

$$k: 2x^2 + 2y^2 - 4x + 12y = 10.$$

Řešení: Rovnici převedeme na tvar (6.6)

$$\begin{aligned} 2(x^2 - 2x) + 2(y^2 + 6y) &= 10 \\ (x^2 - 2x) + (y^2 + 6y) &= 5 \\ (x - 1)^2 + (y + 3)^2 - 1 - 9 &= 5 \\ (x - 1)^2 + (y + 3)^2 &= 15 \end{aligned}$$

Odtud $S = [1, -3]$, $r = \sqrt{15}$.

6. Určete rovnici kružnice k , která má střed v bodě $S = [1, 3]$ a dotýká se přímky p dané rovnicí $7x + y = 0$. Určete bod dotyku.

Řešení: Poloměr hledané kružnice je roven vzdálenosti bodu S od přímky p , takže podle vzorce (6.4) je

$$r = \frac{|7x_S + y_S|}{\sqrt{49 + 1}} = \frac{10}{\sqrt{50}} = \sqrt{2}.$$

Kružnice k má tedy rovnici $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 2$.

Bod dotyku T určíme třeba jako průsečík přímky p s přímkou l , která prochází bodem S a je kolmá na p . Ze vzorce (6.4) a podmínky kolmosti dvou přímek plyne, že přímka l má rovnici $y - 3 = \frac{1}{7}(x - 1)$, tj. po úpravě $x - 7y + 20 = 0$. Souřadnice bodu T tedy získáme řešením soustavy

$$x - 7y + 20 = 0, \quad 7x + y = 0.$$

Této soustavě vyhovují $x = -\frac{2}{5}$, $y = \frac{14}{5}$ a tedy $T = \left[-\frac{2}{5}, \frac{14}{5}\right]$.

Poznámka: Souřadnice bodu T bychom mohli získat též řešením nelineární soustavy rovnic:

$$y + 7x = 0, \quad (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 0.$$

7. Napište rovnice tečen kružnice $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 29 = 0$, které procházejí bodem $P = [-2, 5]$.

Řešení: Rovnici kružnice uvedeme na tvar (6.6); dostaneme rovnici

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 5$$

a tedy střed kružnice $S = [3, 5]$ a poloměr $r = \sqrt{5}$. Snadno je vidět, že žádná tečna t nemůže být rovnoběžná s osou y , a proto má rovnici tvaru $y = kx + q$. Protože vzdálenost středu S od tečny je rovna $r = \sqrt{5}$, z podmínky $P \in t$ a ze vzorce (6.4) plyne, že platí rovnice

$$2k + 5 - q = 0, \quad \sqrt{5} = \frac{|3k - 5 + q|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Z první rovnice dosadíme $q = 2k + 5$ do druhé rovnice a po umocnění a úpravě dostaneme rovnici $20k^2 = 5$, z níž plyne $k_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$, a tedy $q_1 = 6$, $q_2 = 4$. Úloha má tedy dvě řešení

$$\begin{aligned} t_1: y &= \frac{x}{2} + 6, & \text{tj. } x - 2y + 12 &= 0; \\ t_2: y &= -\frac{x}{2} + 4, & \text{tj. } x + 2y - 8 &= 0. \end{aligned}$$

Poznámka: Tuto úlohu jsme mohli řešit též tak, že bychom nejprve našli bod dotyku $T = [x_0, y_0]$, jehož souřadnice vyhovují soustavě rovnic

$$(x_0 - 3)^2 + (y_0 - 5)^2 = 5, \quad (-2 - 3)(x_0 - 3) + (5 - 5)(y_0 - 5) = 5.$$

(První rovnice vyjadřuje, že bod T je bodem dané kružnice, druhá, že bod P je bodem tečny kružnice.) Z druhé rovnice okamžitě plyne $x_0 - 3 = -1$, tj. $x_0 = 2$, což po dosazení do první rovnice dává rovnici $(y_0 - 5)^2 = 4$, z níž plyne $y_{01} = 7$, $y_{02} = 3$. Body $P = [-2, 5]$, $T_1 = [2, 7]$ určují podle (6.3) tečnu t_1 a body P , $T_2 = [2, 3]$ určují tečnu t_2 .

8. Určete střed S a poloosy a , b elipsy

$$2x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + \frac{1}{2} = 0.$$

Řešení: Rovnici převedeme na tvar (6.8):

$$\begin{aligned} 2(x^2 + x) + 4(y^2 - 3y) &= -\frac{1}{2}, & 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 &= 9, \\ \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{2}} + \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} &= 1. \end{aligned}$$

Výsledek: $S = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, $a = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{3}{2}$.

9. Napište rovnici elipsy se středem v počátku, která má jedno ohnisko v bodě $F_1 = [4, 0]$ a prochází bodem $M = [3, 1]$.

Řešení: Protože $e = |OF_1|$, je $e = 4$. Bod M je bodem elipsy, proto do rovnice (6.9) dosadíme souřadnice bodu M . Dále použijeme vztah $e^2 = a^2 - b^2$, kde $e = 4$; odtud $a^2 = 16 + b^2$ a dostaneme rovnici

$$\frac{9}{16 + b^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \quad \text{tj. po úpravě } b^4 + 6b^2 - 16 = 0.$$

Odtud $b^2 = 2$ (druhé řešení $b^2 = -8$ nevyhovuje) a $a^2 = 18$. Elipsa se zadanými vlastnostmi má tedy rovnici

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1 \iff x^2 + 9y^2 - 18 = 0.$$

10. Určete odchylku asymptot hyperboly

$$x^2 - 3y^2 - 2x - 6y - 38 = 0.$$

Řešení: Nejprve danou rovnici uvedeme na tvar (6.10):

$$(x-1)^2 - 3(y+1)^2 = 38 + 1 - 3 = 36, \quad \frac{(x-1)^2}{6^2} - \frac{(y+1)^2}{12} = 1,$$

$$a = 6, \quad b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Protože směrnice asymptot hyperboly jsou $\pm \frac{b}{a}$, jedna asymptota má směrnici $k_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ a druhá má směrnici $k_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Jejich odchylka α je podle vzorce (6.5) dána vztahem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{3},$$

a tedy $\alpha = 60^\circ$.

11. Najděte rovnici hyperboly procházející bodem $A = [12, 3\sqrt{3}]$, mají-li její asymptoty rovnice $y = \pm \frac{1}{2}x$.

Řešení: Protože střed hyperboly je totožný s průsečíkem jejích asymptot, hledaná hyperbola má střed v počátku a má tedy rovnici tvaru (6.11) a její asymptoty mají směrnici $\pm \frac{b}{a}$. Ze zadání úlohy proto plyne, že a, b splňují rovnice

$$\frac{12^2}{a^2} - \frac{(3\sqrt{3})^2}{b^2} = 1, \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{2}.$$

Z druhé rovnice dosadíme $a = 2b$ do první rovnice a postupně dostaneme:

$$\frac{144}{4b^2} - \frac{27}{b^2} = 1, \quad \frac{36}{b^2} - \frac{27}{b^2} = 1, \quad b^2 = 9.$$

Odtud $b = 3$ (je $b > 0$) a $a = 6$.

Hledaná hyperbola má tedy rovnici $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$.

12. Hyperbola má střed $S = [-15, 0]$, jedno ohnisko v počátku a na ose y vytíná tětivu délky 32. Najděte rovnici přímky, na níž leží tětiva.

Řešení: Protože střed a jedno ohnisko hyperboly leží na ose x , jednou osou hyperboly je osa x a druhá osa je rovnoběžná s osou y . Odtud plyne, že hyperbola má rovnici tvaru

$$\frac{(x+15)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a že tětiva, kterou hyperbola vytíná na ose y , je kolmá k ose x a je půlena ohniskem ležícím v počátku soustavy souřadnic. Hyperbola proto prochází bodem $A = [0, 16]$, což znamená, že musí platit rovnice

$$\frac{(0+15)^2}{a^2} - \frac{16^2}{b^2} = 1, \quad \text{tj.} \quad \frac{225}{a^2} - \frac{256}{b^2} = 1.$$

Protože z polohy ohniska a středu plyne pro excentricitu $e = 15$, musí platit rovnice $15^2 = a^2 + b^2$. Zbývá tedy vyřešit soustavu rovnic

$$a^2 + b^2 = 225, \quad \frac{225}{a^2} - \frac{256}{b^2} = 1.$$

Dosadíme-li z první z těchto rovnic $b^2 = 225 - a^2$ do druhé rovnice, dostaneme postupně

$$\frac{225}{a^2} - \frac{256}{225 - a^2} = 1, \quad a^4 - 706a^2 + 225^2 = 0,$$

$$a^2 = 353 \pm \sqrt{353^2 - 225^2} = 378 \pm 272.$$

Odtud plyne $a^2 = 81$, neboť musí být $b^2 = 225 - a^2 > 0$, a dále $b^2 = 144$.

Hledaná rovnice je $\frac{(x+15)^2}{81} - \frac{y^2}{144} = 1$.

13. Určete souřadnice vrcholu, parametr, souřadnice ohniska, osu a řídicí přímku paraboly

$$y^2 - 4y + 2x - 8 = 0.$$

Řešení: Rovnici převedeme na tvar (6.12):

$$(y-2)^2 = -2(x-6).$$

Odtud ihned plyne: vrchol paraboly $V = [6, 2]$, parametr $p = 1$, ohnisko $F = [\frac{11}{2}, 2]$. Dále odtud vyplývá, že osou paraboly je přímka $y = 2$ a řídicí přímka $x = 6, 5$. Konečně odtud plyne, že osu x parabola protíná v bodě $[4, 0]$ a osu y v bodech $[0, 2 \pm 2\sqrt{3}]$.

14. Určete q tak, aby přímka $y = 4x + q$ byla tečnou paraboly

$$y = -x^2 - 2x + 3.$$

Určete bod dotyku.

Řešení: Souřadnice bodu dotyku vyhovují rovnici přímky i rovnici paraboly, tj. rovnicím

$$y = 4x + q, \quad y = -x^2 - 2x + 3,$$

z nichž vyloučením y dostaneme rovnici

$$4x + q = -x^2 - 2x + 3, \quad \text{tj.} \quad x^2 + 6x + q - 3 = 0.$$

Protože přímka $y = 4x + q$ má být tečnou, tato kvadratická rovnice musí mít jediné řešení, tj. její diskriminant $D = 6^2 - 4 \cdot (q - 3)$ musí být nulový. Musí tedy být $q = 12$. Je-li tato podmínka splněna, kvadratická rovnice má řešení $x = -3$, jemuž přísluší $y = 0$. Přímka $y = 4x + 12$ se tedy dotýká paraboly v bodě $T = [-3, 0]$.

15. Určete vzdálenost d dvou rovnoběžek t , p , kde t je tečna paraboly $y^2 = 64x$ a p má rovnici $4x + 3y + 46 = 0$.

Řešení: Přímka p má směrnici $k_p = -\frac{4}{3}$ a tedy tečna s ní rovnoběžná má rovnici $y = -\frac{4}{3}x + q$.

Úsek q určíme stejným postupem jako v předešlém příkladě; dostaneme $q = -12$, takže tečna má rovnici $4x + 3y + 36 = 0$. Vzdálenost d tečny a přímky p určíme jako vzdálenost libovolně zvoleného bodu X tečny od přímky p ; můžeme např. zvolit $X = [-9, 0]$ a podle vzorce (6.4) dostaneme

$$d = \frac{|-4 \cdot 9 + 3 \cdot 0 + 46|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2.$$

6.11. Neřešené příklady.

1. Je dán trojúhelník $\triangle ABC$ s vrcholy $A = [4, 6]$, $B = [-4, 0]$, $C = [-1, -4]$.

- Najděte rovnice všech jeho stran. $[3x - 4y + 12 = 0; 4x + 3y + 16 = 0; 2x - y - 2 = 0]$
 - Najděte rovnici těžnice jdoucí vrcholem C . $[7x - y + 3 = 0]$
 - Najděte rovnici výšky spuštěné z vrcholu A . $[3x - 4y + 12 = 0]$
2. Určete odchylku přímek $5x - y + 7 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$. $\left[\frac{\pi}{4}\right]$
 3. Určete rovnici přímky, která prochází bodem $A = [-5, 2]$ a je kolmá na přímkou $4x - y + 3 = 0$. $[x + 4y - 3 = 0]$
 4. Určete souřadnice středu S a poloměr r kružnice dané rovnicí $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$. $[S = [3; -2], r = 5]$
 5. Napište rovnici kružnice, která prochází bodem $K = [3, 0]$ a dotýká se přímky $y = 2x$ v bodě $T = [1, 2]$. $\left[\left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{20}{9}\right]$
 6. Určete rovnici tečny kružnice $x^2 + y^2 = 65$, která je kolmá k přímce $3x - 2y + 9 = 0$. $[2x + 3y \pm 13\sqrt{5} = 0]$
 7. Určete středovou rovnici elipsy, která prochází bodem $A = [4; 2\sqrt{2}]$, má ohnisko $F = [4; 0]$ a střed $S = [0; 0]$. $\left[\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1\right]$
 8. Je dána elipsa $4x^2 + 25y^2 - 24x - 100y + 36 = 0$. Určete souřadnice jejího středu, délky poloos a excentricitu. $[S = [3, 2]; a = 5, b = 2; e = \sqrt{21}]$
 9. Určete průsečíky elipsy $x^2 + 4y^2 + 8x - 8y + 4 = 0$ s přímkou $3x - 2y + 2 = 0$. $\left[P_1 = [0, 1], P_2 = \left[-\frac{4}{5}, \frac{-1}{5}\right]\right]$
 10. Určete střed, ohniska, délky poloos a rovnice asymptot hyperboly $x^2 - 4y^2 + 6x + 5 = 0$. $[S = [-3, 0]; a = 2, b = 1; F_{1,2} = [-3 \pm \sqrt{5}, 0]; x \pm 2y + 3 = 0]$
 11. Napište rovnici tečny paraboly $y^2 + 3x + 4y - 8 = 0$ rovnoběžné s přímkou $x + 4y - 4 = 0$. $[x + 4y - 8 = 0]$