7. Komplexní čísla

7.1. Komplexní číslo je uspořádaná dvojice reálných čísel. Komplexní číslo $a = (a_1, a_2)$ zpravidla zapisujeme v tzv. **algebraickém tvaru** $a = a_1 + ia_2$, kde i je **imaginární jednotka**, pro kterou platí $i^2 = -1$. Číslo a_1 se nazývá **reálná část** komplexního čísla a a značí se $\operatorname{Re} a$, číslo a_2 se nazývá **imaginární část** komplexního čísla a a značí se $\operatorname{Im} a$. Množinu všech komplexních čísel značíme $\mathbf{C}$.
Z algebraického tvaru komplexního čísla je zřejmé, že reálná čísla jsou speciálním případem čísel komplexních: reálné číslo a ztotožňujeme s komplexním číslem $a + i0$, tj. s komplexním číslem $(a, 0)$. Komplexní číslo, jehož imaginární část je různá od nuly, se nazývá **imaginární** a imaginární číslo tvaru $(0, a)$, kde $a \neq 0$, se nazývá **ryze imaginární**.

7.2. Operace s komplexními čísly. Dvě komplexní čísla jsou si rovna, jsou-li si rovna jako uspořádané dvojice:

$$\boxed{a_1 + ia_2 = b_1 + ib_2 \Longleftrightarrow a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2}$$

V množině $\mathbf{C}$ jsou definovány tytéž algebraické operace jako v množině $\mathbf{R}$, navíc je pak pro každé komplexní číslo definováno číslo komplexně sdružené. Pro libovolná komplexní čísla $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ jsou tyto operace definovány takto:

- **Součet:**

$$\boxed{a + b = (a_1 + ia_2) + (b_1 + ib_2) = (a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2)}$$

- **Rozdíl:**

$$\boxed{a - b = (a_1 + ia_2) - (b_1 + ib_2) = (a_1 - b_1) + i(a_2 - b_2)}$$

- **Součin:**

$$\boxed{a \cdot b = (a_1 + ia_2) \cdot (b_1 + ib_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)}$$

  Komplexní čísla tedy násobíme jako dvojčleny s tím, že použijeme vztah $i^2 = -1$.

- **Podíl (pro $b \neq 0$):**

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{a_1 + ia_2}{b_1 + ib_2} &= \frac{(a_1 + ia_2)(b_1 - ib_2)}{b_1^2 + b_2^2} \\ &= \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{b_1^2 + b_2^2} \end{aligned}}$$

- **Komplexně sdružené číslo:**

$$\boxed{\overline{a} = \overline{a_1 + ia_2} = a_1 - ia_2}$$

- **Absolutní hodnota (modul):**

$$\boxed{|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{a \cdot \overline{a}}}$$

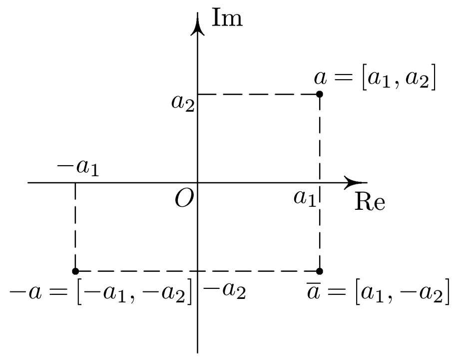
  Absolutní hodnota komplexního čísla je tedy nezáporné reálné číslo a $|a| = 0$ právě když $a = 0$.

Pro sčítání a násobení komplexních čísel platí stejný komutativní, asociativní a distributivní zákon jako pro sčítání a násobení reálných čísel. Stejné vlastnosti má i absolutní hodnota. Pro komplexně sdružené číslo platí vztahy:

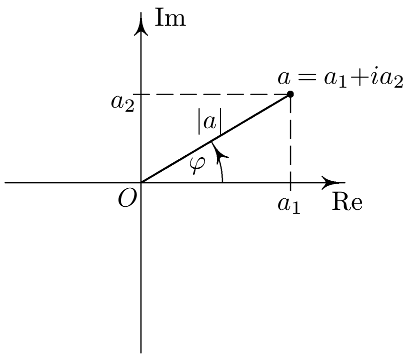
$$\boxed{\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}\,, \quad \overline{ab} = \overline{a} \cdot \overline{b}\,, \quad \overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}}$$

Poznámka. Na rozdíl od reálných čísel **komplexní čísla** nejsou uspořádaná a ani je **nelze rozumně uspořádat**, tj. nelze je uspořádat tak, aby se toto uspořádání (vztah nerovnosti) chovalo rozumně vzhledem ke sčítání a násobení.

7.3. Grafické znázornění komplexních čísel. Gaussova rovina. Z definice komplexního čísla plyne, že komplexní číslo $a = a_1 + ia_2$ můžeme graficky znázornit jako bod $[a_1, a_2]$ roviny. Tím je dáno vzájemně jednoznačné zobrazení množiny všech komplexních čísel na množinu všech bodů roviny. **Gaussova rovina** je rovina, v níž takto zobrazujeme komplexní čísla. Reálná čísla se přitom zobrazují na vodorovnou osu a ryze imaginární na svislou. Osa, na niž se zobrazují reálná čísla, se nazývá **reálná osa** a osa, na niž se zobrazují ryze imaginární čísla, se nazývá **imaginární osa**. Je zřejmé, že body přiřazené číslům a, $-a$ jsou symetrické podle počátku (souřadné soustavy) a body a, $\overline{a}$ jsou symetrické podle reálné osy (viz obr. 7.1).



Obr. 7.1



Obr. 7.2

7.4. Goniometrický a exponenciální tvar komplexního čísla. Je-li $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$, pak

$$\boxed{a = |a|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi),}$$

kde φ (viz obr. 7.2) je velikost orientovaného úhlu, který svírá průvodič bodu a s polopřímkou kladných reálných čísel. Uvedené vyjádření čísla a se nazývá **goniometrický tvar**.

Položíme-li

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

potom a můžeme zapsat ve tvaru

$$\boxed{a = |a|\,e^{i\varphi}}$$

Toto vyjádření se nazývá **exponenciální tvar** čísla a.

7.5. Argument komplexního čísla. Číslo φ z 7.4 se nazývá **argument** komplexního čísla a. Množinu všech argumentů čísla a označujeme $\arg a$.

Platí

$$\varphi \in \arg a,\ \psi \in \mathbf{R} \Longrightarrow\ (\psi \in \arg a \Longleftrightarrow \psi = \varphi + 2k\pi\ ,\ \text{kde}\ \ k \in \mathbf{Z})\ ,$$

tj. argument komplexního čísla je určen jednoznačně až na celistvý násobek 2π. Odtud plyne, že množina $\arg a$ obsahuje jedinou hodnotu φ s vlastností $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$; toto φ nazýváme **hlavní hodnotou argumentu** a značíme $\operatorname{Arg} a$. Je pak

$$\boxed{\arg a = \{\psi;\ \psi = \operatorname{Arg} a + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}}$$

Poznámka: V definici hlavní hodnoty argumentu nepanuje všeobecná shoda, a tak místo v intervalu $(-\pi, \pi\rangle$ se $\operatorname{Arg} a$ někdy bere v intervalu $\langle 0, 2\pi)$.

Určení argumentu. Je-li $a = a_1 + ia_2 = |a|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi), a \neq 0$, pak

$$\cos\varphi = \frac{a_1}{|a|}\,, \quad \sin\varphi = \frac{a_2}{|a|}\,.$$

7.6. Násobení a dělení komplexních čísel v exponenciálním tvaru. Pro násobení a dělení komplexních čísel v exponenciálním tvaru platí formule

$$\boxed{a = |a|\,e^{i\varphi},\ b = |b|\,e^{i\psi} \Longrightarrow \begin{cases} a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot e^{i(\varphi+\psi)} \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{|a|}{|b|}\,e^{i(\varphi-\psi)}, b \neq 0 \end{cases}}$$

Z uvedených vzorců je patrný tento geometrický význam násobení komplexních čísel: geometrické zobrazení, které odpovídá násobení komplexním číslem a, je stejnolehlost se středem v počátku a koeficientem $|a|$ složená s otočením o úhel $\operatorname{Arg} a$. Analogickou geometrickou interpretaci má dělení.

7.7. Umocňování a odmocňování komplexních čísel. Ze vzorců pro násobení a dělení komplexních čísel v exponenciálním tvaru ihned plyne

Moivreova věta. Pro každé $\varphi \in \mathbf{R}$ a každé $n \in \mathbf{Z}$ platí:

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \quad \text{tj.} \quad (e^{i\varphi})^n = e^{i\varphi n}}$$

Obecněji z 7.6 plyne vzorec pro celočíselnou mocninu komplexního čísla:

$$\boxed{0 \neq a = |a| \cdot e^{i\varphi}\ ,\ n \in \mathbf{Z} \Longrightarrow a^n = |a|^n \cdot e^{i\varphi n}}$$

Je-li n přirozené číslo, pak n**-tá odmocnina** $\sqrt[n]{a}$ z komplexního čísla a je komplexní číslo z definované vztahem

$$\boxed{z = \sqrt[n]{a} \Longleftrightarrow z^n = a}$$

Je-li $a \neq 0$, existuje právě n různých hodnot odmocniny $\sqrt[n]{a}$ a tyto hodnoty jsou dány vzorcem

$$\boxed{\begin{aligned} & a = |a| \cdot e^{i\varphi} \Longrightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i(\varphi+2k\pi)/n} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\,, \\ & k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n-1 \end{aligned}}$$

Zřejmě je $\sqrt[n]{0} = 0$.

Grafické znázornění n**-té odmocniny.** Ze vzorce pro n-tou odmocninu plyne, že

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\varphi/n} \cdot \sqrt[n]{1}\,,$$

kde

$$\sqrt[n]{1} = e^{i\cdot 2k\pi/n}\,,\ k = 0,\,1,\ldots,n-1.$$

Čísla $\sqrt[n]{1}$ tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka vepsaného do kružnice se středem v počátku a poloměrem 1, s jedním vrcholem v bodě $[1,0]$. Čísla $\sqrt[n]{a}$ tedy tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka, který dostaneme z předchozího otočením o úhel $\dfrac{\varphi}{n}$ a stejnolehlostí se středem v počátku s koeficientem $\sqrt[n]{|a|}$.

7.8. Řešené příklady

1. V exponenciálním tvaru vyjádřete komplexní čísla:

$$\text{a)}\ a = 1+i\,, \qquad \text{b)}\ b = -1 + i\sqrt{3}\,.$$

Řešení: Použijeme vzorce z odstavců 7.2, 7.4 a 7.5:

$$\text{a)}\ \ |a| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\,,\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ \text{tedy}\ \ \varphi = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow a = \sqrt{2}e^{i\pi/4}\,.$$

$$\text{b)}\ \ |b| = \sqrt{1+3} = 2\,,\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\varphi = \frac{-1}{2}\,,\ \text{tedy}\ \ \varphi = \frac{2}{3}\pi \Longrightarrow b = 2e^{i\cdot 2\pi/3}\,.$$

2. V algebraickém tvaru vyjádřete komplexní čísla:

$$\text{a)}\ a = 2e^{i\pi/4}\,, \qquad \text{b)}\ b = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Řešení: V případě a) nejprve převedeme exponenciální tvar na goniometrický, další postup je v obou případech stejný a zřejmý:

$$\text{a)}\ \ a = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}\,.$$

$$\text{b)}\ \ a = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} + 2i\,.$$

3. Určete, za jakých podmínek je součet dvou komplexních čísel a) číslo reálné, b) číslo ryze imaginární.

Řešení: Jsou-li $a = a_1 + ia_2, b = b_1 + ib_2$ dvě komplexní čísla, potom pro jejich součet $c = c_1 + ic_2$ podle 7.2 platí $c_1 + ic_2 = (a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2)$. Odtud plyne:

a) Číslo c je reálné, právě když $a_2 + b_2 = 0$, tj. $b_2 = -a_2$.

b) Číslo c je ryze imaginární, právě když $a_1 + b_1 = 0$, tj. $b_1 = -a_1$.

4. Nechť $a = 1-2i, b = 3+7i$. Vypočtěte $a+b$, $a-b$, $a\cdot b$, $\dfrac{a}{b}$.

Řešení: Podle vztahů z odstavce 7.2 je:

$$\begin{aligned}
a+b &= (1+3) + i(-2+7) = 4+5i\\
a-b &= (1-3) + i(-2-7) = -2-9i\\
a\cdot b &= (1-i2)(3+i7) = (3+14) + i(-6+7) = 17+i\\
\frac{a}{b} &= \frac{1-2i}{3+7i} = \frac{(1-2i)(3-7i)}{3^2-(7i)^2} = \frac{3-13i+14i^2}{58} = \frac{-11}{58} - \frac{13}{58}i\,.
\end{aligned}$$

5. Určete absolutní hodnotu (modul) komplexního čísla $a = \dfrac{3-2i}{1+2i}$.

Řešení: Podle vztahu z 7.2 pro dělení komplexních čísel

$$a = \frac{3-2i}{1+2i} = \frac{(3-2i)(1-2i)}{1+4} = \frac{3-8i+4i^2}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{8}{5}i.$$

Podle definice absolutní hodnoty komplexního čísla (viz 7.2) je

$$|a| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{64}{25}} = \frac{\sqrt{65}}{5}\,.$$

6. V goniometrickém tvaru vyjádřete komplexní číslo:

$$\text{a) } z = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{-1+i}\,,$$
$$\text{b) } z = \frac{a+ib}{(a+b)+(b-a)i}\,, \quad ab \neq 0,\ a, b \in \mathbf{R}.$$

Řešení: V obou případech nejprve číslo z vyjádříme v algebraickém tvaru a potom použijeme vztahy z 7.2 a 7.5:

a)

$$z = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{-1+i} = \frac{-1+i+1+i}{-2} = \frac{2i}{-2} = -i$$
$$|-i| = \sqrt{0+1} = 1,\ \ \varphi = \frac{3}{2}\pi,$$

tedy

$$z = 1 \cdot e^{i \cdot 3\pi/2} = \cos\frac{3}{2}\pi + i \sin\frac{3}{2}\pi.$$

b)

$$\begin{aligned} z &= \frac{a+ib}{(a+b)+(b-a)i} = \frac{(a+ib)\cdot[(a+b)+(a-b)i]}{(a+b)^2+(b-a)^2} \\ &= \frac{a^2+ab+b^2-ab+i(ab+b^2+a^2-ab)}{2(a^2+b^2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

$$\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,, \quad \varphi = \frac{\pi}{4},$$

tedy

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)\,.$$

7. Vynásobte komplexní čísla

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\,, \quad b = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)\,.$$

Výsledek napište v algebraickém tvaru.

Řešení: Obě čísla převedeme do exponenciálního tvaru, pak je s použitím vzorce pro součin z 7.6 vynásobíme a výsledek postupně převedeme do goniometrického a algebraického tvaru:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4}, \quad b = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/2},$$

$$a \cdot b = \frac{1}{\sqrt{2}} 2\sqrt{2} e^{i\pi/4} e^{-i\pi/2} = 2e^{i(\pi/4-\pi/2)} = 2e^{-i\pi/4},$$

$$a \cdot b = 2e^{-i\pi/4} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}\,.$$

8. Vyjádřete v algebraickém tvaru podíl $\dfrac{a}{b}$ komplexních čísel

$$a = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad b = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Řešení: Postupujeme stejně jako v předcházejícím příkladu, tj. vyjádříme daná čísla v exponenciálním tvaru, potom použijeme vzorec pro podíl z 7.6 a výsledek upravíme do goniometrického a algebraického tvaru:

$$a = 4e^{-i\pi/4}\,, \; b = 2e^{i\cdot 3\pi/4},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{4e^{-i\pi/4}}{2e^{i\cdot 3\pi/4}} = 2e^{i(-\pi/4-3\pi/4)} = 2e^{-i\pi} = 2(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)) = 2(-1+i.0) = -2\,.$$

9. Vypočtěte i^{35}, i^5, i^{42}, i^{36}.

Řešení: Při výpočtu využijeme operace násobení komplexních čísel a skutečnosti, že $i^2 = -1$, $i^4 = 1$:

$$i^{35} = i^{32} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = i^2 \cdot i = -i\,, \qquad i^{42} = i^{40} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1,$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i\,, \qquad i^{36} = 1\,.$$

10. Vypočtěte $(2-i)^4$.

Řešení: Komplexní číslo je v algebraickém tvaru, jeho mocninu vypočteme pomocí binomické věty z odst. 5.11:

$$(2-i)^4 = \sum_{\ell=0}^{4} \binom{4}{\ell} 2^{4-\ell}(-i)^\ell = 2^4 - \binom{4}{1}2^3 i + \binom{4}{2}2^2 i^2 - \binom{4}{3}2i^3 + i^4 =$$
$$= 16 - 4\cdot 8i + 6\cdot 4(-1) - 4\cdot 2(-i) + 1 = -7 - 24i\,.$$

11. Vypočtěte z^6, je-li $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Řešení: Přejdeme k exponenciálnímu tvaru $z = 2e^{-i\pi/4}$ a použijeme Moivreovu větu:

$$z^6 = \left(2e^{-i\pi/4}\right)^6 = 2^6 e^{-i\cdot 6\pi/4} = 64e^{-i\cdot 3\pi/2} = 64\left(\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)\right) = 64i\,.$$

12. Vypočtěte $(1-i)^8$.

Řešení: Číslo $1-i$ převedeme na exponenciální tvar podle 7.4 a 7.5 a potom použijeme Moivreovu větu:

$$|1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \; \sin\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \varphi = -\frac{1}{4}\pi\,, \; 1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4},$$

$$(1-i)^8 = \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^8 = (\sqrt{2})^8 e^{-i\cdot 8\pi/4} = 16e^{-2\pi i} = 16\,.$$

13. Určete $\sqrt[3]{z}$, je-li: a) $z = 27e^{i\cdot 2\pi/3}$, b) $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Řešení: a) Výpočet provedeme postupem popsaným v odst. 7.7:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{27}e^{i(2\pi/3+2k\pi/3)} = 3e^{i(2\pi/9+2k\pi/3)}, \; k = 0,\, 1,\, 2.$$

Tedy:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{z} &= 3e^{i\cdot 2\pi/9} \text{ pro } k = 0,\\ \sqrt[3]{z} &= 3e^{i\cdot 8\pi/9} \text{ pro } k = 1,\\ \sqrt[3]{z} &= 3e^{i\cdot 14\pi/9} \text{ pro } k = 2. \end{aligned}$$

b) Dané komplexní číslo nejprve převedeme na exponenciální tvar, viz odst. 7.4 a 7.5, a potom opět použijeme postup popsaný v odst. 7.7:

$$z = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}, \quad \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2}e^{i(-\pi/9+2k\pi/3)}, \; k = 0,\, 1,\, 2.$$

Tedy:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{z} &= \sqrt[3]{2}e^{-i\pi/9} \text{ pro } k = 0,\\ \sqrt[3]{z} &= \sqrt[3]{2}e^{i\cdot 5\pi/9} \text{ pro } k = 1,\\ \sqrt[3]{z} &= \sqrt[3]{2}e^{i\cdot 11\pi/9} \text{ pro } k = 2. \end{aligned}$$

14. Vypočtěte $\sqrt[4]{1}$.

Řešení:

$$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{e^{i\cdot 0}} = e^{i\cdot k\pi/2}, \; k = 0,\, 1,\, 2,\, 3.$$

Tedy:

$$\sqrt[4]{1} = \begin{cases} e^{i\cdot 0\cdot\pi} = 1 & \text{pro } k = 0,\\ e^{i\pi/2} = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} = i & \text{pro } k = 1,\\ e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 & \text{pro } k = 2,\\ e^{i\cdot 3\pi/2} = \cos\dfrac{3}{2}\pi + i\sin\dfrac{3}{2}\pi = -i & \text{pro } k = 3. \end{cases}$$

Body komplexní roviny odpovídající těmto čtyřem hodnotám jsou podle 7.7 vrcholy čtverce vepsaného do kružnice se středem v počátku a poloměrem 1, přičemž jedním vrcholem je bod $[1, 0]$.

15. Určete $\sqrt{-8-6i}$ bez převodu na exponenciální (goniometrický) tvar.

Řešení: Odmocninu hledáme ve tvaru $x + iy$, tj. řešíme rovnici $\sqrt{-8-6i} = x + iy$. Umocněním této rovnice a porovnáním reálných a imaginárních částí levé a pravé strany takto získané rovnice dostaneme soustavu rovnic

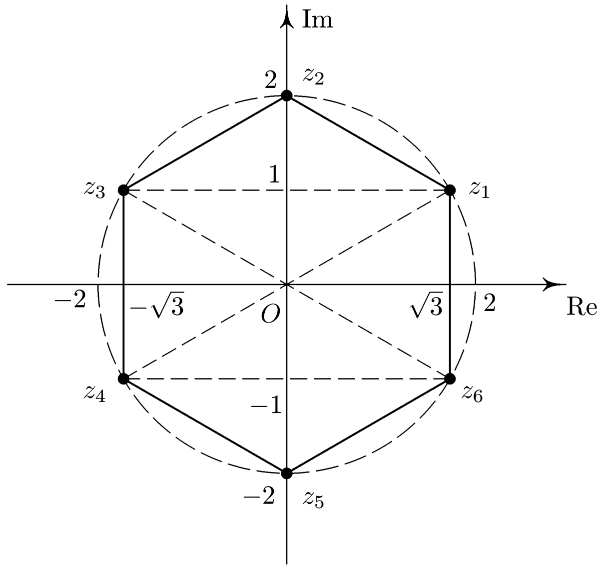
$$x^2 - y^2 = -8, \quad 2xy = -6.$$

Za předpokladu $x \neq 0$ vyjádříme z druhé rovnice $y = -\dfrac{3}{x}$, dosadíme do první rovnice a dostaneme bikvadratickou rovnici

$$x^4 + 8x^2 - 9 = 0.$$

Protože rovnice $w^2 + 8w - 9 = 0$ má kořeny $w_1 = 1$, $w_2 = -9$, reálnými kořeny této rovnice jsou čísla $x_1 = 1, x_2 = -1$. Těmto hodnotám odpovídají hodnoty $y_1 = -3$, $y_2 = 3$. Rovnici $\sqrt{-8-6i} = x + iy$ tedy vyhovují komplexní čísla $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = -1 + 3i$.

16. Řešte binomickou rovnici $z^6 = -64$. Kořeny vyjádřete v algebraickém tvaru a graficky znázorněte v Gaussově rovině.



Obr. 7.3

Řešení: Postupujeme stejně jako v příkladech 13 a 14:

$$z^6 = -64 \Longleftrightarrow z = \sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64e^{i\pi}} = 2e^{i(\pi/6 + k\pi/3)}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Dostáváme tedy šest různých hodnot:

$$\begin{aligned}
k = 0: &\quad z_1 = 2e^{i\pi/6} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i,\\
k = 1: &\quad z_2 = 2e^{i\pi/2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,\\
k = 2: &\quad z_3 = 2e^{i\cdot 5\pi/6} = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) = -\sqrt{3} + i,\\
k = 3: &\quad z_4 = 2e^{i\cdot 7\pi/6} = 2\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right) = -\sqrt{3} - i,\\
k = 4: &\quad z_5 = 2e^{i\cdot 3\pi/2} = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right) = -2i,\\
k = 5: &\quad z_6 = 2e^{i\cdot 11\pi/6} = 2\left(\cos\frac{11}{6} + i\sin\frac{11}{6}\pi\right) = \sqrt{3} - i\,.
\end{aligned}$$

Kořeny z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 rovnice $z^6 = -64$ (přesněji řečeno, jejich obrazy v Gaussově rovině) tvoří vrcholy pravidelného šestiúhelníka vepsaného do kružnice se středem v počátku a poloměrem 2, jehož jeden vrchol je bod $[\sqrt{3}, 1]$ (viz obr. 7.3).

7.9. Neřešené příklady

1. Určete exponenciální tvar komplexního čísla:

a) -5; b) $-2i$; c) $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. $\left[5e^{i\pi};\ 2e^{-i\pi/2};\ e^{i\cdot 4\pi/3}\right]$

2. Určete algebraický tvar komplexního čísla:

   a) $\frac{5}{2}e^{i\cdot 3\pi/2}$; b) $e^{i\pi/3}$; c) $4e^{i\pi}$. $\left[-\dfrac{5}{2}i;\ \dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ -4\right]$

3. Vypočtěte: i^{35}; i^5; i^2; i^{42}; i^{36}. $[-i; i; -1; -1; 1]$

4. Vypočtěte:

   a) $(1+i)(2+i)+(1+i)(1+2i)$; b) $\dfrac{1+i}{1+2i}$. $\left[6i;\ \dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}i\right]$

5. Vypočtěte součin čísel $z_1 = 2e^{i\pi/6}$ a $z_2 = 3e^{i\cdot 3\pi/4}$. $\left[6\cdot e^{i\cdot 11\pi/12}\right]$

6. Vypočtěte podíl $\dfrac{z_1}{z_2}$, je-li $z_1 = 4e^{i\pi}$, $z_2 = 2e^{i\pi/6}$. $\left[2e^{i\cdot 5\pi/6}\right]$

7. Pomocí binomické věty vypočtěte: $(\sqrt{2}+i\sqrt{3})^5$. $[-11\sqrt{2}-31\sqrt{3}i]$

8. Pomocí Moivreovy věty vypočtěte: $(1+i)^4$. $[-4]$

9. Vypočtěte:

   a) $\sqrt[3]{-1-i}$; $\left[\sqrt[6]{2}e^{i(5\pi/12+2k\pi/3)}\ ,\ k=0\,,1,\,2,\,3,\,4,\,5\right]$

   b) $\sqrt[6]{-1}$. $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pm\dfrac{i}{2}\,,\ \pm i\,,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pm\dfrac{i}{2}\right]$

10. Řešte binomickou rovnici:

    a) $z^4 = 16$; $\left[z_k = 2e^{i\cdot k\pi/2}\ ,\ k=0\,,1,\,2,\,3\right]$

    b) $z^6 = 1-i$. $\left[z_k = \sqrt[12]{2}e^{i(-\pi/24+k\pi/3)}\ ,\ k=0\,,1,\,2,\,3,\,4,\,5\right]$