Matematická teorie koaličních her

Tomáš Kroupa

Teorie koaličních her

J. von Neumann, O. Morgenstern
Theory of Games and Economic Behavior
Princeton University Press, 1944

Koaliční hra modeluje všechny možné výsledky kooperace v prostředí mnoha hráčů:

- X množina hráčů
- $\mathcal{B}$ systém podmnožin množiny X (koalice)
- v množinová funkce $\mathcal{B} \to \mathbb{R}$ (výplatní funkce)

Řešení koaliční hry lze hledat v podobě očekávaných výplat $\varphi[v]$ rozdělených mezi hráči či jejich skupiny.

Motivační příklady

Příklad (1)

- *Hráč* 1 *(podnikatel) poskytne počáteční investici do výroby.*
- *Každý z ostatních hráčů* $2, \ldots, 11$ *(zaměstnanci) přispívá produktem v hodnotě* 10 000 *k celkovému produktu.*

Koaliční hra

$X = \{1, \ldots, 11\}$, $\mathcal{B} = 2^X$

$$v_1(A) = \begin{cases} 0, & 1 \notin A, \\ 10\,000(|A| - 1), & 1 \in A. \end{cases}$$

Jaké je očekávané rozdělení výplat $\varphi[v_1]$*?*

Motivační příklady (pokr.)

Příklad (2)

- *Firma má 4 akcionáře s podíly* $(10, 30, 30, 40)$.
- *Rozhodnutí akcionářů je schváleno, pokud je odsouhlaseno prostou většinou podílů.*

Koaliční hra

$X = \{1, \dots, 4\}$, $\mathcal{B} = 2^X$

$$v_2(A) = \begin{cases} 1, & \{2,3\} \subseteq A \text{ nebo } \{3,4\} \subseteq A \text{ nebo } \{2,4\} \subseteq A, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jaká je „hlasovací síla" $\varphi[v_2]$ *jednotlivých akcionářů?*

Standardní předpoklady

Studium neatomických her (Aumann, Shapley; 1974):

X	je separabilní úplný metrický prostor
$\mathcal{B}$	je σ-algebra Borelovských podmnožin X
v	je hra, tj. $v : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ a splňuje $v(\emptyset) = 0$

Věta

Množina hráčů X je Borelovsky izomorfní $[0, 1]$.

$\mathcal{G}$	grupa automorfismů X
$\theta_* v$	pro hru v a $\theta \in \mathcal{G}$ klademe $\theta_* v(A) = v(\theta A),\ A \in \mathcal{B}$
FA	lineární prostor konečně-aditivních měr $\mathcal{B} \to \mathbb{R}$

Řešení koaliční hry jako hodnota hry

Definice

Nechť Q je symetrický lineární prostor her (tj. $\theta_* Q = Q$ pro každé $\theta \in \mathcal{G}$). Hodnota na Q je lineární zobrazení

$$\varphi : Q \longrightarrow FA : v \mapsto \varphi[v],$$

které je pozitivní (tj. $\varphi[v]$ je monotónní pro monotónní hru $v \in Q$) a pro každou hru $v \in Q$ platí

$$\varphi[v](X) = v(X)$$

a symetrie

$$\varphi[\theta_* v] = \theta_* \varphi[v], \quad \text{pro každé } \theta \in \mathcal{G}.$$

Hodnota her s konečným nosičem

Nosič hry v je množina $C \subseteq X$ taková, že $v(A \cap C) = v(A)$ pro každé $A \in \mathcal{B}$

Věta

LP her s konečným nosičem C má bázi

$$\{w_S \mid w_S \text{ je char. funkce filtru generovaného } \emptyset \neq S \subseteq C\}$$

Věta

Na LP her s konečným nosičem C existuje právě jedna hodnota φ a pro hru w_S z báze platí

$$\varphi[w_S](\{x\}) = \begin{cases} \frac{1}{|S|}, & x \in S, \\ 0, & x \notin S. \end{cases}$$

Hodnota her s konečným nosičem (pokr.)

Shapleyho hodnota (Shapley; 1953):

$$\boxed{\varphi[v](\{x\}) = \sum_{A\subseteq C: x\in A} \frac{(|A|-1)!(|C|-|A|)!}{|C|!}\Big(v(A) - v(A\backslash\{x\})\Big)}$$

Příklad (1)

Hráč 1 (investor) může zablokovat výrobu:

$$\varphi[v_1](\{1\}) = 50\,000, \quad \varphi[v_1](\{i\}) = 5\,000,\ i = 2,\dots,11$$

Příklad (2)

Hráč 1 není užitečný v žádné koalici:

$$\varphi[v_2](\{1\}) = 0, \quad \varphi[v_2](\{i\}) = \tfrac{1}{3},\ i = 2,3,4$$

Hodnota her s konečným nosičem (pokr.)

Definice

Nechť v je hra s konečným nosičem $C = \{1, \dots, n\}$. Multilineární rozšíření hry v je funkce $\hat{v} : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ definovaná jako

$$\hat{v}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{A \subseteq C} v(A) \Big(\prod_{i \in A} x_i \prod_{j \notin A} (1 - x_j) \Big).$$

Věta (Diagonální vyjádření Shapleyho hodnoty)

Pro každou hru v s konečným nosičem $C = \{1, \dots, n\}$ platí

$$\boxed{\varphi[v](\{i\}) = \int_0^1 \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_i}(t, \dots, t)\, dt}$$

pro každého hráče $i \in C$.

Totální variace hry

Řetězec Ω je uspořádaná $(m+1)$-tice měřitelných množin

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_m$$

Variace hry v vzhledem k řetězci Ω

$$\|v\|_\Omega = \sum_{i=1}^{m} |v(A_i) - v(A_{i-1})|$$

Totální variace hry v

$$\|v\| = \sup_\Omega \|v\|_\Omega$$

Prostor BV

BV lineární prostor her s omezenou variací ($\|v\| < \infty$)

Věta

$(BV, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor a $v \in BV$ právě tehdy, když existují monotónní hry u, w takové, že $v = u - w$.

Pro každou hru $v \in BV$ platí

$$\|v\| = \inf\big\{u(X) + w(X) \mid u, w \text{ monotónní hry, } v = u - w\big\}.$$

Příklad (hra $v \notin BV$)

$X = [-1, 1]$

$v = f \circ \mu$, kde $f(y) = \sqrt{|y|}$ a $\mu(A) = \int_A \operatorname{sgn} x \, dx$.

Na BV neexistuje hodnota

Příklad

$$v(A) = \begin{cases} 1, & X \backslash A \textit{ je konečná}, \\ 0, & \textit{jinak}. \end{cases}$$

Zřejmě $v \in BV$ *a* $\theta_* v = v$ *pro každé* $\theta \in \mathcal{G}$.
Tedy

$$\varphi[v] = \theta_* \varphi[v]$$

musí platit pro každé $\theta \in \mathcal{G}$, *ale také* $\varphi[v](X) = 1$ *a takový prvek FA neexistuje.*

Spojitost hodnoty

Věta

Nechť Q je uzavřený podprostor BV, kde pro každé $v \in Q$ platí

$$\|v\| = \inf\big\{u(X) + w(X) \mid \text{monotónní hry } u, w \in Q,\ v = u - w\big\}.$$

Když $\varphi : Q \to FA$ je hodnota na Q, potom $\|\varphi\| \leq 1$.

Věta

Nechť Q je uzavřený podprostor BV a $\varphi : Q \to FA$ je lineární zobrazení s $\|\varphi\| \leq 1$ a $\varphi[v](X) = v(X)$. Potom je φ pozitivní.

Hodnota na podprostorech *BV*

Věta

Nechť φ *je hodnota na* Q*, kde* Q *je symetrický uzavřený podprostor* BV*. Když* μ *je neatomická pravděpodobnostní míra a* f *je funkce s konečnou variací na* $[0,1]$ *taková, že* $f(0)=0, f(1)=1$ *a* $f\circ\mu\in Q$*, potom*

$$\boxed{\varphi[f\circ\mu]=\mu.}$$

Prostor *pNA*

pNA uzavřený podprostor *BV* generovaný hrami μ^n,
kde μ je neatomická pravděpodobnostní míra a $n \in \mathbb{N}$

Příklad

Nechť $\vec{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ je neatomická vektorová míra a f je spojitě diferencovatelná na oboru hodnot $\vec{\mu}$, kde $f(\mathbf{0}) = 0$. Potom $f \circ \vec{\mu} \in pNA$.

Věta

Nechť $v = f \circ \mu$, kde μ je nezáporná neatomická míra a f je reálná funkce na $[0, \mu(X)]$ taková, že $f(0) = 0$. Potom $v \in pNA$ právě tehdy, když f je absolutně spojitá na $[0, \mu(X)]$.

Hodnota na *pNA* pro polynomy

Věta

Na pNA existuje právě jedna hodnota φ a platí $\|\varphi\| = 1$.

Věta

Nechť v je polynom neatomických měr. Potom $v \in pNA$ a existují neatomické pravděpodobnostní míry $\mu_1, \ldots, \mu_k$ takové, že

$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu_i^{n_i}, \quad n_i \in \mathbb{N}$$

a platí

$$\boxed{\varphi[v] = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu_i.}$$

Hodnota na *pNA* pro $f \circ \vec{\mu}$, kde $f \in \mathcal{C}^1$

Věta (Diagonální vyjádření hodnoty)

Nechť $\vec{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ *je neatomická vektorová míra a* f *je spojitě diferencovatelná na oboru hodnot* $\vec{\mu}$, *kde* $f(\mathbf{0}) = 0$. *Potom pro každé* $A \in \mathcal{B}$ *platí*

$$\boxed{\varphi[f \circ \vec{\mu}](A) = \int_0^1 D_{\vec{\mu}(A)} f(t\vec{\mu}(X))\, dt,}$$

kde $D_{\vec{\mu}(A)} f$ *je derivace* f *ve směru* $\vec{\mu}(A)$.

Speciálně: pokud má obor hodnot $\vec{\mu}$ dimenzi n, pak

$$\varphi[f \circ \vec{\mu}] = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t\vec{\mu}(X))\, dt.$$

Prostor *pNA* – příklad

Příklad

$$v = \mu_1 + \mu_2(1 - \cos \mu_3),$$

kde μ_i jsou neatomické míry.

Lze psát

$$v = f \circ (\mu_1, \mu_2, \mu_3), \quad kde\ f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2(1 - \cos x_3)$$

a potom

$$\begin{aligned} \varphi[v] &= \mu_1 \int_0^1 dt + \mu_2 \int_0^1 (1 - \cos t) dt + \mu_3 \int_0^1 t \sin t dt \\ &\approx \mu_1 + 0.16\mu_2 + 0.30\mu_3 \end{aligned}$$

Od koaličních her k hrám s ,,fuzzy'' koalicemi

$\mathcal{F}$ je množina všech $\mathcal{B}$-měřitelných funkcí $X \to [0,1]$

Cílem je každou hru v ,,vhodně'' rozšířit na funkcionál $\hat{v} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$.

Příklad

Na LP her s konečným nosičem je rozšíření hry v její multilineární rozšíření $\hat{v}$.

Příklad

Nechť $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ *je vektorová neatomická pravděpodobnostní míra a* $Q = \left\{ f \circ \vec{\mu} \mid f : \vec{\mu}(\mathcal{B}) \to \mathbb{R}, f(\mathbf{0}) = 0 \right\}$. *Rozšíření hry z Q lze definovat jako*

$$\widehat{f \circ \vec{\mu}}(g) = f\left(\int_X g d\vec{\mu}\right), \quad g \in \mathcal{F}.$$

Rozšíření her z *pNA*

Věta

Na pNA existuje právě jedno zobrazení

$$v \in pNA \mapsto \hat{v} \in \mathbb{R}^{\mathcal{F}},$$

které je lineární, pozitivní a platí

- $\widehat{v_1 v_2} = \widehat{v_1}\,\widehat{v_2}, \quad v_1, v_2 \in pNA,$
- $\hat{\mu}(g) = \int_X g \; d\mu, \quad$ *pro* $g \in \mathcal{F}$ *a neatomickou míru* $\mu \in pNA$.

Toto rozšíření je navíc spojité v nejslabší topologii na $\mathcal{F}$*, v níž jsou pro každou neatomickou míru* μ *spojitá zobrazení*

$$g \in \mathcal{F} \mapsto \int_X g \; d\mu.$$

Hodnota na *pNA*

Věta (Diagonální vyjádření hodnoty)

Nechť $v \in pNA$ *a* $A \in \mathcal{B}$*. Potom směrová derivace* $D_A \hat{v}(t)$ *existuje s.v. na* $[0,1]$*, je integrovatelná na* $[0,1]$ *a platí*

$$\boxed{\varphi[v](A) = \int_0^1 D_A \hat{v}(t)\, dt.}$$

Vybraná literatura o koaličních hrách

R.J. Aumann, L.S. Shapley
Values of Non-Atomic Games
Princeton University Press, 1974

Handbook of Game Theory with Economic Applications
R. J. Aumann, S. Hart (editoři)
Elsevier Science Publishers (North-Holland), 2002

G. Owen
Game Theory
Academic Press, 1995

J.-P. Aubin
Coeur et valeur des jeux flous à paiements latéraux
Comptes Rendus Acad. Sci. Paris Sér. A (279), 1974