Petr Olšák: Matematika aplikovaná v počítačové grafice

15. května 2009

Matematická kolokvia katedry matematiky FEL ČVUT v Praze

Abstrakt: Přednáška obsahuje stručný úvod do jedné oblasti počítačové grafiky: do problematiky výpočtů šíření světla v 3D scéně. Formulace matematického modelu a metody řešení: konečné prvky, Monte Carlo metody.

Formulace problému: fotit bez foťáku, filmovat bez kamery

$\downarrow$

Kompromisy, zjednodušení: paprsek v celé své délce svítí stejně, ...

$\downarrow$

Matematický model: diferenciální, resp. integrální rovnice

$\downarrow$

Kompromisy, zjednodušení: diskretizace, aproximace plochy, linearizace

$\downarrow$

Soustava lin. rovnic: obří matice soustavy, nepřesné hodnoty

$\downarrow$

Kompromisy, zjednodušení: iterační numerické metody

$\downarrow$

Výsledek (Je ještě k něčemu? Dočkáme se výsledku? poznáme, že by iterační metoda mohla skončit?)

Veličiny používané v matematickém modelu

$\Phi_{\mathrm{in}}(S,U)$ … **světelný tok (flux)** [W] … světelná energie dopadající na plochu S ze směru U za jednotku času (resp. v okamžiku t)

$\Phi_{\mathrm{out}}(S,U)$ … **světelný tok (flux)** [W] … světelná energie opouštějící plochu S do směru U za jednotku času (resp. v okamžiku t)

$$E(x,U) = \lim_{|S|\to 0, x\in S} \frac{\Phi_{\mathrm{in}}(S,U)}{|S|} \ \ldots \ \textbf{irradiance}$$

… ozáření bodu na ploše ze směru U, tj. hustota toku Φ_{in} na ploše.

Analogicky: $$B(x,U) = \lim_{|S|\to 0, x\in S} \frac{\Phi_{\mathrm{out}}(S,U)}{|S|} \ \ldots \ \textbf{radiozita}$$

… vyzařování bodu do směru U, tj. hustota toku Φ_{out} na ploše.

častěji: $E(x) = E(x,\Omega)$, $B(x) = B(x,\Omega)$.

Abstrakce paprsku (radiance)

$$L_{\mathrm{out}}(x,\omega) = \lim_{|S|\to 0, x\in S} \frac{1}{\cos\theta \cdot |S|} \left(\lim_{|U|\to 0, \omega\in U} \frac{\Phi_{\mathrm{out}}(S,U)}{|U|} \right)$$

Analogicky $L_{\mathrm{in}}(x,\omega)$.

$\cos\theta$ zaručuje nezávislost radiance L na normále plochy S.

Radiance $[\mathrm{W\,m^{-2}\,st^{-1}}]$ se dá měřit expozimetrem, je úměrná reakci fotocitlivého materiálu (filmu), respektive čidla v digitálním fotoaparátu.

Na celé délce paprsku změříme stejné L.

Integrální formulace předchozího:

$$\Phi_{\mathrm{in/out}}(S,U) = \int_S \int_U L_{\mathrm{in/out}}(x,\omega) \cos\theta \,\mathrm{d}\omega \,\mathrm{d}s$$

Odrazivost materiálu

Uvažujme $x \in S$.

$\int_O p(\omega', x, \omega)\,\mathrm{d}\omega$ ... pravděpodobost, že foton, který dopadl ze směru ω' na bod x se odrazí do směru O, tj. $p(\omega', x, \cdot)$ je hustota náhodné veličiny popisující tuto prvděpodobnost.

$E(x, O') = \int_{O'} L_{\mathrm{in}}(x, \omega') \cos\theta' \,\mathrm{d}\omega'$ ... irradiance bodu x ze směru O'. Jak se tato energie odrazí?

$$\int_O \int_{O'} L_{\mathrm{in}}(x, \omega') \cos\theta' p(\omega', x, \omega)\,\mathrm{d}\omega'\,\mathrm{d}\omega$$

... množství $E(x, O')$, která se odrazila do směru O.

Odrazivost materiálu

$\Phi_{\mathrm{out}}(S,O)$ obsahující odraženou energii ze všech směrů je rovna dvěma výrazům:

$$\Phi_{\mathrm{out}}(S,O) = \int_S \int_O \int_{\Omega'} L_{\mathrm{in}}(x,\omega') \cos\theta' p(\omega', x, \omega) \,\mathrm{d}\omega' \,\mathrm{d}\omega \,\mathrm{d}s,$$

$$\Phi_{\mathrm{out}}(S,O) = \int_S \int_O L_{\mathrm{out}}(x,\omega) \cos\theta \,\mathrm{d}\omega \,\mathrm{d}s$$

Po „zderivování“ $\Phi_{\mathrm{out}}(S,O)$ podle S a podle O dostáváme

$$L_{\mathrm{out}}(x,\omega)\cos\theta = \int_{\Omega'} L_{\mathrm{in}}(x,\omega') \cos\theta' p(\omega', x, \omega) \,\mathrm{d}\omega'$$

Odrazivost materiálu

Lokální odrazová rovnice:

$$L_{\text{out}}(x,\omega) = \int_{\Omega'} \frac{p(\omega',x,\omega)}{\cos\theta} L_{\text{in}}(x,\omega') \cos\theta' \,\mathrm{d}\omega'$$

Funkce $f_r(\omega',x,\omega) = \dfrac{p(\omega',x,\omega)}{\cos\theta}$ se nazývá BRDF (Bidirectional reflection distribution function), popisuje odrazové vlastnosti materiálu.

Helmholtz reciprocity: $f_r(\omega',x,\omega) = f_r(\omega,x,\omega')$

Zákon zachování energie:

$$a(x,\omega') = \int_{\Omega} p(\omega',x,\omega)\,\mathrm{d}\omega = \int_{\Omega} f_r(\omega',x,\omega)\cos\theta\,\mathrm{d}\omega \le 1$$

… Funkce a se nazývá odrazivost (albedo) materiálu.

Zobrazovací rovnice [J. T. Kajiya, 1986]

K odraženému světlu přičteme vlastní vyzářené světlo a dostaneme lokální zobrazovací rovnici:

$$L_{\mathrm{out}}(x,\omega) = L_{\mathrm{e}}(x,\omega) + \int_{\Omega'} f_r(\omega',x,\omega) L_{\mathrm{in}}(x,\omega') \cos\theta' \, \mathrm{d}\omega'$$

Substitucí $\omega' \to y = \mathrm{ray}(x,\omega')$, $\mathrm{d}\omega' \to \dfrac{\cos\theta''}{\|x-y\|^2}\,\mathrm{d}s$ a s využitím toho, že $L_{\mathrm{in}}(x,\omega') = L_{\mathrm{out}}(y,-\omega')$, dostáváme:

$$L_{\mathrm{out}}(x,\omega) = L_{\mathrm{e}}(x,\omega) + \int_{y\in S} f_r(\omega',x,\omega) L_{\mathrm{out}}(y,-\omega') V(x,y) \frac{\cos\theta' \cos\theta''}{\|x-y\|^2}\,\mathrm{d}s,$$

$$\text{kde } \omega' = \frac{y-x}{\|x-y\|}, \qquad V(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{když } x \text{ vidí } y \\ 0 & \text{jindy} \end{cases}$$

Toto je globální zobrazovací rovnice s neznámou L_{out}, Fredholmova integrální rovnice, matematický model šíření světla ve scéně.

Integrál jako lineární operátor

Při značení $TL = \int_S f_r(\omega', \cdot, \cdot) L(y, -\omega') V(\cdot, y) \frac{\cos\theta' \cos\theta''}{\|\cdot - y\|^2} \, \mathrm{d}s,$

kde $L_{\text{out}} = L$, přechází zobrazovací rovnice na

$L = L_{\mathrm{e}} + TL, \quad \text{tj.} \quad (I - T)L = L_{\mathrm{e}}$

Inverzi operátoru $(I - T)$ lze zapsat jako Neumannovu řadu:

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k, \quad \text{takže} \quad L = \sum_{k=0}^{\infty} T^k L_{\mathrm{e}}.$$

Život ale není takto jednoduchý…

Zjednodušení: difúzní povrch

Předpoklad: povrch a zdroje jsou pouze difúzní, tj. $L_{\mathrm{out}}(x, \omega) = L_{\mathrm{out}}(x)$ a $f_r = \varrho(x)/\pi$, nezávisí na směrech ω, ω'. Zobrazovací rovnice přechází na tvar:

$$L_{\mathrm{out}}(x) = L_{\mathrm{e}}(x) + \frac{\varrho(x)}{\pi} \int_S L_{\mathrm{out}}(y) V(x, y) \frac{\cos\theta' \cos\theta''}{\|x - y\|^2} \,\mathrm{d}s,$$

Radiozita $B(x) = \int_\Omega L_{\mathrm{out}}(x) \cos\theta \,\mathrm{d}\omega = L_{\mathrm{out}}(x) \int_\Omega \cos\theta \,\mathrm{d}\omega = L_{\mathrm{out}}(x)\pi$

$$B(x) = B_{\mathrm{e}}(x) + \frac{\varrho(x)}{\pi} \int_S B(y) V(x, y) \frac{\cos\theta' \cos\theta''}{\|x - y\|^2} \,\mathrm{d}s,$$

$$B(x) = B_{\mathrm{e}}(x) + \varrho(x) \int_S B(y) G(x, y) \,\mathrm{d}s,$$

$$\text{když } G(x, y) = V(x, y) \frac{\cos\theta' \cos\theta''}{\pi \|x - y\|^2}$$

Diskretizace: radiozitní metoda [C. M. Goral & all, 1984]

Hledá se $\tilde{B}$ po částech konstantní na ploškách A_i ($\bigcup A_i = S$). Funkce $\tilde{B}$ aproximuje řešení rovnice:

$$B(x) = B_{\mathrm{e}}(x) + \varrho(x) \int_S B(y) G(x,y) \, \mathrm{d}s_y$$

Uvažuji skalární součin $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_S f(x) g(x) \, \mathrm{d}s.$

Množina $M = \{c_i;\ c_i(x) = 1/|A_i|$ na A_i, jinde nula$\}$ tvoří ortonormální bázi. $B_i = \langle B, c_i \rangle$ jsou souřadnice $\tilde{B}$. Aplikuji skalární součin $\langle ., c_i \rangle$ na pravou stranu rovnice (kde jsem funkci $B(y)$ nahradil $\tilde{B} = \sum_j B_j c_j$ a souřadnice B_{e} značím E_i) a dostávám

$$B_i = E_i + \varrho_i \frac{1}{|A_i|} \int_{A_i} \sum_j B_j \int_{A_j} G(x,y) \, \mathrm{d}s_y \, \mathrm{d}s_x = E_i + \varrho_i \sum_j B_j F_{i,j},$$

$$\text{při značení } F_{i,j} = \frac{1}{|A_i|} \int_{A_i} \int_{A_j} G(x,y) \, \mathrm{d}s_x \, \mathrm{d}s_y$$

Radiozitní metoda, form faktory

$$F_{i,j} = \frac{1}{|A_i|} \int_{A_i} \int_{A_j} G(x,y)\,\mathrm{d}s_x\,\mathrm{d}s_y \qquad \text{je tzv. } \textbf{form factor}.$$

Platí:

$F_{i,j} \cdot$ energie vyzářená z A_i = energie z A_i, která dopadla na A_j, nebo:

Provedeme půmět A_j na hemisféru kolem A_i a tento průmět promítneme na základnu hemisféry. Pak $F_{i,j}$ je obsah tohoto dvojího průmětu dělený obsahem základny hemisféry.

Zřejmě: $F_{i,j} \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{n} F_{i,j} \leq 1.$

Radiozitní metoda, soustava lineárních rovnic

$$B_i = E_i + \varrho_i \sum_j F_{i,j} B_j.$$

při značení $B = (B_1, \ldots, B_n)^T$, $E = (E_1, \ldots, E_n)^T$, lze zapsat problém maticově jako:

$$KB = E, \quad \text{kde } K = I - \mathrm{diag}(\varrho)F = \begin{pmatrix} 1 - \varrho_1 F_{1,1} & \ldots & -\varrho_1 F_{1,n} \\ -\varrho_2 F_{2,1} & \ldots & -\varrho_2 F_{2,n} \\ -\varrho_2 F_{2,1} & \ldots & -\varrho_2 F_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -\varrho_n F_{n,1} & \ldots & 1 - \varrho_n F_{n,n} \end{pmatrix}$$

Je dáno E (radiozity zdrojů) a K (obludná matice form faktorů), hledá se B (radiozity všech plošek).

Radiozitní metoda, numerické metody

Gaussova eliminace nepoužitelná

Iterativní metody: Jacobiho metoda, Gauss-Seidel, Southwell, ...

Další možnosti vylepšení (progresivní radiozita, hiearchická radiosita) [M. F. Cohen, 1993]

Problémy:

Dělení na plošky je někde zbytečně jemné, jinde hrubé, způsobuje nežádoucí artefakty. Metody: za chodu provádět zjemňování dělení podle potřeby.

Singularita v geometrickém členu.

Náročnost výpočtu form faktorů.

Velikost matice K.

Monte Carlo, Integral estimator [J. von Neumann, S. Ulam, 1944]

Nechť X je náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením na $V \subset \mathbf{R}^s$. Pak

$$E(f(X)) = \int_V f(x)p(x)\,\mathrm{d}x = \int_V f(x)\frac{1}{|V|}\,\mathrm{d}x = I \cdot \frac{1}{|V|}$$

Podle zákona velkých čísel, jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_N$ vzorky náhodné veličiny X a N je dostatečně velké, pak

$$E(f(X)) \doteq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$$

Takže $I = \dfrac{V}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$ odhaduje integrál $\displaystyle\int_V f(x)\,\mathrm{d}x$.

Monte Carlo, odhad chyby

Hledanou hodnotu integrálu $\displaystyle\int_V f(x)\,\mathrm{d}x$ označím C. Náhodné veličiny $f(X_1), f(X_2), \ldots, f(X_N)$ budiž nezávislé. Mají stejnou střední hodnotu $E(f(X_i)) = C/|V|$. Označím σ^2 jejich společný rozptyl. Pak podle centrální limitní věty je

$$\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N f(X_i) - \frac{C}{|V|}}{\sigma/\sqrt{N}} \quad \to \quad N(0,1).$$

Z tabulky kvantilů $N(0,1)$ plyne například, že pro velká N je číslo 0,997 přibližně rovno pravděpodobnosti:

$$P\left(\left|\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N f(X_i) - \frac{C}{|V|}}{\sigma/\sqrt{N}}\right| < 3\right) = P\left(\left|\frac{|V|}{N}\sum_{i=1}^N f(X_i) - C\right| < \frac{3\sigma|V|}{\sqrt{N}}\right)$$

takže na hladině významnosti 0,997 je odhad chyby uvedený v kulaté závorce výše zaručen. Odhad chyby obsahuje $\sqrt{N}$ ve jmenovateli nezávisle na dimenzi V.

Kasické integrační metody, dimensional explosion

Uvažuji $f(x) = kx_1$ a jmu se to integrovati na $\langle 0, 1\rangle^S$ obdélníkovou metodou pomocí N vzorků. V jednom směru potřebuji $n = \sqrt[S]{N}$ vzorků. Odhad chyby:

$$\frac{1}{2}\,\frac{k}{n}\,\frac{1}{n^S}\,n^S = \frac{k/2}{\sqrt[S]{N}}$$

Odhad chyby ve jmenovateli obsahuje $\sqrt[S]{N}$, což je pro $s > 2$ horší než odhad chyby Monte Carlo metody.

Pro jiné metody (lichoběžníková atd.) stačí volit jinak funkci f (stále s variací k) a odhad dopadne stejně.

Integrační metody obecně, Quasi Monte Carlo

Integral estimator $I = \sum_{i=1}^{N} f(x_i) w(x_i)$

Odhad chyby (Koksma-Hlawka Inequality):

$$\left| \int_V f(x)\,\mathrm{d}x - I \right| \leq |V| \cdot v(f) \cdot D, \quad \text{kde}$$

$v(f)$ je variace f

D je diskrepance bodů x_i v objemu V.

To vede k nápadu dělat pseudonáhodný výběr x_i: částečně náhodný a částečně řízený k vylepšení diskrepance. To je podstata metod quasi Monte Carlo.

Modifikace Monte Carlo: Importance sampling

Nechť náhodná veličina X má rozdělení s hustotou p na V. Pak střední hodnota náhodné veličiny $f(X)/p(X)$ je:

$$E\left(\frac{f(X)}{p(X)}\right) = \int_V \frac{f(x)}{p(x)}\, p(x)\,\mathrm{d}x = \int_V f(x)\,\mathrm{d}x = C \qquad \text{(hledaná hodnota)}$$

$$E\left(\frac{f(X)}{p(X)}\right) \doteq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_i)}{p(x_i)} \qquad \text{(estimátor)}$$

Rozptyl estimátoru je $E\left(\left(\frac{f(X)}{p(X)} - C\right)^2\right) = \int_V \left(\frac{f(x)}{p(x)} - C\right)^2 p(x)\,\mathrm{d}x$

Kdyby $p = f/C$, máme nulový rozptyl. Když se p bude funkci f/C „podobat“, budeme mít „malý“ rozptyl a tím i odhad chyby bude lepší. Samozřejmý problém: neznáme C. Stačí ale najít funkci q, kterou umíme integrovat přes V (integrál označím C_q). Dále chceme, aby q se až na násobek podobala f a volíme $p = q/C_q$.

Metody sledování paprsku

Scénou se vede paprsek od kamery nebo od zdroje světla a nechá se (v závislosti na variantě metody) náhodně odrazit od překážky a trasuje se dál. Vyhodnocuje se sbíraná/vysílaná energie podél paprsku. Náhodné pokračování paprsku v místě odrazu odpovídá výpočtu integrálu v odrazové rovnici metodou Monte Carlo.

Metody sledování paprsku, výhody, nevýhody

Výhody:

Popis povrchu možný různými grafickými primitivy

Není nutné dodatečné zjemňování

Je možné pracovat s libovolnou BRDF

Malé požadavky na paměť

Řešení není vychýleno (unbiased)

Nevýhody:

Pomalá konvergence

Šum

Pohledově závislý výpočet

Metody sledování paprsku, varianty

Od kamery (gathering methods):

Ray tracing: klasická metoda, rekurze s odrazem/lomem jen na zrcadlech/místech lomu, počítá jen přímé osvětlení. [T. Whitted, 1980]

Path tracing: rekurze do stanovené hloubky, resp. ukončení paprsku metodou „ruská ruleta“. [J. T. Kajiya, 1986]

Od světla (shooting metods):

Photon tracing: rekurze odrazem/lomem jen na zrcadlech/místech lomu. (nepoužívá se)

Light tracing: rekurze do stanovené hloubky, resp. ukončení paprsku podle zbytkové energie.

Kombinace předchozích metod

Bidirectional path tracing [E. P. Lafortune, I. D. Willems, 1993]

Multiple importance path tracing [E. Veach, 1995]

Photon mapping [H. W. Jensen, 1996]

Další metody:

Precomputed radiance transfer [P. P. Sloan, 2002]

Direct-to-indirect transfer [M. Hašan, 2006]

...