Malá exkurse do topologie variet

Několik pojmů z obecné topologie

- H-prostor: každé dva body $x \neq y$ mají disjunktní otevřená okolí.
- Otevřená báze: soustava otevřených množin taková, že každá otevřená množina je sjednocením některé její části.
- Parakompaktní prostor: do každého otevřeného pokrytí lze vepsat lokálně konečné otevřené pokrytí.

Topologické variety

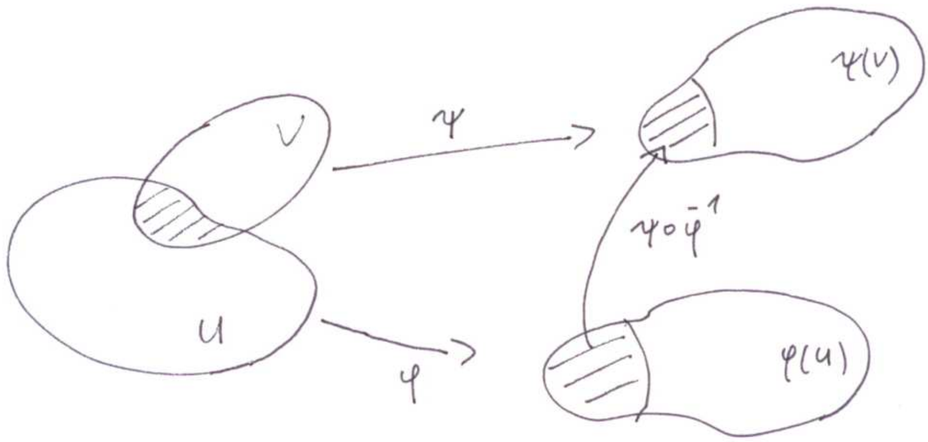
Topologická varieta neboli varieta třídy C^0a dimenze n je prostě H-prostor se spočetnou otevřenou bází, který je lokálně homeomorfní prostoru $\mathbb{R}^n$. Definice diferencovatelné variety je trochu složitější.

Lokální mapy a atlasy na topologické varietě *X*

Lokální mapa na X = dvojice (U, φ), kde U je otevřená množina v X a φ je homeomorfismus U na otevřenou podmnožinu prostoru $\mathbb{R}^n$, kde $n = \dim X$.

Atlas na X = množina $\mathcal{A}$ map na X, jejichž definiční obory pokrývají X, tj. pro kterou $\bigcup \{U : (U, \varphi) \in \mathcal{A}\} = X$.

Transformace map (souřadnic): pro každé dvě mapy (U, φ), (V, ψ) na X, jejichž definiční obory U, V mají neprázdný průnik, můžeme vytvořit kompozici $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$:



Jestliže tento homeomorfismus je difeomorfismem třídy C^r, kde $1 \leq r \leq \omega$, tj. má nenulový Jacobián a spojité parciální derivace až do řádu r včetně, řekneme, že $\mathcal{A}$ je **atlas třídy C^r**. V případě $r = \omega$ to znamená, že kompozice $\psi \circ \varphi^{-1}$jsou analytická zobrazení.

Diferencovatelné struktury a variety

Diferecovatelná struktura třídy C^r na topologické varietě X je maximální atlas na X třídy C^r. Každý atlas na X třídy C^rzřejmě určuje právě jednu diferencovatelnou strukturu téže třídy C^r.

Diferencovatelná varieta třídy C^r = topologická varieta spolu s diferencovatelnou strukturou $\mathcal{A}$ třídy C^r. Formálně je tedy diferencovatelná varieta třídy C^rdvojice $(X, \mathcal{A})$, kde X je topologická varieta a $\mathcal{A}$ je maximální atlas třídy C^r na X. **Přípustná mapa** na diferencovatelné varietě $X = (X, \mathcal{A})$ je mapa na X patřící do $\mathcal{A}$.

Místo termínu diferencovatelná varieta třídy C^rbudeme používat kratší termín varieta třídy C^r a pro variety třídy C^ω budeme používat také termín analytické variety.

Příklady variet

(1) Otevřené podmnožiny v $\mathbb{R}^n$ jsou variety třídy C^ω.

(2) Stiefelova varieta $V_k^{'}(\mathbb{R}^n)$ všech k-reperů v $\mathbb{R}^n$, tj. k-členných nezávislých posloupností n-rozměrných aritmetických vektorů má kanonickou strukturu analytické variety. Každou takovou posloupnost totiž můžeme považovat za

posloupnost řádkových vektorů matice typu (k, n), jejíž alespoň jeden minor řádu k je nenulový. Odtud plyne, že $V_k'(\mathbb{R}^n)$ je otevřená podmnožina kartézského součinu k exemplářů prostoru $\mathbb{R}^n$, takže má kanonickou strukturu analytické variety.

(3) Nechť $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f : G \to \mathbb{R}^k$, kde $k < n$, je zobrazení třídy C^r. Jestliže množina

$$X = \{x \in G : f(x) = 0\}$$

je neprázdná a Jacobián zobrazení f má v každém jejím bodě hodnost k, potom X má kanonickou strukturu C^r-variety dimense $n - k$.

(4) Stiefelova varieta $V_k(\mathbb{R}^n)$ všech ortonormálních k-reperů v $\mathbb{R}^n$ je množinou nulových bodů analytického zobrazení $f : V_k'(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{k(k+1)/2}$ definovaného formulí

$$f(v_1, \ldots, v_k) = (z_{1,1}, \ldots, z_{1,k}, z_{2,2}, \ldots, z_{2,k}, \ldots, z_{k-1,k-1}, z_{k-1,k}, z_{k,k}),$$

kde $z_{i,j} = v_i . v_j - \operatorname{sgn} |i - j|$. Protože Jacobián tohoto zobrazení je ve všech bodech množiny $V_k(\mathbb{R}^n)$ nenulový, $V_k(\mathbb{R}^n)$ má kanonickou strukturu analytické variety dimense $k\,n - k(k+1)/2$.

(5) Varieta $V_1(\mathbb{R}^n)$ je známá standardní sféra $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Jeden atlas definující tuto analytickou varietu lze snadno popsat. Pro $i = 1, 2, \ldots, n+1$ a $\varepsilon = \pm 1$ položíme

$$U_{i,\varepsilon} = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n : x_i \neq 0, \ \operatorname{sgn} x_i = \varepsilon\}$$

a definujeme zobrazení $\varphi_i : U_{i,\varepsilon} \to \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\varphi_{i,\varepsilon}(x) = (x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}),$$

kde stříška nad některým členem posloupnosti znamená, že tento člen je třeba vynechat. Snadno se ověří, že soustava všech dvojic $(U_{i,\varepsilon}, \varphi_{i,\varepsilon})$ je atlas třídy C^ω.

(6) Označme $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ n-rozměrný reálný projektivní prostor, tj. množinu všech jednorozměrných lineárních podprostorů v $\mathbb{R}^{n+1}$. Každému bodu $x \in S^n$ přiřaďme lineární podprostor jím generovaný. Tím dostaneme zobrazení $p : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Množina $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ je přirozeně topologizována požadavkem, aby projekce p byla kvocientovým zobrazením. Podmnožina $U \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ je tedy otevřená právě když je otevřený její vzor $p^{-1}(U) \subseteq S^n$ a projekce p každou množinu, která neobsahuje dvojici antipodálních bodů, zobrazuje homeomorfně na její obraz v $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$.

Kanonická diferencovatelná struktura na $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ je dána atlasem $\{(U_i, \varphi_i) : i = 1, 2, \ldots, n+1\}$, kde

$$U_i = \{L \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n : (x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}) \in L\},$$

$$\varphi(L) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}).$$

Opět se snadno ověří, že $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ s takto definovanou diferencovatelnou strukturou je analytická varieta.

(7) Zobecněním prostorů $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ jsou Grassmannovy variety $G_k(\mathbb{R}^n)$ k-rozměrných lineárních podprostorů v $\mathbb{R}^n$. Topologie je definována požadavkem, aby kanonická projekce $p : V_k(\mathbb{R}^n) \to G_k(\mathbb{R}^n)$ byla kvocientovým zobrazením, a diferencovatelná struktura je definována následujícím způsobem .

Nechť $e_1, \ldots, e_n$ je standardní báze v $\mathbb{R}^n$ a pro každou posloupnost α přirozených čísel $1 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_k \leq n$ nechť L_α je lineární obal vektorů $e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_k}$ a $p_\alpha : \mathbb{R}^n \to L_\alpha$ je orthogonální projekce. Položme

$$U_\alpha = \{L \in G_k(\mathbb{R}^n) : p_\alpha(L) = L_\alpha\}$$

a definujme zobrazení $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^{k(n-k)}$ předpisem

$$\varphi_\alpha(L) = (v_{1,\beta_1}, \ldots, v_{1,\beta_{n-k}}, \ldots, v_{k,\beta_1}, \ldots, v_{k,\beta_{n-k}}),$$

kde $v_i = (v_{i,1}, \ldots, v_{i,n})$, $i = 1, 2, \ldots, k$, je vektor v L zobrazující se projekcí p_α na vektor e_{α_i} a β je posloupnost přirozených čísel $1 \leq \beta_1 < \ldots < \beta_{n-k} \leq n$ komplementární k α.

Snadno se ověří, že soustava všech možných lokálních map $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ je atlas definující na $G_k(\mathbb{R}^n)$ diferencovatelnou strukturu třídy C^ω.

(8) Čočkové prostory (lens spaces). Nechť $p \geq 2$, $q_1, \ldots, q_n$ jsou celá čísla a nechť každé q_i je nesoudělné s p. Nechť R_i je rotace komplexní roviny o úhel $2\pi q_i / p$, takže $R_i(z) = \exp(2\pi q_i / p)\, z$, a nechť $X = L(p; q_1, \ldots, q_n)$ je kvocientový prostor jednotkové sféry $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ podle ekvivalence generované identifikacemi

$$(z_1, \ldots, z_n) \sim (R_1(z_1), \ldots, R_n(z_n)).$$

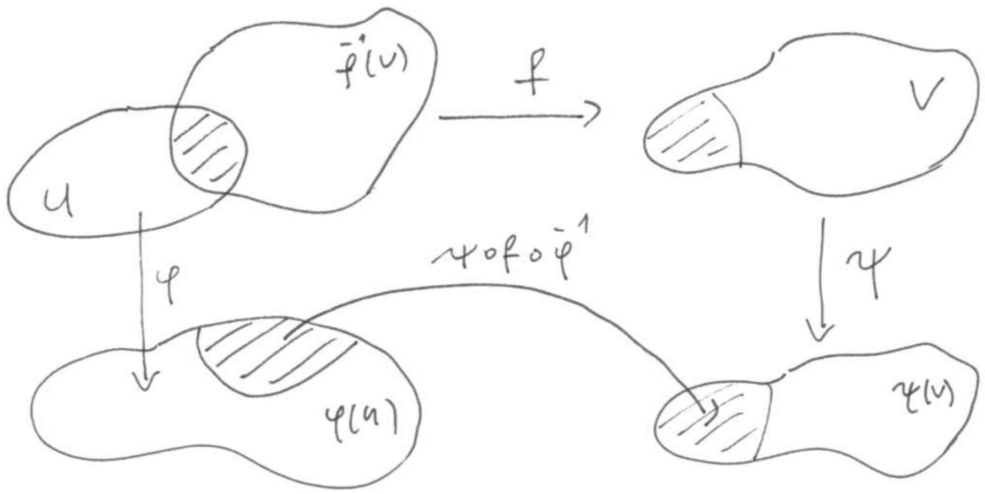
Třídy ekvivalence jsou zřejmě p-prvkové množiny. Každý bod sféry S^{2n-1} má proto otevřené okolí U, které každou třídu ekvivalence protíná právě v jednom bodě. Každé takové okolí ale kanonická projekce $p : S^{2n-1} \to X$ zobrazuje homeomorfně na jeho obraz $p(U)$. Odtud vyplývá, že X má kanonickou strukturu variety třídy C^ω generovanou atlasem všech lokálních map $(p(U), \varphi \circ (p \,|\, U)^{-1})$, kde (U, φ) je přípustná mapa na S^{2n-1} a $p \,|\, U$ je prosté zobrazení.

(9) Kartézský součin $X \times Y$ variet třídy C^r je opět varieta s diferencovatelnou strukturou generovanou lokálními mapami $(U \times V, \varphi \times \psi)$, kde (U, φ) je přípustná mapa na X a (V, ψ) je přípustná mapa na Y.

Diferencovatelná zobrazení

Nechť X, Y jsou variety třídy C^r, $r \geq 1$, nechť $m = \dim X$, $n = \dim Y$ a $f : X \to Y$ je spojité zobrazení.

Zobrazení f je třídy C^s, $1 \leq s \leq r$, jestliže komposice $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U \cap f^{-1}(V) \to \mathbb{R}^n$, je třídy C^s pro každou přípustnou mapu (U, φ) na X a každou přípustnou mapu (V, ψ) na Y, pro něž $U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$:



Zobrazení f je imerse třídy C^s, je-li třídy C^sa Jacobián každé takové komposice má konstantní hodnost m. V takovém případě zřejmě $m \leq n$.

Zobrazení f je submerse třídy C^s, je-li třídy C^sa Jacobián každé takové komposice má konstantní hodnost n. V takovém případě zřejmě $m \geq n$.

Zobrazení f je vnoření C^s, je-li imersí třídy C^sa homeomorfismem na $f(X)$.

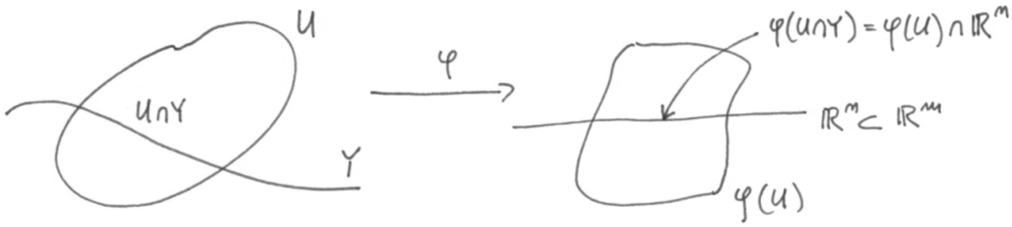
Zobrazení f je difeomorfismus třídy C^s, je-li imersí třídy C^sa homeomorfismem na Y. V takovém případě $m = n$ a inverzní zobrazení $f^{-1} : Y \to X$ je také difeomorfismus třídy C^s.třídy C^r na X.

Orientace

Nechť $X = (X, \mathcal{A})$ je varieta třídy C^r, $r \geq 1$. Přípustné mapy (U, φ), (V, ψ) jsou podle definice souhlasně resp. opačně orientované, jestliže determinant Jakobiánu kompozice $\psi \circ \varphi^{-1}$je všude kladný resp. záporný. Varieta X je orientovatelná, jestliže existuje podmnožina $\mathcal{A}_+ \subset \mathcal{A}$ tak, že každé dvě mapy z $\mathcal{A}_+$ jsou souhlasně orientované a totéž platí o jejím doplňku. Každá taková podmnožina $\mathcal{A}_+$ se nazývá orientací variety. Orientovat varietu znamená zvolit jednu z možných orientací. Orientovaná varieta je varieta s pevně zvolenou orientací. Na souvislé varietě buď orientace neexistuje nebo existují právě dvě.

Podvariety

Nechť X je varieta třídy C^r, $r \geq 1$, a dimenze m. Řekneme, že podmnožina Y množiny X je podvarieta dimenze n, právě když ke každému bodu $x \in Y$ existuje přípustná mapa (U, φ) na X, pro kterou $x \in U$ a $U \cap Y = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^n)$. Dvojice $(U \cap Y, \varphi \mid u \cap Y)$ pak generují na Y strukturu C^r-variety a inkluse $\iota : Y \to X$ je imerse třídy C^r. mapa na Y.



Několik obecných vět

Každý atlas třídy C^r je pro každé $1 \leq s \leq r$ zřejmě obsažen v právě jednom maximálním atlasu třídy C^s. Každou varietu třídy C^r tedy můžeme považovat za varietu třídy C^s. Obráceně platí tato věta:

Věta. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je varieta třídy C^s. Potom pro každé r, $s \leq r \leq \infty$ platí:

(a) $\mathcal{A}$ obsahuje diferencovatelnou strukturu třídy r.

(b) Jsou-li $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ dvě takové struktury, potom variety $(X, \mathcal{A}_1)$, $(X, \mathcal{A}_2)$ jsou C^r-difeomorfní. Přitom pro každou metriku ϱ a kladnou funkci ε na X existuje C^r-difeomorfismus f s vlastností $|x - f(x)| < \varepsilon(x)$ pro všechna x.

Věta. Každá n-dimensionální varieta třídy C^r, $1 \leq r \leq \infty$, je difeomorfní uzavřené C^r-podvarietě prostoru $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Věta. Ke každému otevřenému pokrytí $\{U_i : i \in I\}$ C^r-variety, kde $r \leq \infty$, existuje vepsaný lokálně konečný rozklad jednotky třídy C^r, tj.soubor nezáporných funkcí $\{\varphi_i : i \in I\}$ třídy C^r s těmito vlastnostmi:

(a) nosič funkce φ_i, tj. uzávěr F_i množiny $\{x : \varphi_i(x) > 0\}$, je obsažen v U_i pro každé $i \in I$,

(b) soubor $\{F_i : i \in I\}$ je lokálně konečný,

(c) $\sum \{\varphi_i(x) : i \in I\} = 1$ pro všechna $x \in X$.

Poznámka. Díky těmto větám se lze při studiu topologie diferencovatelných variet omezit na variety třídy C^∞. Nelze se však omezit na analytické variety, neboť zatímco první dvě věty platí i pro ně, i když důkaz je mnohem obtížnější, třetí věta, na níž závisí mimo jiné existence Riemannovy metriky, pro $r = \omega$ neplatí.

Počínaje tímto okamžikem proto kromě topologických variet budeme uvažovat pouze **hladké struktury, variety** a **hladká zobrazení**, tj. diferencovatelné struktury, variety a zobrazení třídy C^∞.

Variety dimenze ≤ 3.

Každá topologická varieta dimenze 1 je homeomorfní buď s $\mathbb{R}^1$ nebo s S^1 a každá hladká varieta dimenze 1 je difeomorfní s jednou z těchto dvou hladkých variet.

Na každé ploše, tj. topologické varietě dimenze 2, existuje hladká struktura a dvě hladké plochy jsou difeomorfní, právě když jsou homeomorfní.

Totéž platí o varietách dimenze 3.

Poincarého hypotéza

Spojitá zobrazení f_0, $f_1 : X \to Y$ topologických prostorů jsou homotopní, jestliže zřejmým způsobem definované zobrazení $(f_0, f_1) : X \times \{0, 1\} \to Y$ lze rozšířit na spojité zobrazení $F : X \times \langle 0, 1 \rangle \to Y$.

Topologické prostory X, Y jsou homotopicky ekvivalentní, existují-li spojitá zobrazení $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, jejichž obě kompozice $g \circ f$, $f \circ g$ jsou homotopní identickým zobrazením.

Prostor X je jednoduše souvislý, jestliže každé spojité zobrazení $S^n \to X$, kde $n = 0, 1$, je homotopní konstantnímu.

Zobecněná Poincarého hypotéza. Homotopická sféra dimenze n, tj. kompaktní hladká varieta Σ dimenze n homotopicky ekvivalentní sféře S^n, potom je homeomorfní S^n.

Hypozéza je triviální pro $n = 1$ a pro $n = 2$ je důsledkem klasifikace souvislých kompaktních, hladkých a polyedrálních ploch, která byla známa už ve druhé polovině 19. století.

Poincaré tuto hypotézu vyslovil v roce 1904 pouze pro $n = 3$, a to v následující v tomto případě ekvivalentní formě: **Poincarého hypotéza**. Jestliže každé spojité zobrazení S^1 do souvislé kompaktní hladké variety Σ dimenze 3 lze spojitě rozšířit na disk D^2, potom Σ a S^3 jsou homeomorfní.

O důkaz Poincarého hypotézy se pokoušela řada matematiků včetně Poincarého, ale všechny důkazy se ukázaly jako chybné. Důkaz byl, jak se zdá, nakonec nalezen, ale teprve nedávno, dlouho po té, co byla dokázána zobecněná Poincarého hypotéza pro $n > 4$ a pak i pro $n = 4$.

Pro $n > 4$ podal důkaz Stephen Smale v práci publikované v roce 1961. K poněkud slabším výsledkům ale došli i jiní matematici.

Pro $n = 4$ byla Poincaréova hypotéza dokázána, a to bez předpokladu hladkosti variety Σ, až v práci Michaela H. Freedmana publikované v roce 1982, v níž autor podal úplnou klasifikaci jednoduše souvislých kompaktních topologických variet dimenze 4 a za niž mu v roce 1986 byla udělena Fieldsova medaile.

Originální Poincaréova hypotéza je snad dokázána v práci Grigorije Perelmana ohlášené v roce 2002. V kopii, kterou lze získat na adrese http://arxiv.org/abs/math/DG/0211159, je však pod názvem uvedeno datum March, 2007. Preprint není bez chyb, některé opravil sám Perelman, jiné opravili jiní matematici. Zatím to vypadá, že zásadní chyby v preprintu nejsou.

Za zmínku snad stojí, že originální Poincaréova hypotéza patří mezi tzv. problémy, za jejichž vyřešení Clay Mathematics Institute vypsal odměnu 1 000 000 $.

Nestandardní neboli exotické sféry

Ukazuje se, že existují hladké variety, které jsou homeomorfní, avšak nikoliv difeomorfní standardním sférám. Označme S_n třídu všech orientovaných hladkých variet homeomorfních sféře S^n a definujme na ní ekvivalenci $\sim$ předpisem "$X \sim Y$ právě když X a Y jsou orientovaně difeomorfní". Příslušné třídy ekvivalence tvoří množinu, kterou označíme θ_n. Zřejmě $|\theta_1| = |\theta_2| = |\theta_3| = 1$ a již v roce 1959 bylo známo, že tyto množiny jsou nejvýše spočetné. V roce 1963 pak Michel Kervaire a John Milnor publikovali práci, v níž s použitím Smaleových a jiných výsledků dokázali, že všechny množiny θ_n, kde $n > 4$, jsou konečné, a pro některá n určili jejich mohutnost:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\lvert\theta_n\rvert$	1	1	1	?	1	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16256	2	16	16

Kervaire a Milnor také definovali na množinách θ_n strukturu abelovské grupy, kterou lze popsat, přinejmenším v případě $n > 4$, takto. Nechť Σ_1, Σ_2 jsou dvě orientované hladké variety homeomorfní sféře S^na nechť (U_i, φ_i), $i = 1, 2$, je libovolná přípustná lokální mapa na Σ_i splňující podmínku $B^n \subset \varphi_i(u_i)$, kde B^n je uzavřená koule v $\mathbb{R}^n$ o poloměru 1. Označme r_n lineární homeomorfismus definovaný předpisem $r_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$, v disjunktním sjednocení topologických prostorů $\Sigma_1 - \varphi_i^{-1}(\operatorname{Int} B^n)$, $\Sigma_2 - \varphi_2^{-1}(\operatorname{Int} B^n)$ identifikujme pro každé $x \in S^{n-1}$ body $\varphi_1^{-1}(x)$, $\varphi_2^{-1} \circ r_n(x)$ a označme Σ příslušný kvocient. Dá se ukázat, že Σ je topologická varieta, a že až na difeomorfismus na ní existuje právě jedna hladká struktura $\mathcal{A}$ kompatibilní s orientovanými hladkými strukturami na otevřených podmnožinách $\Sigma_1 - \varphi_1^{-1}(B^n)$, $\Sigma_2 - \varphi_2^{-1}(B^n)$. Součet tříd ekvivalence variet Σ_1, $X\Sigma_2$ je definován jako třída ekvivalence hladké variety $(\Sigma, \mathcal{A})$.

Například grupa θ_7 je cyklická a jak ukázal v roce 1966 Egbert Brieskorn, všech jejích 28 prvků množiny je reprezentováno hladkými podvarietami v $\mathbb{R}^{10} = \mathbb{C}^5$definovanými rovnicemi

$$z_1^{6k-1} + z_2^3 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0, \;\; z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_3 \bar{z}_3 + z_4 \bar{z}_4 + z_5 \bar{z}_5 = 1$$
$$(k = 1, 2, \ldots, 28)$$

O množině θ_4 se zatím neví nic.

Exotické hladké struktury na $\mathbb{R}^4$

Naproti tomu je známo, že na $\mathbb{R}^n$, kde $n \neq 4$, existuje až na difeomorfismus pouze jedna hladká struktura.V případě $n = 4$ je situace zcela jiná. První příklady exotických hladkých struktur publikoval Robert Gompf v roce 1983. V další práci, která vyšla o 2 roky později, dokázal, že takových struktur existuje spočetně mnoho. A konečně Stefano Demichelis a Michael H. Freedman publikovali v roce 1992 práci, v níž dokázali existenci nespočetně mnoha exotických struktur na $\mathbb{R}^4$.

Topologické variety bez hladké struktury

Existence takových variet je známa přinejmenším od roku 1960. Jednu takovou varietu lze získat např. následující konstrukcí uvedenou v jedné práci E. Brieskorna z druhé poloviny 60. let: Uvažujme podmnožinu X prostoru $\mathbb{R}^{14} = \mathbb{C}^7$ definovanou podmínkami

$$z_1^2 + \ldots + z_5^2 + z_6^3 + z_7^5 = \varepsilon, \;\; \sum_{i=1}^{7} z_i \bar{z}_i \leq 1,$$

kde ε je dostatečně malé kladné číslo. Ukazuje se, že X je hladkou varietou s krajem dimenze 12, jejíž kraj ∂X je homeomorfní sféře S^{11}, a že kvocient $X / \partial X$ je topologická varieta dimenze 12, na níž neexistuje žádná hladká struktura.

Topologické sféry dimenze n v R^{n+1}

Topologická sféra dimenze n je topologický prostor homeomorfní standardní sfére S^n. Říkáme, že topologická sféra Σ dimenze n ležící v topologické varietě X je lokálně plochá (flat), jestliže pro každý bod její bod x existuje lokální mapa (U, φ) na X, kde $x \in U$ a $\varphi(U \cap \Sigma) \subset \mathbb{R}^n$.

Jordanova věta. Je-li $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ homeomorfní kružnici, potom $\mathbb{R}^2 - \Sigma$ má právě dvě komponenty a Σ je jejich společnou hranicí.

Schoenfliesova věta. Každý homeomorfisnus kružnice S^1na topologickou kružnici $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ lze rozšířit na homeomorfismus roviny $\mathbb{R}^2$ na sebe.

Antoineova věta. Nechť $X \subset \mathbb{R}^2$ je úsečka nebo kružnice S^1 a nechť $Y \subset \mathbb{R}^2$ je homeomorfní X. Potom existuje soubor homeomorfismů f_t, $0 \le t \le 1$, prostoru $\mathbb{R}^2$ na sebe s těmito vlastnostmi:

(a) zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \times \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}^2$, $(x, t) \mapsto f_t(x)$, je spojité,

(b) f_0 je identické zobrazení a $f_1(X) = Y$.

Jordanova -Browerova věta. Doplněk topologické sféry Σ dimenze n v prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$ nebo S^{n+1} má právě dvě komponenty a Σ je jejich společnou hranicí.

Zobecněná Schoenfliesova věta. Každý homeomorfisnus standardní sféry S^n na lokálně plochou topologickou sféru $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nebo $\Sigma \subset S^{n+1}$ lze rozšířit na homeomorfismus prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$resp. sféry S^{n+1}.

Důsledek. Nechť Σ_1, Σ_2 jsou lokálně ploché topologické sféry dimenze n v prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$ a nechť C_i je omezená komponenta doplňku $\mathbb{R}^{n+1} - X_i$. Jestliže Σ_1 leží v C_2, potom obě množiny $C_2 - \mathrm{D}C_1$, $\overline{C}_2 - \overline{C}_1$ jsou homeomorfní kartézskému součinu $S^n \times \langle 0, 1)$.

Jordanova, Schoenfliesova a Antoinetova věta jsou klasické výsledky. Zobecněnou Schoenfliesovu větu dokázali B. Mazur (1959) a Morton Brown (1960). Předpoklad lokální plochosti nelze v této větě vynechat, jak ukazuje např. tzv. rohatá sféra v $\mathbb{R}^3$ sestrojená v roce 1924 J. W. Alexanderem. Omezená komponenta doplňku této sféry není jednoduše souvislá a proto zobecněná Schoenfliesova věta nemůže pro tuto sféru platit.

Stabilní homeomorfismy prostorů S^n a $\mathbb{R}^n$ a věta o anuloidu

Homeomorfismus topologického prostoru X je podle definice stabilní, je-li kompozicí konečně mnoha homeomorfismů prostoru X, z nichž každý je identický na nějaké otevřené množině.

Homeomorfismy f_0, $f_1 : X \to Y$ jsou isotopní, existují-li homeomorfismy $\varphi_t : X \to Y$, $0 \le t \le 1$, tak, že $\varphi_0 = f_0$, $\varphi_1 = f_1$ a zobrazení $\varphi : X \times \langle 0, 1\rangle \to Y$, definované formulí $\varphi(x, t) = \varphi_t(x)$ je spojité.

Věta (John W. Alexander). Nechť X je $\mathbb{R}^n$ nebo S^n. Potom každý homeomorfismus f prostoru X, který je identický na některé otevřené množině, je isotopní identickému zobrazení.

Důkaz.

V případě $X = \mathbb{R}^n$ můžeme zřejmě předpokládat, že homeomorfismus f je identický na okolí uzavřeného disku B_δ se středem v bodě 0 a poloměrem δ. Pro položme $\varphi_0(x) = x$ a $\varphi_t(x) = f(t\,x]/t$ pro $0 < t \le 1$. Každé zobrazení φ_t je zřejmě homeomorfismus a $\varphi_t(x) = x$ pro $\|x\| \le n\,\delta$ a $t \le 1/n$. Příslušné zobrazení $\varphi : X \times (0, 1\rangle \to X$ je proto spojité, což bylo třeba dokázat.

V případě $X = S^n$ zvolíme bod x_0, v jehož okolí je homeomorfismus f identický, a homeomorfismus g prostoru $\mathbb{R}^n$ na otevřenou množinu $S^n - \{x_0\}$. Homeomorfismus $h = g^{-1} \circ f \circ g$ prostoru $\mathbb{R}^n$ je v okolí bodu $g^{-1}(x_0)$ identický a proto je isotopní identickému zobrazení. Je-li ψ_t, $0 \le t \le 1$, isotopie, kde $\psi_0 = h$ a ψ_1 je identické zobrazení, pak φ_t, $0 \le t \le 1$, kde $\varphi_t(x_0) = x_0$ a $\varphi_t(x) = g \circ \psi_t \circ g^{-1}(x)$ pro $x \ne x_0$, je isotopie spojující f s identickým zobrazením sféry.

Důsledek. Každý stabilní homeomorfismus prostoru $\mathbb{R}^n$ a sféry S^n je isotopní identickému zobrazení.

Věta (M. Brown, H. Gluck, 1964). Omezená uzavřená množina v $\mathbb{R}^{n+1}$ nebo S^{n+1}ohraničená dvěmi disjunktními lokálně plochými topologickými sférami dimenze n je homeomorfní kartézskému součinu $S^n \times \langle 0, 1\rangle$ právě tehdy, když existuje stabilní homeomorfismus prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$ resp. S^{n+1} převádějící jednu z těchto sfér na druhou.

Věta (R. C. Kirby, 1969). Každý orientaci zachovávající homeomorfismus prostoru $\mathbb{R}^n$ na sebe je stabilní.

Důkaz. Pro $n > 4$ R. C. Kirby v roce 1969, pro $n \le 3$ klasický výsledek.

Věta (R. C. Kirby, 1969). Homeomorfismus prostoru $\mathbb{R}^n$ na sebe je stabilní právě když je isotopní identickému zbrazení.

Věta o anuloidu (R. C. Kirby, 1969 a F. Quinn, 1982). Uzavřená omezená množina $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ohraničená dvěma lokálně plochými topologickými sférami dimenze n je homeomorfní kartézskému součinu $S^n \times \langle 0, 1\rangle$.

Důkaz: Pro $n > 3$ Robion C. Kirby v roce 1969, pro $n = 3$ Frank Quinn v roce 1982. Pro $n \le 2$ byla věta dokázána již dříve.

Odkazy

Brieskorn Egbert V., Examples of singular normal comples spaces which are topological manifolds, Pro. Nat. Acad. U.S.A. 55 (1966), 1395-1397

Brieskorn Egbert V., Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten, Invent. Math. 2 (1966), 1-14

Brown Morton, A proof of the generalized Schoenflies extension problem, Bull. Amer. Math. 66 (1960), 74-76

Brown Morton, Gluck Herman, Stable structures on manifolds I, II, III, Ann. of Math. (2) 79 (1964), 1-17, 18-44, 45-58

De Michelis Stefano, Freedman Michael H., Uncountably manu exotic $\mathbb{R}^4$'s in standard 4-space, J. Differential Geom. 35 (1992), no. 1, 219-254

Freedman Michael Hartley, The topology of four-manifolds, J. Differential Geom. 17 (1982), no. 3, 357-453

Gompf Robert E., Three exotic $\mathbb{R}^4$'s and other anomalies, J. Differential Geom. 18 (1983), no. 2, 317-328

Gompf Robert E., An infinite set of exotic $\mathbb{R}^4$'s, J. Differential Geom. 21 (1985), no. 2, 283-300

Kervaire Michel A., Milnor John W., Groups of homotopy spheres I, Ann. of Math. (2) 1963, 504-537

Kirby Robion C., Stable homeomorphisms and the annulus conjecture, Ann. of Math. (2) 89 (1969), 575-582

Quin Frank, Ends of maps. III. Dimensions 4 and 5, J. Differential Geom. 17 (1982), no. 3, 503-521

Smale Stephen, Generalized Poincare's conjectureindimensions grater than four, Ann.of Math. (2) 74, 1961, 391-406