Počátky geometrické pravděpodobnosti a stereologie

Anna Kalousová

Praha, 24. 4. 2009

Stereologie

- statistická inference z geometrických výběrů, jejichž dimense je obvykle nižší než dimense zkoumaného objektu

- „statistika“ založená na geometrické pravděpodobnosti
- využití – metalurgie, krystalografie, ekologie, medicína, biologie, běžný život
- název v roce 1961, založení stereologické společnosti (Hans Elias)
- Hans Elias – dotaz na Freiburg University library – dosud nebylo použito
- Friedrich Erdmann Petri – Handbuch der Fremdwörter – stereologie je nauka o symbolech kříže, interpretace symbolů kříže na mincích, znacích a dokumentech (13. vydání z roku 1889), patrně středověký původ

- 1847 – A. Delesse (1817-1881) – ve výbrusu horniny součet plošek rozesetých částic ku celkové ploše výbrusu odpovídá objemu těchto částic ve studovaném materiálu (intuitivně, Cavalieriho princip), tedy na základě vlastnosti 2D řezu tělesa (plochy) odhadoval jeho 3D vlastnost (objem)
- A.K. Rosiwal (1860-1923), J.E. Thomson (1882-1944), A.A.Glagolev
- geometrická pravděpodobnost – v 18. a 19. století neměla žádné praktické využití, ve 20. století dala teoretické zdůvodnění používaným postupům.
- základní stereologické formule (pro vlastnosti průniků ploch a křivek v 3D a 2D) byly odvozeny v polovině 20. století
- S.A. Saltykov (1945), C.S. Smith a L. Guttman (1953), R.J. Duffin, R.A. Meussner a F.N. Rhines (1953), E. Horikawa (1953)

Geometrická pravděpodobnost

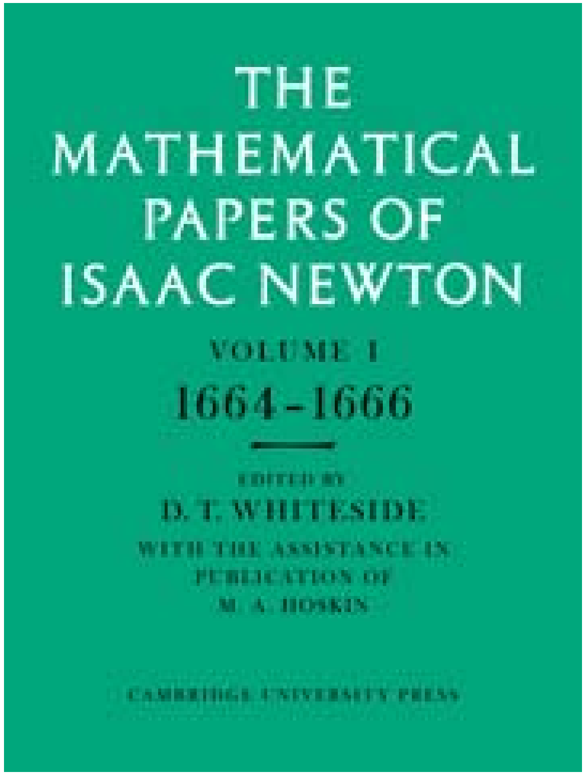
Na úsečce AC náhodně zvolíme bod D.

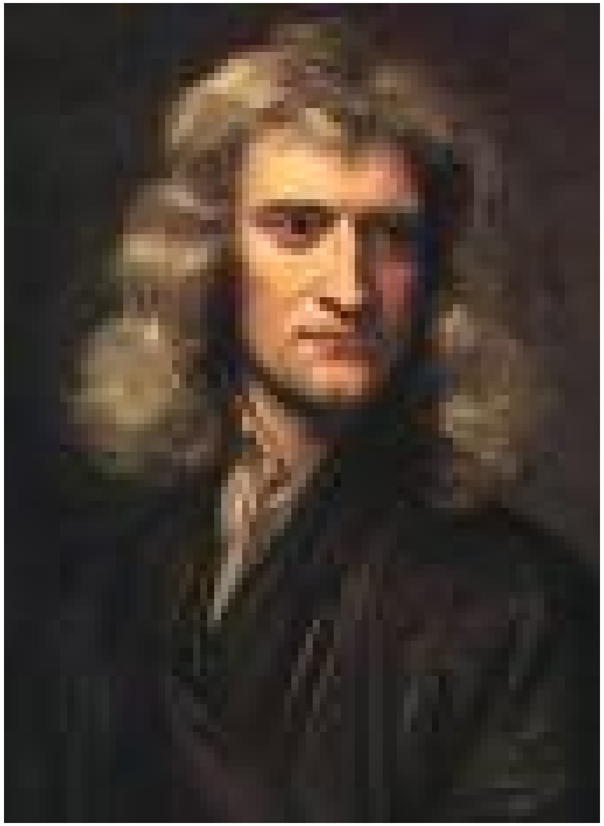
1. Jaká je pravděpodobnost, že bod D leží na úsečce AB?
2. Jaká je pravděpodobnost, že bod D leží na úsečce BC?

$$P_1 = \frac{|AB|}{|AC|}$$

$$P_2 = \frac{|BC|}{|AC|}$$

Isaac Newton (1642-1727)



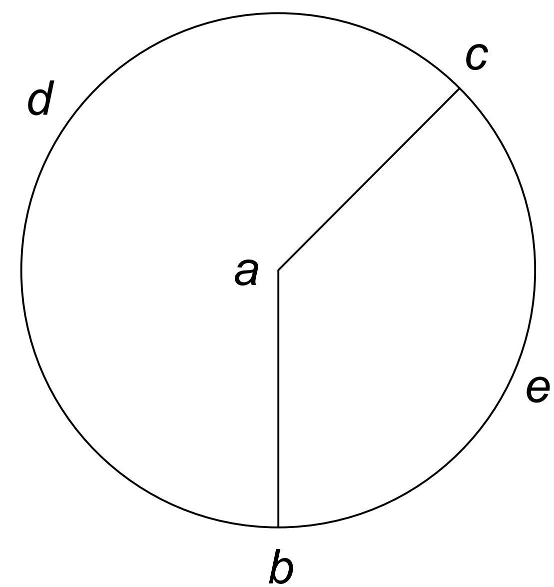


pravděpodobnost může být **iracionální**

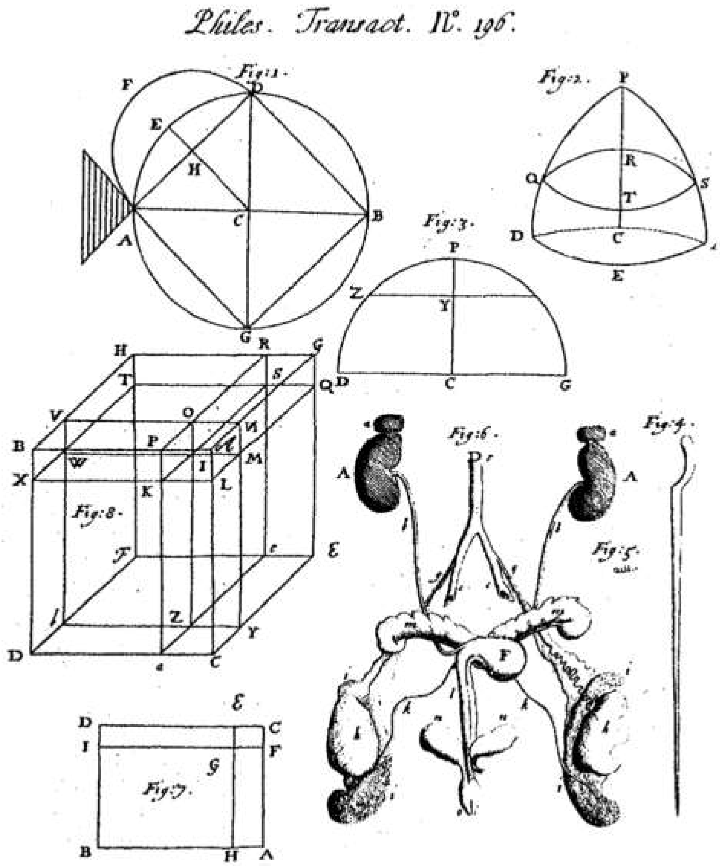
(rukopis 1664-1666)

If ye Radij *ab, ac,* divide ye horizontal circle *bcd* into two pts *abec* & *abdc* in such proportion as 2 to √5. And if a ball falling perpendicularly upon ye center *a* doth tumble into the portion *abec* I win *a*: but if into ye other portion, I win *b*, my hopes is worth

$$\frac{2a + b\sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}}$$

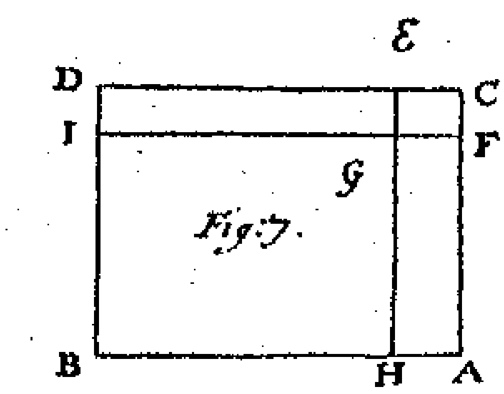


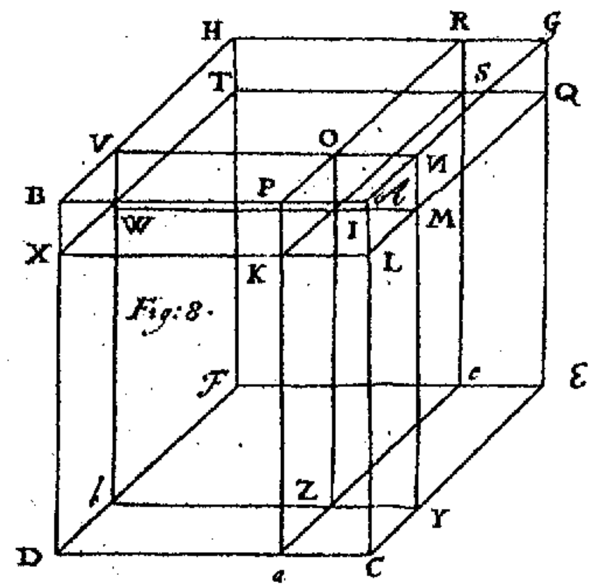
Edmond Halley (1656-1742)



An Estimate of the Degrees of Mortality of Mankind, drown from curious Tables of the Births and Funerals at the city of Breslaw; with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon Lives (Philosophical Transaction 1693)

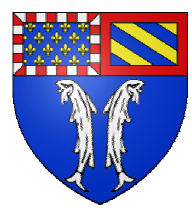
- Halley nejprve analyticky odvodil formule, potom přidal jejich geometrickou ilustraci



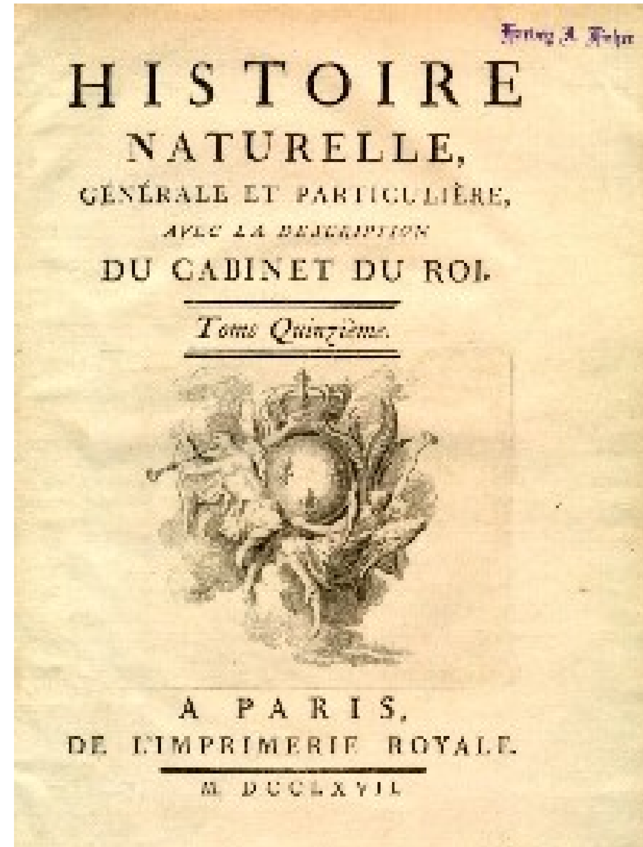


Georges-Louis Leclerc, hrabě de Buffon (1707 – 1788)

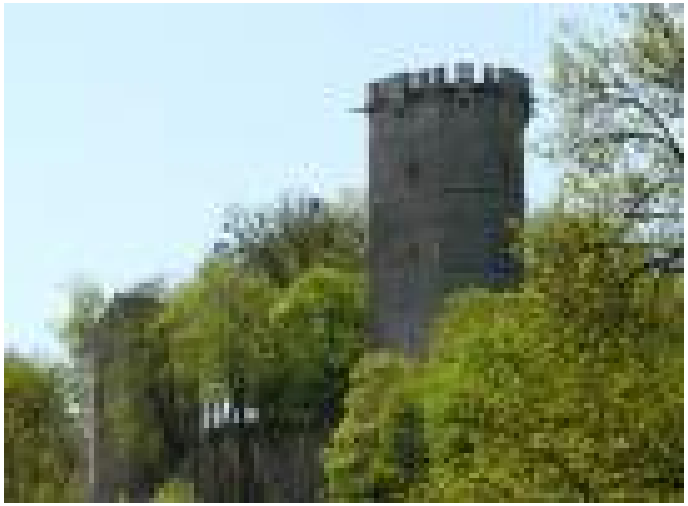
- 7. 9. 1707 narozen v Montbard v Burgundsku
- 1717—1723 studia v Collège des Godrans v Dijonu (jezuité)
- 1723—1726 studium práv v Dijonu (licence de droit)
- 1727 píše první dopis G. Cramerovi (1704—1752) do Ženevy
- 1728 odchází do Angers studovat medicínu, zajímá se o matematiku a botaniku, kvůli souboji musí odejít
- 1728—1732 cestuje po Francii a jižní Evropě, 1731 se setkává v Ženevě s Cramerem
- 1732 usazuje se v Paříži, chce se věnovat vědecké dráze



- 1733 v Académie des Sciences je čteno pojednání *Solution de problèmes sur le jeu du Franc-Carreau,* je hodnoceno velmi pochvalně (Clairaut, Maupertuis)
- 1734 král ho jmenuje *adjoint mécanicien* v Académie des sciences
- 1739 jmenován správcem Jardin du Roi (skandál), v Académie des sciences odchází ze sekce mechaniky do sekce botaniky, nejprve jako *adjoint botaniste,* později jako *associé botaniste*
- 1749 vycházejí první tři díly jeho encyklopedie *Histoire naturelle, génerale et particulière,* za jeho života vyšlo 36 dílů, dalších 8 bylo vydáno po jeho smrti
- 1777 vychází IV. Dodatek, součástí je *Essai d'arithmétique morale*
- 16. 4. 1788 umírá v Paříži




SVR LE SEVIL
DE CE CABINET DE TRAVAIL
J-J ROVSSEAV S'AGENOVILLA
250E ANNIVERSAIRE DE BVFFON 1957



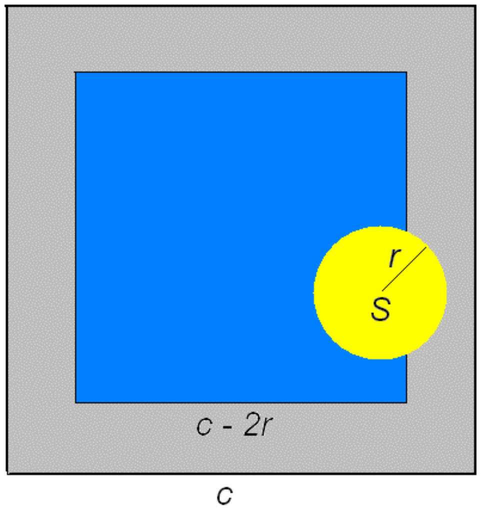
Essai d'arithmétique morale

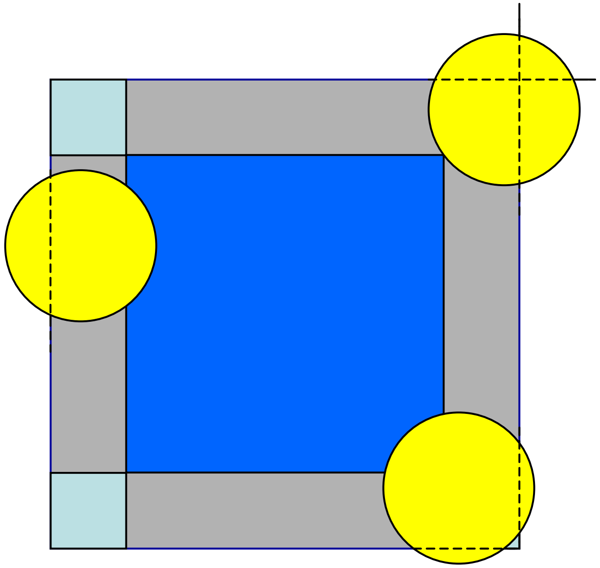
Histoire naturelle, généralle et particulière, Supplément, Tome IV (1777)

Úloha o čtverci

Dans une chambre parquetée ou pavėe de carreaux égaux, d'une figure quelconque, on jette en l'air un écu; l'un des joueurs parie que cet écu après sa chute se trouvera à franc-carreau, c'est-à-dire, sur une seul carreau; le second parie que cet écu se trouvera sur deux carreaux, c'est-à-dire, qu'il couvrira un des joints qui les séparent; un troisième joueur parie que l'écu se trouvera sur deux joints; un quatrième parie que l'écu se trouvera sur trois, quatre ou six joints; on demande les sorts de chacun de ces joueurs.

Úloha o čtverci





$$P = \frac{(c-2r)^2}{c^2}$$

$$P_1 = \frac{4r(c-2r)}{c^2}$$

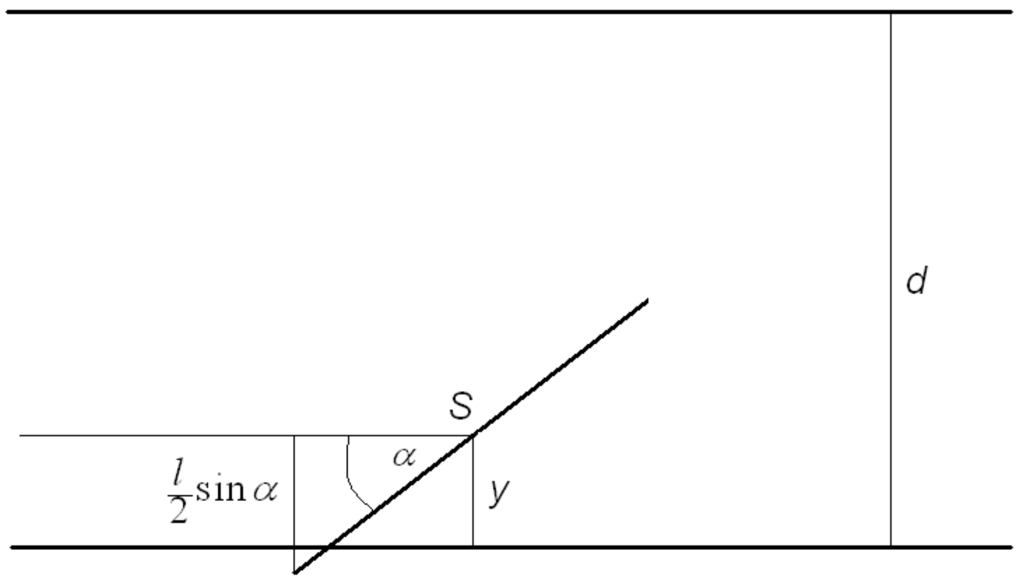
$$P_2 = \frac{(4-\pi)r^2}{c^2}$$

$$P_4 = \frac{\pi r^2}{c^2}$$

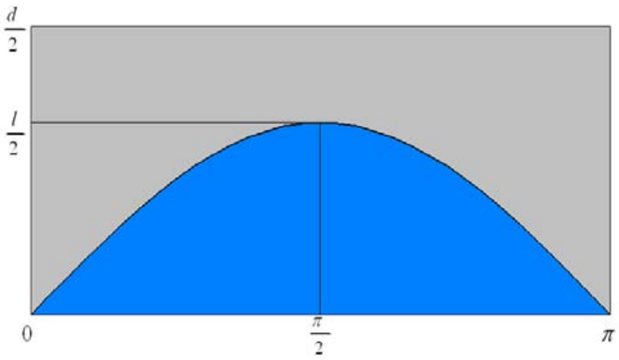
Úloha o jehle

Je suppose que dans une chambre, dont le parquet est simplement divisé par les joints parallèles, on jette en l’air une baguette, & que l’un des joueurs parie que la baguette ne croisera aucune des parallèles du parquet, & que l’autre au contraire parie que la baguette croisera quelques-unes de ces parallèles; on demande le sort de ces deux joueurs. *On peut jouer ce jeu sur un damier avec une aiguille à coudre ou une épingle sans tête.*

Rozšíření – jehla je házena na čtvercovou síť a opět je zjišťována pravděpodobnost, že protne nějakou čáru. Publikovaný výsledek je ale nesprávný.



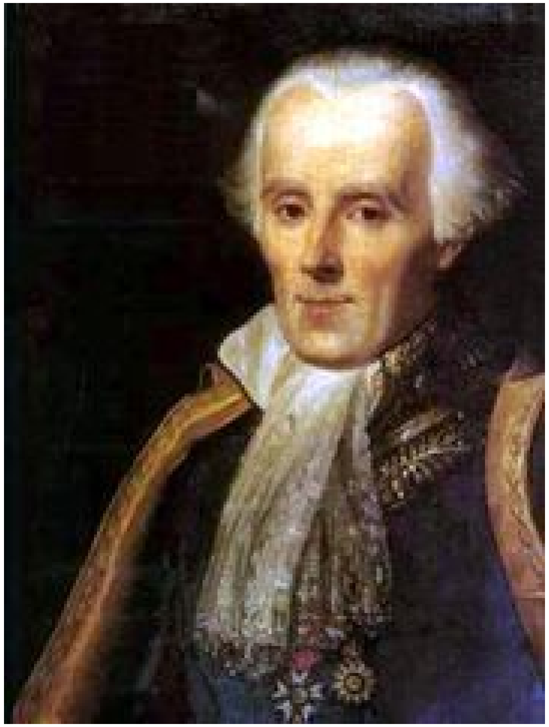
$$y \le \frac{l}{2}\sin\alpha$$



$$P = \frac{\int_0^{\pi} \frac{l}{2}\sin\alpha \,\mathrm{d}\alpha}{\pi \frac{d}{2}} = \frac{l\left[-\cos\alpha\right]_0^{\pi}}{\pi d} = \frac{2l}{\pi d}$$

Pierre-Simon, markýz de Laplace (1749 – 1827)

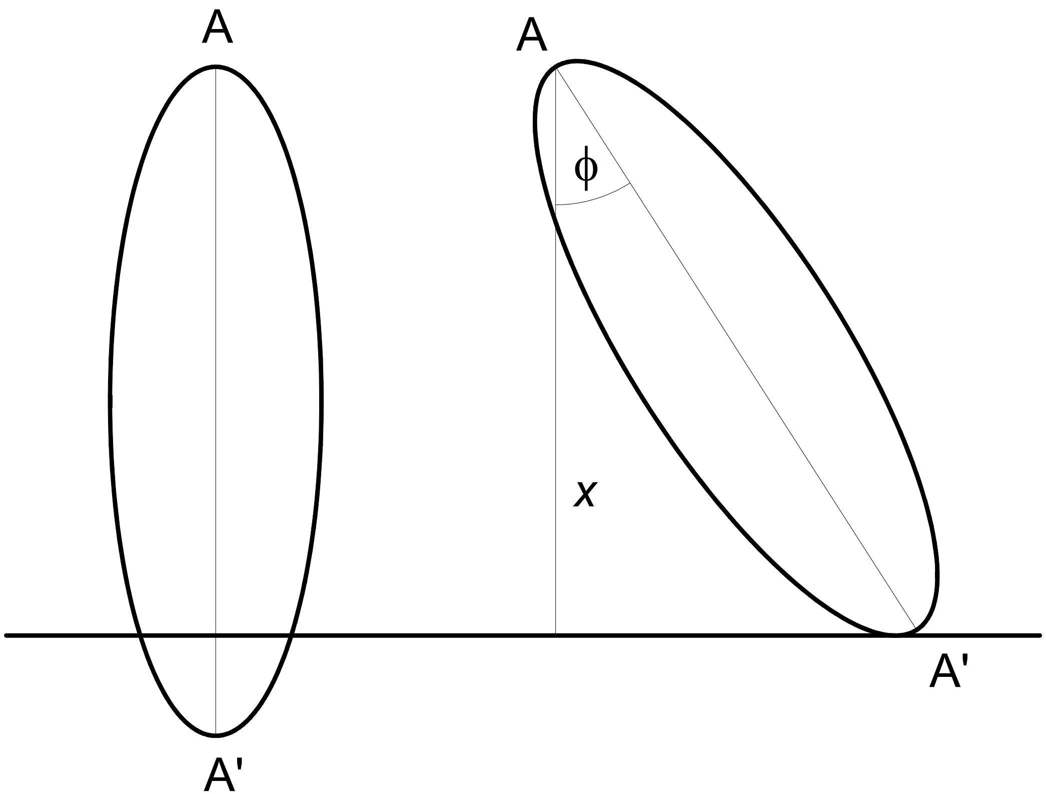
- 1812 - *Théorie analytique des probabilités* - uvádí úlohy o jehle, aniž by zmínil jejich autora, opravuje chybný výsledek.
- Navrhuje, že by se pomocí geometrické pravděpodobnosti daly počítat délky křivek a obsahy obrazců. Uvádí ale jen jediný příklad, totiž obvod jednotkového kruhu.



Isaac Todhunter
(1820 – 1888)

- 1857 - *Treatise on the integral calculus and its applications with numerous examples* – úloha o jehle a zobecnění na elipsu a čtverec
- 1862 - druhé vydání, další zobecnění– místo elipsy je uvažována libovolná uzavřená konvexní křivka, která nemá singulární body
- v dalších vydáních další zobecnění (čtvercová síť, Croftonovy výsledky)

Ellipse



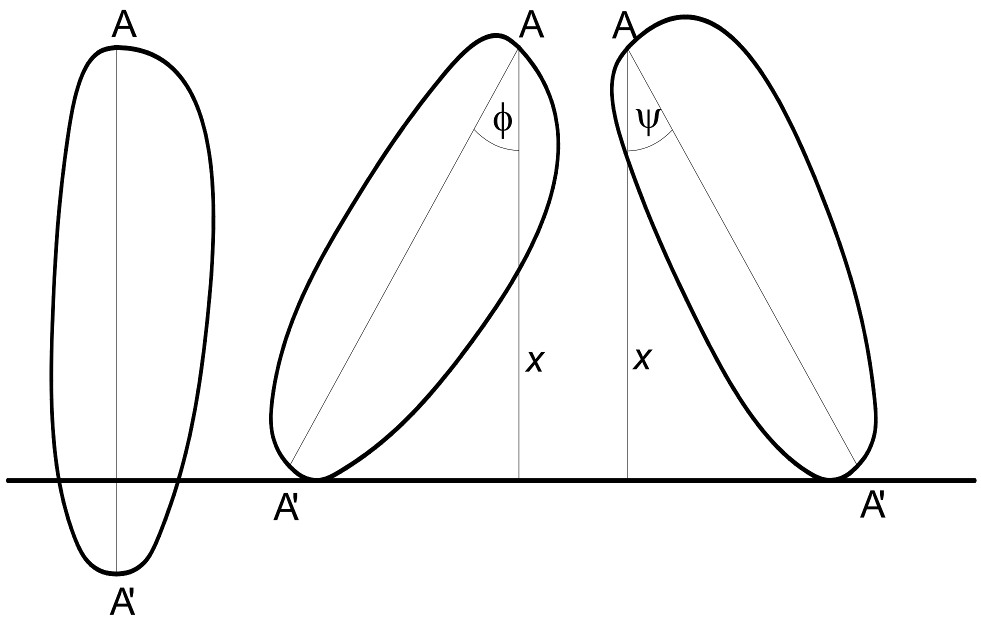
$$P_1 = \frac{2\Phi}{2\pi}$$

$$P_2 = \frac{\Delta x}{b}$$

$$P = 2\int \frac{2\Phi}{2\pi b}\,dx = 2\,\frac{1}{\pi b}\left(\Phi x - \int x\,d\Phi\right)$$

$$P = \frac{2}{\pi b}\int_0^{\pi} x\,d\Phi = \frac{2}{\pi b}\,\frac{L}{2} = \frac{L}{\pi b}$$

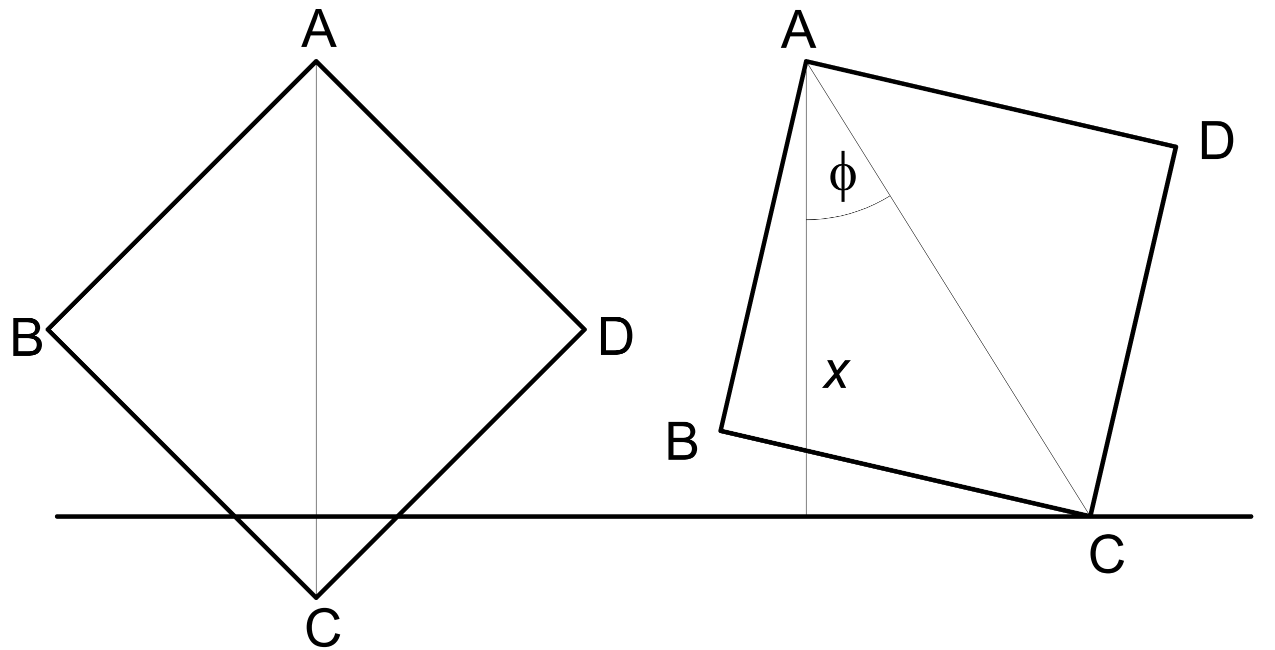
Closed compact curve



$$P = \int \frac{\Phi}{2\pi b}\,dx + \int \frac{\Psi}{2\pi b}\,dx = \frac{1}{2\pi b}\left(\int \Phi\,dx + \int \Psi\,dx\right)$$

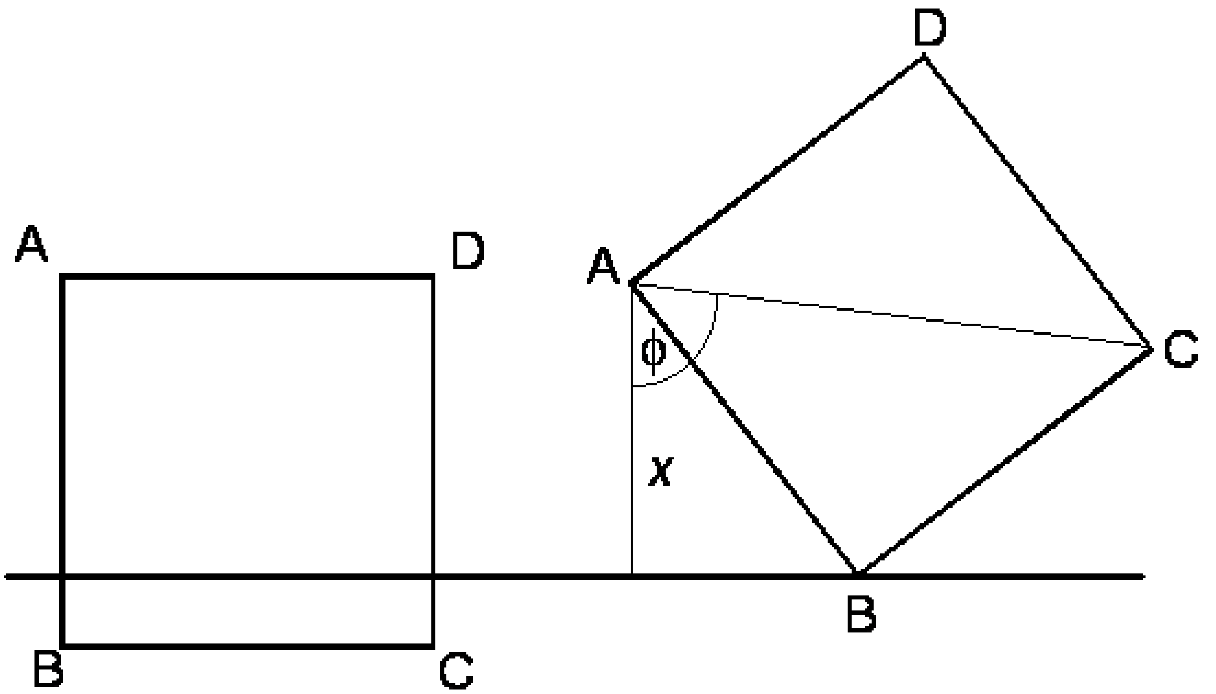
$$P = \frac{1}{2\pi b}\left(\int_0^{\pi} x\,d\Phi + \int_0^{\pi} x\,d\Psi\right) = \frac{1}{2\pi b}(L_1 + L_2) = \frac{1}{2\pi b}L$$

Cube 1



$$0 \le \Phi \le \frac{\pi}{4} \qquad x = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos \Phi$$

Cube 2



$$\frac{\pi}{4} \le \Phi \le \frac{3\pi}{4} \qquad x = a\cos(\Phi - \frac{\pi}{4})$$

$$\frac{3\pi}{4} \le \Phi \le \pi \qquad x = 0$$

Cube 3

$$P_1 = \frac{2\Phi}{2\pi} \qquad\qquad P_2 = \frac{\Delta x}{b}$$

$$P = 2\int \frac{2\Phi}{2\pi b}\,dx = \frac{2}{\pi b}\int \Phi\,dx = \frac{2}{\pi b}(\Phi x - \int x\,d\Phi)$$

$$P = -\frac{2}{\pi b}\int_{\pi}^{0} x\,d\Phi = \frac{2}{\pi b}\int_{0}^{\pi} x\,d\Phi$$

$$P = \frac{2}{\pi b}\int_{0}^{\pi} x\,d\Phi = \frac{2}{\pi b}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}a\cos\Phi\,d\Phi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} a\cos(\Phi - \frac{\pi}{4})\,d\Phi + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} 0\,d\Phi\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi b}(\sqrt{2}a\frac{\sqrt{2}}{2} + a) = \frac{4a}{\pi b}$$

Gabriel Lamé (1795 – 1870)

- 1851 – 1863 katedra pravděpodobnosti, později matematické fyziky na Faculté des sciences pařížské university
- do přednášek zahrnul i zobecnění Buffonovy úlohy pro kruh, elipsu, čtverec a pravidelné mnohoúhelníky

Joseph-Émile Barbier

- 18. 3. 1839 narozen v St Hilaire-Cottes, otec voják
- \- 1857 Collège de St Omer, Lycée Henri IV
- 1857 – 1860 École normale supérieure (Joseph Bertrand, přednášky na universitě – Gabriel Lamé)
- 1860 profesor na lyceu v Nice (špatný učitel), odchází do Paříže, kde pracuje jako asistent astronom v Observatoire de Paris (nový typ teploměru)
- 1865 odchází z observatoře, přetrhá všechny kontakty s přáteli
- 1880 J. Bertrand (tajemník Académie des sciences) ho nachází v ústavu v Charenton-St-Maurice a povzbuzuje ho, aby se dále věnoval matematice.
- 1882 vychází v *Comptes rendus* francouzské Académie des Sciences článek *Deux moyens d'avoir π au jeu de pile ou face*, Barbier za něj získává Francoeurovu cenu; tento nevelký příjem mu umožňuje opustit nemocnici a žít v příjemnějších podmínkách.
- v 80. letech napsal 13 matematických článků
- 28. 1. 1889 umírá v St Genest

Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert (1860, Journal de mathématiques pures et appliquées)

1. část – uvádí známé výsledky (Laplace, Todhunter, Lamé)
– zobecňuje tyto výsledky, shrnuje je do obecné věty:

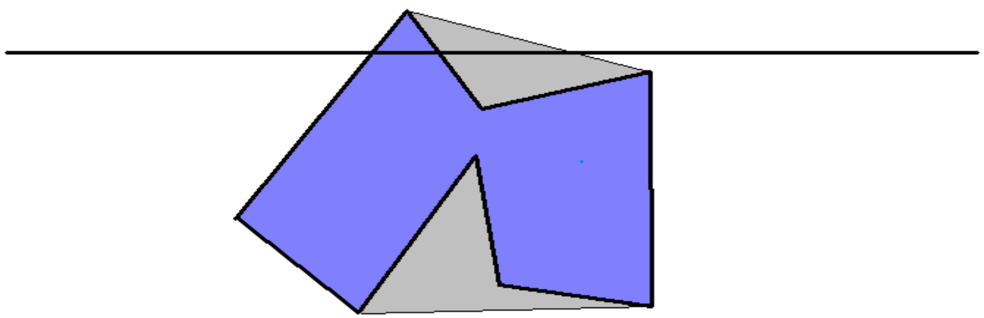
Věta: *Mějme konvexní disk libovolného tvaru, který v žádné pozici nemůže protnout více dělicích čar. Jaká je pravděpodobnost, že nějakou protne? Lze dokázat, že bude*

$$P = \frac{L}{\pi d},$$

kde *L* je obvod disku a *d* vzdálenost mezi rovnoběžkami.

Dk. Každou konvexní křivku lze s libovolnou přesností aproximovat konvexním mnohoúhelníkem, jehož všechny strany jsou stejné. Pravděpodobnost, že tento mnohoúhelník protne nějakou čáru, je stejná jako v případě pravidelného mnohoúhelníka.

- nekonvexní – těsně obtočíme nití a vyplníme mezery mezi nití a obrazcem (konvexní obal), vzniklý konvexní obrazec protne nějakou čáru právě tehdy, když ji protne obrazec původní.



- závěr – stačí vyšetřovat nejjednodušší případ (kruh) a máme výsledek pro všechny konvexní křivky, které mají stejný obvod jako ten kruh, a také pro nekonvexní křivky, jejichž konvexní obaly mají tento obvod
- pro kruh je výpočet triviální

$$P = 2\frac{r}{d} = \frac{2\pi r}{\pi d} = \frac{L}{\pi d}$$

- **2. část** – počítání průsečíků
- Na síť rovnoběžek nebudeme házet disk, ale libovolné flexibilní vlákno délky *L.* Jaká bude střední hodnota počtu průsečíků tohoto vlákna se systémem rovnoběžek? Vlákno můžeme aproximovat lomenou čarou, kde každá část (úsečka) bude mít stejnou délku. Pravděpodobnost, že kterákoli část protne nějakou přímku, je stejná, proto je počet průsečíků úměrný počtu částí a tedy i délce vlákna.

Věta*: Střední hodnota E(N) počtu průsečíků flexibilního vlákna délky L se systémem rovnoběžek, pro něž je vzdálenost každých dvou stejná a rovna d, je*

$$\mathrm{E}(N) = \frac{L}{\pi d}.$$

Správný výsledek je

$$\mathrm{E}(N) = \frac{2L}{\pi d}.$$

- další zobecnění – vlákno nebudeme házet na síť rovnoběžek, ale na rovinu, na které je umístěné jiné flexibilní vlákno tak, že každý čtvereční metr roviny obsahuje stejnou délku tohoto vlákna.
- na čtverečním metru je umístěna úsečka délky d, střední hodnotu počtu průsečíků náhodně hozené jehly s touto úsečkou označme m
- změníme-li polohu úsečky, střední hodnota počtu průsečíků se nezmění
- na čtverečním metru je n úseček délky d, střední hodnota počtu průsečíků bude mn

- **Věta I:** *Rovina obsahuje v každém čtverečním metru flexibilní vlákno délky L metrů. Na tuto rovinu náhodně házeme jiné flexibilní vlákno délky l metrů. Střední hodnota počtu průsečíků těchto vláken je*

$$\mathrm{E}(N) = \frac{2Ll}{\pi}.$$

- Položíme-li $L_A = L$ a označíme-li N_L počet průsečíků na jednotku délky druhého vlákna, získáme známou 2D stereologickou formuli pro délkovou intenzitu

$$[L_A] = \frac{\pi}{2} N_L.$$

- **Věta II:** *Uvažujme nekonečný prostor, ve kterém je umístěna látka tak, že každý kubický metr prostoru obsahuje S čtverečních metrů této látky. Flexibilní vlákno délky l prochází náhodně tímto prostorem. Střední hodnota počtu průsečíků vlákna s látkou je*

$$\mathrm{E}(N) = \frac{Sl}{2}.$$

- Položíme-li $S_V = S$ a označíme-li N_L počet průsečíků na jednotku délky vlákna, získáme známou 3D stereologickou formuli pro plošnou intenzitu

$$[S_V] = 2N_L.$$

- **Věta III:** *Každý kubický metr nekonečného prostoru obsahuje L metrů flexibilního vlákna. Do prostoru umístíme náhodně látku o ploše s čtverečních metrů. Střední hodnota počtu průsečíků vlákna s látkou je*

$$\mathrm{E}(N) = \frac{Ls}{2}.$$

- položíme-li $L_V = L$ a označíme-li P_A počet průsečíků na jednotku plochy, získáme známou 3D stereologickou formuli pro délkovou intenzitu

$$[L_V] = 2P_A$$

- **Věta IV:** *Předpokládejme, že každý čtvereční metr prostoru obsahuje S čtverečních metrů látky. Do tohoto prostoru náhodně vkládáme látku o ploše s čtverečních metrů. Střední hodnota délky průsečnice těchto látek je*

$$\mathrm{E}(B) = \frac{3\pi S s}{2}.$$

- V tomto případě je špatně spočítaná konstanta, má být

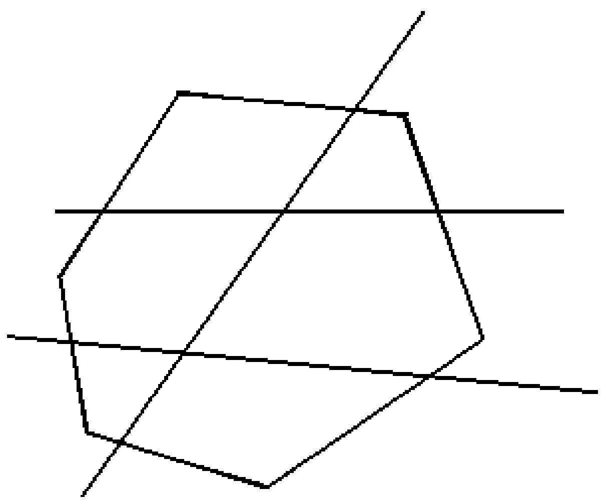
$$\mathrm{E}(B) = \frac{\pi S s}{4}.$$

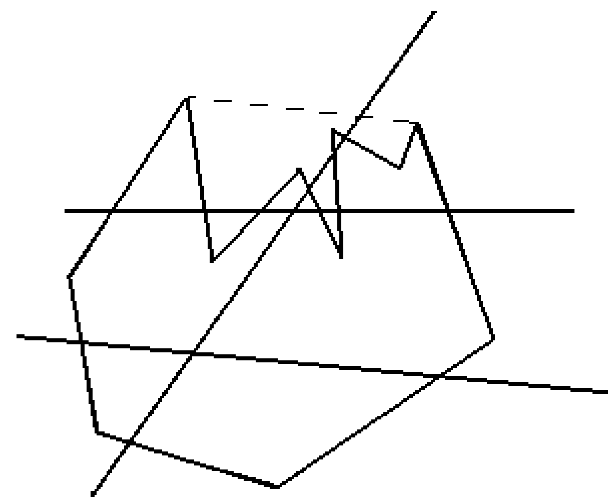
- položíme-li $S_V = S$ a označíme-li B_A délku průsečnice na jednotku plochy druhé látky, získáme známou 3D stereologickou formuli pro plošnou intenzitu

$$[S_V] = \frac{4}{\pi} B_A.$$

- **3. část** – aplikace

- Obvod konvexního obrazce je vždy menší nebo roven obvodu obrazců, jejichž je obalem





- Na disk nakreslíme čáry *E* a *I* tak, že libovolná přímka může protínat *I* v nejvýše *n* bodech a každá přímka, která protíná *I*, musí protnout *E* alespoň v *m* bodech. Potom poměr délek *E:I* je větší než *m/n.*

  Tuto nerovnost zmínil již August Cauchy (1841).

- Jestliže přímka nemůže protnout plochu *I* ve více než *n* bodech a každá přímka, která protíná *I* musí protnout plochu *E* alespoň v *m* bodech. Potom poměr obsahů *E:I* je větší než *m/n.*

  Tento výsledek považuje Barbier za nový, dosud nepublikovaný.

Obrazce a tělesa konstantní šířky

- šířka obrazce je vzdálenost rovnoběžných opěrných přímek
- šířka tělesa je vzdálenost rovnoběžných opěrných rovin

- **Věta** (Barbierova): Všechny obrazce stejné konstantní šířky mají stejný obvod.

  Důkaz: Mějme dva obrazce, které mají konstantní šířku *w.* Zřejmě je střední hodnota počtu průsečíků hranic těchto obrazců se systémem ekvidistantních rovnoběžek stejná. Podle Věty I je tedy obvod obou obrazců stejný.
- Obvod můžeme spočítat třeba pro kruh. Je zřejmě roven πw.

- V 3D podobná věta neplatí. Povrch tělesa konstantní šířky je závislý na jeho tvaru. Největší povrch má koule.

Použití obrazců konstantní šířky

- Uvažujme konvexní obrazec, který může v některé poloze protnout více dělicích rovnoběžek. Jaká je pravděpodobnost, že protne alespoň jednu?
- Položme ho na rovinu tak, že se dotýká jedné rovnoběžky. Otáčejme s ním tak, že se stále dotýká zvolené rovnoběžky a odstraňujme všechny části, které přesahují přes sousední rovnoběžku. Získáme obrazec, který v žádné poloze nemůže protnout více dělicích čar. Jestliže takto získaný obrazec protne nějakou dělicí čáru, potom ji protne i obrazec původní. A pokud původní obrazec protne nějakou dělicí čáru, protne nějakou (třeba jinou) dělicí čáru i tento obrazec. Pravděpodobnosti protnutí jsou tedy pro oba obrazce stejné, rovnají se $L/(\pi d)$, kde d je vzdálenost mezi rovnoběžkami a L je obvod získaného obrazce.