Úvod

Zadání

1. Banka nabízí dva investiční produkty. Očekávaný měsíční výnos prvního investičního produktu (v tis. Kč) při investici x (v tis. Kč) je $\frac{2x}{4x+25}$ a očekávaný měsíční výnos druhého investičního produktu (v tis. Kč) při investici x (v tis. Kč) je $\frac{x}{x+50}$. Jakým způsobem má investor rozdělit částku $c = 100000$Kč mezi uvedené dva investiční produkty tak, aby celkový očekávaný měsíční výnos byl co největší?

2. Ve firmě potřebují nalézt rozměry otevřené krabice (tj. krabice bez horní stěny) se čtvercovou podstavou o objemu $10\,\mathrm{dm}^3$ tak, aby obsah plochy jejího pláště byl co nejmenší. Formulujte odpovídající optimalizační úlohu za předpokladu, že krabice je vyrobena z materiálu, jehož tloušťka je zanedbatelná. Tuto úlohu poté vyřešte.

3. V továrně vyrábějí zboží různých druhů. Označme je $X_1, \ldots, X_n$. Na jejich výrobu potřebují materiály $Y_1, \ldots, Y_m$. Na skladě mají k dispozici množství b_i materiálu Y_i a na trhu ho nakupují za cenu γ_i. Na výrobu jednotkového množství zboží X_j potřebují množství a_{ij} materiálu Y_i. Jednotkové množství výrobku X_j prodávají za cenu σ_j. Formulujte optimalizační úlohu problému nastavení množství výroby jednotlivých druhů produktů (předpokládejte, že hledaná množství nemusí být celočíselná) tak, aby celkový zisk z jejich prodeje byl co největší.

4. V $\mathbb{R}^n$ jsou dány množiny bodů $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ a $B = \{b_1, \ldots, b_l\}$. Ať $w \in \mathbb{R}^n$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že H je nadrovina o rovnici $\langle x, w\rangle + \lambda = 0$, H_1 je nadrovina o rovnici $\langle x, w\rangle + \lambda = 1$ a H_2 je nadrovina o rovnici $\langle x, w\rangle + \lambda = -1$.

   (a) Ukažte, že vzdálenost mezi nadrovinami H_1 a H_2 je $\frac{2}{\|w\|}$. Dále ukažte, že $\frac{1}{\|w\|}$ je vzdálenost H od H_1 a také vzdálenost H od H_2.

   (b) Interpretujte optimalizační úlohu

   $$\begin{aligned} &\text{maximalizujte } g(w,\lambda) = \frac{2}{\|w\|} \\ &\text{za podmínek } \quad \langle a_i, w\rangle + \lambda \geq 1 \text{ pro všechna } i = 1, \ldots, k, \\ &\qquad\qquad\qquad\; \langle b_j, w\rangle + \lambda \leq -1 \text{ pro všechna } j = 1, \ldots, l. \end{aligned}$$

   (c) Ukažte, že $(\hat{w}, \hat{\lambda})$ je řešením úlohy z předchozího bodu právě tehdy, když je řešením úlohy (kvadratického programování) ve tvaru

   $$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } h(w,\lambda) = \frac{1}{2}\|w\|^2 \\ &\text{za podmínek } \quad \langle a_i, w\rangle + \lambda \geq 1 \text{ pro všechna } i = 1, \ldots, k, \\ &\qquad\qquad\qquad\; \langle b_j, w\rangle + \lambda \leq -1 \text{ pro všechna } j = 1, \ldots, l. \end{aligned}$$

5. V rovině jsou dány body $P = (0,0)^T$ a $Q = (1,1)^T$.

(a) Formulujte optimalizační úlohu problému nalezení nejkratší spojnice bodů P a Q. Spojnicí rozumíme křivku danou grafem spojitě diferencovatelné funkce $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

(b) Nalezněte řešení úlohy z předchozího bodu. [1]

6. V rovině jsou dány body $P = (-1,0)^T$ a $Q = (1,0)^T$. Ať L je úsečka s krajními body P a Q.

   (a) Formulujte optimalizační úlohu problému nalezení spojitě diferencovatelné funkce $y : [-1,1] \to \mathbb{R}$, jejíž graf má koncové body P a Q, délku $l = 3$, leží v horní polorovině a spolu s úsečkou L ohraničuje část roviny o největším obsahu.

   (b) Ať $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ je ekvidistantní dělení intervalu $[-1,1]$ (tj. $x_l = l\delta$, kde $\delta = \frac{2}{k}$). Využitím tohoto dělení k aproximaci integrálu pomocí konečné sumy a derivace pomocí diferencí nalezněte optimalizační úlohu v $\mathbb{R}^{k+1}$, jejíž řešení aproximuje řešení úlohy z předchozího bodu.

7. Ať $\varphi : X \to Y$ je bijekce, $D_f \subseteq X$, $D_g \subseteq Y$, $\varphi(D_f) \subseteq D_g$, $M \subseteq D_f$ a $\hat{x} \in M$. Předpokládejme, že funkce $f : D_f \to \mathbb{R}$ a $g : D_g \to \mathbb{R}$ splňují $f = g \circ \varphi$. Ukažte, že $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$ právě tehdy, když $\varphi(\hat{x}) \in \operatorname{argmin}_{y \in \varphi(M)} g(y)$.

8. Uvažme lineární prostor $\mathbb{S}^n = \left\{ A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, A^T = A \right\}$ reálných symetrických $n \times n$ matic se skalárním součinem $\langle A, B \rangle_{\mathbb{S}^n} = \operatorname{Tr}(AB)$.

   (a) Ukažte, že $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ je ortonormální báze na $\mathbb{S}^2$.

   (b) Ukažte, že zobrazení
$$\varphi : \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^2 \mapsto \begin{pmatrix} a \\ \sqrt{2}b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$
   je izomorfizmus lineárního prostoru $\mathbb{S}^2$ na $\mathbb{R}^3$ zachovávající skalární součin (tj.$\langle A, B \rangle_{\mathbb{S}_2} = \langle \varphi(A), \varphi(B) \rangle$ pro všechna $A, B \in \mathbb{S}^2$, kde $\langle ., . \rangle$ je standardní skalární součin na $\mathbb{R}^3$).

   (c) Zobecněte výsledky bodů (a) a (b) do prostoru $\mathbb{S}^n$. Tj. nalezněte ortonormální bázi prostoru $\mathbb{S}^n$ a izomorfizmus lineárního prostoru $\mathbb{S}^n$ na $\mathbb{R}^k$ (pro vhodné $k \in \mathbb{N}$) zachovávající skalární součin.

   (d) Ať $\mathbb{S}^2_+$ je množina všech reálných symetrických 2×2 matic, které jsou navíc pozitivně semidefinitní. Ukažte, že jestliže φ je zobrazení z bodu (b), pak $\varphi(\mathbb{S}^2_+) = \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x \geq 0, z \geq 0, 2xz - y^2 \geq 0 \right\}$.

---

[1] Nápověda: Ukažte, že $g(t) = t$, $t \in [0,1]$, je řešením úlohy. Využijte přitom toho, že pro dvě spojité funkce f_1 a f_2 na intervalu $[0,1]$ je $\int_0^1 (f_1(t), f_2(t))^T \, \mathrm{d}t := \left(\int_0^1 f_1(t) \, \mathrm{d}t, \int_a^b f_2(t) \, \mathrm{d}t \right)^T$ a platí $\left\| \int_0^1 (f_1(t), f_2(t))^T \, \mathrm{d}t \right\| \leq \int_0^1 \left\| (f_1(t), f_2(t))^T \right\| \, \mathrm{d}t$. K důkazu jednoznačnosti pak lze využít tvrzení, že rovnost v uvedené „trojúhelníkové nerovnosti pro integrály“ nastává právě tehdy, když existuje spojitá funkce $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$ taková, že $(f_1(t), f_2(t))^T = \lambda(t) \int_0^1 (f_1(t), f_2(t))^T \, \mathrm{d}t$.

9. Je dána úloha

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte} && \langle X, A\rangle_{\mathbb{S}^2} \\ &\text{za podmínek} && \langle X, \mathbf{1}\rangle_{\mathbb{S}^2} = 2, \\ &&& X \in \mathbb{S}^2_+, \end{aligned}$$

kde $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ukažte[2], že existuje bikejce mezi množinou všech jejích řešení a množinou všech řešení úlohy

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte} && 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ &\text{za podmínek} && x_1 + x_3 = 2, \\ &&& x_1 x_3 - x_2^2 \geq 0, \\ &&& x_1, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

10. Je dána úloha

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte} && \langle X, A\rangle_{\mathbb{S}^2} \\ &\text{za podmínek} && \langle X, B\rangle_{\mathbb{S}^2} = 0, \\ &&& \langle X, \mathbf{1}\rangle_{\mathbb{S}^2} = 1, \\ &&& X \in \mathbb{S}^2_+, \end{aligned}$$

kde $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ukažte[3], že existuje bikejce mezi množinou všech jejích řešení a množinou všech řešení úlohy

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte} && 2x - y \\ &\text{za podmínek} && x + y = 1, \\ &&& x, y \geq 0. \end{aligned}$$

11. Určete definitnost matice A, jestliže

   (a) $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$;

   (b) $A = \begin{pmatrix} 15 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

   (c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

   (d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

[2] Nápověda: využijte výsledků 7. a 8. příkladu.

[3] Nápověda: využijte výsledků 7. a 8. příkladu.

(e) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$;

(f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Ať $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

    (a) Ukažte, že $\langle Ax, y \rangle = \left\langle x, A^T y \right\rangle$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^n$.

    (b) Ukažte, že existují matice $B, C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ takové, že $B^T = B$, $C^T = -C$ a $A = B + C$. Jsou matice B a C určeny jednoznačně?

    (c) Ukažte, že existuje symetrická matice $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ taková, že $\langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle$.

13. Nalezněte $\nabla f(x)$ a $\nabla^2 f(x)$, jestliže

    (a) $f(x) = \langle x, c \rangle$, kde $c \in \mathbb{R}^n$;

    (b) $f(x) = \langle Ax, x \rangle$, kde $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Určete také $\nabla f(x)$ a $\nabla^2 f(x)$ za dodatečného předpokladu, že A je symetrická matice.

Výsledky

1.

$$\begin{aligned} \text{maximalizujte}\quad & \frac{2x}{4x+25}+\frac{y}{y+50} \\ \text{za podmínek}\quad & x+y=100, \\ & x,y\geq 0. \end{aligned}$$

Jediné řešení úlohy je $x = 25$ a $y = 75$.

2.

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte}\quad & x^2+4xy \\ \text{za podmínek}\quad & x^2y=10, \\ & x,y\geq 0. \end{aligned}$$

Jediné řešení úlohy je $x = \sqrt[3]{20}$ a $y = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$

3.

$$\begin{aligned} \text{maximalizujte}\quad & \sum_{j=1}^{n}\left(\sigma_j-\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\gamma_i\right)x_j \\ \text{za podmínek}\quad & \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leq b_i \text{ pro každé } i=1,\dots,m, \\ & x_j\geq 0 \text{ pro každé } j=1,\dots,n. \end{aligned}$$

4. (b) Jedná se o úlohu nalezení w a λ tak, aby byla vzdálenost mezi H_1 a H_2 byla co největší za podmínky, že poloprostor určený nadrovinou H_1 a obsahující množinu A je disjunktní s poloprostorem určeným nadrovinou H_2 a obsahujícím množinu B.

5. (a)

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte}\quad & \int_0^1\sqrt{1+(f'(t))^2}\,\mathrm{d}t \\ \text{za podmínek}\quad & f(0)=0, \\ & f(1)=1, \\ & f:[0,1]\to\mathbb{R} \text{ je spojitě diferencovatelná.} \end{aligned}$$

(b) Jediné řešení úlohy je $g(t) = t$, $t \in [0, 1]$.

6. (a)

$$\begin{aligned} \text{maximalizujte} \quad & \int_{-1}^{1} y(x)\,\mathrm{d}x \\ \text{za podmínek} \quad & \int_{-1}^{1} \sqrt{1+y'(x)^2}\,\mathrm{d}x = 3, \\ & y(x) \geq 0 \text{ pro všechna } x \in [-1,1], \\ & y(-1) = y(1) = 0, \\ & y : [-1,1] \to \mathbb{R} \text{ je spojitě diferencovatelná.} \end{aligned}$$

(b) Ať $y_l = f(x_l)$ pro všechna $l = 0, 1, \ldots, n$. Pak hledaná úloha je

$$\begin{aligned} \text{maximalizujte} \quad & \sum_{l=1}^{n} y_l \delta \\ \text{za podmínek} \quad & \sum_{l=1}^{n} \sqrt{\delta^2 + (y_l - y_{l-1})^2} = 3, \\ & y_0 = y_n = 0, \\ & y_l \geq 0 \quad \text{pro všechna } l = 0, 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

8. (c) Ať E_{ij} je matice, jejíž koeficient v i-tém řádku a j-tém sloupci je 1 a všechny ostatní koeficienty jsou nulové. Ortonormální báze je například posloupnost $(B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{13}, B_{23}, B_{33}, \ldots, B_{1n}, \ldots, B_{nn})$, kde $B_{ii} = E_{ii}$ pro $1 \leq i \leq n$ a $B_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij} + E_{ji})$, kde $1 \leq i < j \leq n$. Hledaný izomorfismus mezi $\mathbb{S}^n$ a $\mathbb{R}^k$, kde $k = \frac{n^2+n}{2}$ je například

$$\varphi : (s_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{S}^n \mapsto (s_{11}, \sqrt{2}s_{12}, s_{22}, \sqrt{2}s_{13}, \sqrt{2}s_{23}, s_{33}, \ldots, \sqrt{2}s_{1n}, \ldots, s_{nn}).$$

11. Určete definitnost matice A, jestliže

(a) pozitivně semidefinitní;

(b) pozitivně definitní;

(c) indefinitní;

(d) indefinitní;

(e) negativně semidefinitní;

(f) pozitivně semidefinitní.

13. (a) $\nabla f(x) = c$ a $\nabla^2 f(x) = 0$.

(b) $\nabla f(x) = (A + A^T)x$ a $\nabla^2 f(x) = A + A^T$. Pokud je navíc A symetrická, pak $\nabla f(x) = 2Ax$ a $\nabla^2 f(x) = 2A$.