Konvexní množiny

Zadání

1. Ať $x, y \in \mathbb{R}^n$ jsou dva různé body. Z definice ukažte, že přímka
$$L = \{\alpha x + (1-\alpha)y \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}$$
procházející těmito body je konvexní množina.

2. Ukažte, že množina $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní mnohostěn a navíc tento mnohostěn načrtněte v případě $n = 2$, jestliže
   (a) $C = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1\}$;
   (b) $C = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \max_{i\in\{1,\dots,n\}} |x_i| \leq 1\right\}$;

3. Ať C_1, C_2 jsou konvexní množiny v $\mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Ukažte, že
   (a) $C_1 + C_2 = \{x + y \,|\, x \in C_1, y \in C_2\}$ je konvexní množina;
   (b) $\alpha C_1 = \{\alpha x \,|\, x \in C_1\}$ je konvexní množina;

4. Napište konvexní obal množiny $M = \{(0,0)^T, (0,2)^T, (1,1)^T, (2,1)^T\}$ jako průnik tří polorovin.

5. Nechť M a N jsou dvě množiny v $\mathbb{R}^n$. Ukažte, že
   (a) $M \subseteq \operatorname{conv}(M)$;
   (b) jestliže $M \subseteq N$, potom $\operatorname{conv}(M) \subseteq \operatorname{conv}(N)$;
   (c) $\operatorname{conv}(\operatorname{conv}(M)) = \operatorname{conv}(M)$;
   (d) $\operatorname{conv}(M + N) = \operatorname{conv}(M) + \operatorname{conv}(N)$.

6. Nechť M a N jsou dvě množiny v $\mathbb{R}^n$. Ukažte, že
$$\operatorname{conv}(M \cap N) \subseteq \operatorname{conv}(M) \cap \operatorname{conv}(N).$$
Je $\operatorname{conv}(M \cap N) = \operatorname{conv}(M) \cap \operatorname{conv}(N)$? Pokud ne, nalezněte protipříklad.

7. Nalezněte $\operatorname{conv}\left(\{(1,1)^T, (1,2)^T\}\right) + \operatorname{conv}\left(\{(2,1)^T, (3,2)^T\}\right)$. Nakreslete tuto množinu v rovině a popište ji jako průnik nejvýše čtyř polorovin.

8. Je dána matice $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Ať $L = \{Ax \,|\, x \in \mathbb{R}^n\}$.
   (a) Ukažte, že A má lineárně nezávislé sloupce právě tehdy, když A^TA je invertibilní.
   (b) Ukažte, že má-li A lineárně nezávislé sloupce, pak $P_L(x) = A(A^TA)^{-1}A^Tx$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$.
   (c) Ukažte, že má-li matice A sloupce $a_1, \dots a_n$, které jsou nenulové a vzájemně ortogonální, pak
$$P_L(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\langle x, a_i\rangle}{\|a_i\|^2} a_i.$$

9. Nechť $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ a $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = b\}$. Ukažte, že

$$P_C(x) = x - \frac{\langle x, y \rangle - b}{\|y\|^2} y.$$

10. Ať $C = \mathbb{R}^n_+$. Ukažte, že $P_C(x) = x^+$, kde $x^+ \in \mathbb{R}^n_+$ je vektor o komponentách $x_i^+ = \max\{0, x_i\}$ $(i = 1, \dots, n)$.

11. Jsou dány body $a = (-2, -1)^T, b = (-1, -2)^T, c = (0, 0)^T, d = (1, 2)^T$. Metodou nejmenších čtverců proložte těmito body graf

    (a) afinní funkce $f(x) = \alpha x + \beta$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

    (b) funkce $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, kde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

12. Při působení síly velikosti F má pružina délku L. Naměřené hodnoty délky pružiny v závislosti na velikosti působící síly jsou uvedeny v tabulce.

F [N]	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
L [cm]	4,9	6,7	8,4	9,2	10,7	12,2	13,5	15,9	16,8

Předpokládejte, že délka pružiny se řídí Hookovým zákonem ve tvaru $L = a + bF$, kde a je délka pružiny bez zatížení a b je převrácená hodnota tuhosti pružiny. Metodou nejmenších čtverců nalezněte koeficienty a a b. (K výpočtu využijte vhodný software.)

13. Jsou dány body $(x, y)^T$ v rovině, jejichž souřadnice jsou uvedeny v tabulce.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y	0,33	0,60	0,82	0,75	1,16	1,36	1,41	1,67	1,75
x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
y	2,07	2,07	2,34	2,32	2,72	2,75	2,88	2,89	3,09
x	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7
y	3,32	3,12	3,29	3,16	3,29	3,08	3,10	3,13	3,02

S využitím vhodného softwaru nalezněte pomocí metody nejmenších čtverců neznámé parametry ve funkci $f(x)$ (a tuto funkci vykreslete do společného grafu se zadanými body), která je matematickým modelem závislost y na x, jestliže

(a) $f(x) = a_1 x + a_0$;

(b) $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$;

(c) $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$;

(d) $f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$;

(e) $f(x) = a_0 + a_1 \sin x + a_2 \cos x$.

14. Vysílač vysílá v časovém rozmezí 1 až 3 časové jednotky diskrétní signál $(2,4,3)^T$. Signál se dostane do přijímače po dvou drahách L_1 a L_2 s časovým spožděním. Od vysílače k přijímači se signál dostane po L_1 za 10 časových jednotek a po L_2 za 12 časových jednotek. Signál měřený přijímačem v časovém rozmezí 10 až 14 časových jednotek je $(1,3,3,2,1)^T$. Předpokládejte, že přijímač bude signál šířící se po dráze L_i $(i = 1,2)$ detekovat utlumený ve tvaru $a_i(2,4,3)$, kde $a_i \in \{0,1\}$ je koeficient útlumu signálu na dráze L_i. Metodou nejmenších čtverců nalezněte koeficienty a_1 a a_2.

15. Ať $w_1, \dots, w_m$ jsou kladná reálná čísla a $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ má řádky $a_1, \dots, a_m$. Je dána úloha (váhovaných nejmenších čtverců) minimalizujte funkci $f(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i(\langle a_i^T, x\rangle - b_i)^2$ na $\mathbb{R}^n$.

    (a) Formulujte uvedenou úlohu jako obyčejnou úlohu nejmenších čtverců (tj. nalezněte $B \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $c \in \mathbb{R}^m$ tak, aby $f(x) = \|Bx - c\|^2$).

    (b) Ukažte, že má-li A lineárně nezávislé sloupce, potom jediné řešení uvedené optimalizační úlohy je $\hat{x} = (A^T W A)^{-1} A^T W b$, kde W je diagonální matice $\operatorname{diag}(w_1, \dots, w_n)$.

16. Měřením bylo zjištěno prvních 20 koeficientů diskrétního signálu $(y_n)_{n=0}^{\infty}$, které jsou uvedeny v tabulce.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_n	1,84	0,29	0,78	2,00	0,42	0,46	2,00	0,80	0,31	1,80
n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y_n	0,95	0,35	1,54	1,15	0,36	1,32	1,38	0,35	1,21	1,37

S využitím vhodného softwaru nalezněte pomocí metody nejmenších čtverců neznámé parametry matematického modelu pro predikci koeficientů signálu, jestliže

(a) $y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + a_3 y_{n-3}$ pro $n \geq 3$;

(b) $y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + a_3 y_{n-3} + a_4 y_{n-4} + a_5 y_{n-5}$ pro $n \geq 5$.

Kromě toho vykreslete v obou případech členy y_n pro $n \leq 100$ a diskutujte rozdíl ve výsledcích uvedených dvou modelů.

17. Ať závislost výstupního signálu $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ systému na vstupním signálu $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ je dána konvolucí posloupnosti $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ s posloupností $(h_n)_{n=0}^{\infty}$ ($(h_n)_{n=0}^{\infty}$ popisuje odezvu systému na jednotkový impulz), tj. $y_n = \sum_{i=0}^{n} h_i x_{n-i}$. Předpokládejte dále, že $h_n = 0$ pro všechna $n \geq 4$. Měřením byla zjištěna hodnota koeficientů $y_0, \dots, y_{20}$ výstupního signálu, když na vstupu byl signál s počátečními koeficienty $x_0, \dots, x_{20}$. Formulujte úlohu nejmenších čtverců pro nalezení koeficientů h_0, h_1, h_2, h_3.

Výsledky

4. $\mathrm{conv}\,(M) = C_1 \cap C_2 \cap C_3$, kde $C_i = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, v_i \rangle \leq \alpha_i\}$, $v_1 = (-1,0)^T, v_2 = (1,-2)^T, v_3 = (1,2)^T, \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ a $\alpha_3 = 4$.

6. Pro $M = \{0,2\}, N = \{1,3\}$ je

$$\emptyset = \mathrm{conv}\,(M \cap N) \neq \mathrm{conv}\,(M) \cap \mathrm{conv}\,(N) = [1,2].$$

7. $\mathrm{conv}\,(M) = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4$, kde $C_i = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, v_i \rangle \leq \alpha_i\}$, $v_1 = (-1,0)^T, v_2 = (1,-1)^T, v_3 = (-1,1)^T, v_3 = (1,0)^T, \alpha_1 = -3, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 4$.

11. (a) $\alpha = \frac{11}{10}, \beta = \frac{3}{10}$;
    (b) $\alpha = \frac{3}{4}, \beta = \frac{37}{20}, \gamma = -\frac{9}{20}$.

12. $a \approx 5,03\,\mathrm{cm}$ a $b \approx 2,95\,\mathrm{cm/N}$.

13. (a) $a_1 \approx 1,13, a_0 \approx 0,7$;
    (b) $a_2 \approx -0,55, a_1 \approx 2,68, a_0 \approx -0,05$;
    (c) $a_3 \approx -0,22, a_2 \approx 0,37, a_1 \approx 1,63, a_0 \approx 0,21$;
    (d) $a_4 \approx 0,01, a_3 \approx -0,29, a_2 \approx 0,50, a_1 \approx 1,54, a_0 \approx 0,23$;
    (e) $a_2 \approx -1,13, a_1 \approx 1,47, a_0 \approx 1,37$.

14. $a_1 = \frac{113}{161} \approx 0,7, a_2 = \frac{71}{161} \approx 0,44$.

15. (a) minimalizujte $f(x) = \left\| W^{\frac{1}{2}} A x - W^{\frac{1}{2}} b \right\|^2$, kde $W = \mathrm{diag}(w_1, \ldots, w_n)$.

16. (a) $a_1 \approx 0,18, a_2 \approx -0,14, a_3 \approx 0,96$;
    (b) $a_1 \approx -0,37, a_2 \approx -0,35, a_3 \approx 0,91, a_4 \approx 0,49, a_5 \approx 0,31$.

17. Minimalizujte $f(x) = \|Ax + b\|^2$, kde A je matice s řádky $a_1 = (x_0, 0, 0, 0), a_2 = (x_1, x_0, 0, 0), \ldots, a_{20} = (x_{20}, x_{19}, x_{18}, x_{17})$ a $b = (y_0, \ldots, y_{20})^T$.