Konvexní funkce

Zadání

1. Ukažte, že $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + xy - 2xz$ je ryze konvexní.

2. Ukažte, že funkce $f(x, y, z) = 2xy + 2x^2 + y^2 + 2z^3 - 5xz$ je konvexní na množině $C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z \geq \frac{25}{24}\right\}$. Může být f konvexní na nějaké otevřené množině obsahující C?

3. Ukažte, že množina M je konvexní, jestliže

   (a) $M = \left\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + y^2 \leq 5, x^2 - y \leq 10, x \geq 0, y \geq 0\right\}$;

   (b) $M = \left\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2e^{-x+y^2} \leq 4, -x^2 + 3xy - 3y^2 \geq -1\right\}$.

4. Nalezněte největší množinu C, na které je funkce $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$

   (a) ryze konvexní;

   (b) ryze konkávní.

5. Je dána funkce $f(x) = \langle Ax, x\rangle$, kde $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr. Nalezněte všechny hodnoty parametru α tak, aby f byla konvexní.

6. Pro jaké všechny hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ je funkce
$$f(x, y, z) = 2xz - x^2 - y^2 - 5z^2 - 2\alpha xy - 4yz$$
konkávní?

7. Ukažte, že
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(x_i) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$
je konvexní.

8. Epigraf funkce $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, je množina
$$\operatorname{epi}(f) := \{(x, \mu) \in D \times \mathbb{R} \,|\, f(x) \leq \mu\}.$$

   (a) Ať $C \subseteq D$ je neprázdná množina. Ukažte, že f je konvexní na C právě tehdy, když $\operatorname{epi}(f|_C)$ je konvexní množina.

   (b) Ať $(f_i)_{i\in I}$ je neprázdný systém funkcí konvexních na neprázdné množině $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Využitím (a) ukažte, že je-li $\{f_i(x) \,|\, i \in I\}$ shora omezená pro každé $x \in C$, pak funkce definovaná předpisem
$$f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$$
je konvexní na C. (Nápověda: ukažte, že $\operatorname{epi}(f|_C) = \bigcap_{i\in I} \operatorname{epi}(f_i|_C)$.)

   (c) Ukažte, že $f(x) = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, je konvexní.

Výsledky

2. Nemůže být konvexní na otevřené množině obsahující C, protože Hessova matice nebude ve všech bodech takové množiny pozitivně semidefinitní.

4. (a) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$;
   (b) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$.

5. $\alpha \geq 2$.

6. $-\frac{4}{5} \leq \alpha \leq 0$.