Podmínky optimality

Zadání

1. Ukažte, že funkce $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2 - 10x_1 - 22x_2$ je konvexní. Dále nalezněte všechny její body minima.

2. Ať $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$. Je dána úloha (nejmenších čtverců)

$$\text{minimalizujte } f(x) = \|Ax - b\|^2 \text{ na } \mathbb{R}^n.$$

   (a) Ukažte, že se jedná o konvexní úlohu.

   (b) Ukažte na základě podmínek optimality pro konvexní úlohu, že $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$ právě tehdy, když $A^T A\hat{x} = A^T b$.

3. Ať $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $D \in \mathbb{M}_{r,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ a $\lambda > 0$. Je dána úloha[1]

$$\text{minimalizujte } f(x) = \|Ax - b\|^2 + \lambda \|Dx\|^2 \text{ na } \mathbb{R}^n.$$

   (a) Ukažte, že se jedná o konvexní úlohu.

   (b) Ukažte, že $f(x) = \left\langle (A^T A + \lambda D^T D)x, x \right\rangle - 2\langle Ax, b\rangle + \|b\|^2$.

   (c) Ukažte na základě podmínek optimality pro konvexní úlohu, že $\hat{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in M} f(x)$ právě tehdy, když $A^T A\hat{x} + D^T D\hat{x} = A^T b$.

   (d) Ať $m = n = r + 1 = 20$, $A = \mathbf{1}$ je jednotková matice,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Komponenty vektoru b jsou uvedeny v tabulce.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_n	1,02	1,06	1,08	1,15	1,17	1,20	1,23	1,23	1,24	1,31
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b_n	1,29	1,33	1,34	1,38	1,41	1,40	1,42	1,49	1,48	1,47
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
b_n	1,51	1,53	1,53	1,53	1,56	1,61	1,62	1,58	1,63	1,61
n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
b_n	1,64	1,61	1,61	1,60	1,65	1,62	1,62	1,66	1,62	1,63
n	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
b_n	1,63	1,63	1,60	1,60	1,60	1,54	1,55	1,52	1,55	1,48

   S využitím výpočetní techniky nalezněte řešení $\hat{x}$ zadané úlohy pro následující hodnoty parametru λ: $\lambda = 1$, $\lambda = 5$, $\lambda = 100$, $\lambda = 1000$ a $\lambda = 10000$.[2]

---

[1] Jedná se o úlohu regularizovaných nejmenších čtverců. Parametr λ se nazývá regularizační konstanta.

[2] Interpretace uvedené úlohy může být následující. Komponenty vektoru b jsou naměřené hodnoty signálu ovlivněného šumem. Řešení zadané úlohy pak odpovídá signálu po „odstranění“ šumu. Díky volbě matice D požadujeme, aby se sousední komponenty v $\hat{x}$ příliš nelišily, neboť $\|Dx\|^2 = \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1})^2$. Tedy původní signál „vyhlazujeme“.

4. Je dána optimalizační úloha

$$\begin{aligned}\text{minimalizujte}\ & x_1^4 + x_2^4 + 12x_1^2 + 6x_2^2 - x_1x_2 - x_1 - x_2\\ \text{za podmínek}\ & x_1 + x_2 \geq 6,\\ & 2x_1 - x_2 \geq 3,\\ & x_1, x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

Napište KKT podmínky pro tuto úlohu a ukažte, že $(3,3)^T$ je jediný bod minima.

5. Je dána úloha

$$\begin{aligned}\text{maximalizujte}\ & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2\\ \text{za podmínek}\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 6,\\ & -x_1 + 2x_2 \leq 3,\\ & x_1 \leq 2.\end{aligned}$$

(a) Napište KKT podmínky.
(b) Jsou splněny předpoklady věty O nutných KKT podmínkách?
(c) Jsou splněny předpoklady věty O postačujících KKT podmínkách?
(d) Ověřte, že vektor $(2,0)^T$ je KKT bod. Je to řešení úlohy?

6. Je dána úloha

$$\begin{aligned}\text{minimalizujte}\ & \alpha x_1 + x_2\\ \text{za podmínek}\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 25,\\ & x_1 - x_2 \leq 1,\end{aligned}$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr.

(a) Jsou splněny předpoklady věty O nutných KKT podmínkách?
(b) Jsou splněny předpoklady věty O postačujících KKT podmínkách?
(c) Napište KKT podmínky.
(d) Určete α tak, aby vektor $(4,3)^T$ byl řešením úlohy.

7. Ať $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $b \in \mathbb{R}^m$. Je dána úloha

$$\begin{aligned}\text{minimalizujte}\ & \|Ax - b\|^2\\ \text{za podmínky}\ & \|x\|^2 \leq \alpha,\end{aligned}$$

kde $\alpha > 0$ je parametr. Nalezněte KKT podmínky. Jsou nutné a postačující pro body minima?

8. Ať $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Uvažte úlohu

$$\begin{aligned}\text{maximalizujte}\ & \langle x, c\rangle\\ \text{za podmínky}\ & \|x\|^2 \leq 1.\end{aligned}$$

Napište KKT podmínky a pomocí nich zdůvodněte, že jediné řešení úlohy je $\hat{x} = \frac{c}{\|c\|}$.

9. Je dána úloha

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } \frac{x_1}{x_2} \\ &\text{za podmínek } \quad \frac{1}{x_1} + x_2 \leq 2, \\ &\qquad\qquad\qquad\quad x_1, x_2 > 0. \end{aligned}$$

(a) Ukažte, že uvedená úloha není konvexní.

(b) Zkoumejte souvislost s úlohou

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } e^{y_1 - y_2} \\ &\text{za podmínek } \quad e^{-y_1} + e^{y_2} \leq 2. \end{aligned}$$

(Nápověda: Uvažte substituci $x_1 = e^{y_1}$ a $x_2 = e^{y_2}$.)

(c) Ukažte, že úloha z bodu (b) je konvexní.

(d) Řešte zadanou úlohu pomocí úlohy z bodu (b).

Výsledky

1. $(1,2)^T$.

4. KKT podmínky jsou

$$\begin{aligned}
4x_1^3 + 24x_1 - x_2 - 1 - \mu_1 - 2\mu_2 - \mu_3 &= 0,\\
4x_2^3 + 12x_2 - x_1 - 1 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_4 &= 0,\\
\mu_1(6 - x_1 - x_2) &= 0,\\
\mu_2(3 - 2x_2 + x_2) &= 0,\\
\mu_3 x_1 &= 0,\\
\mu_4 x_2 &= 0,\\
\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 &\geq 0.
\end{aligned}$$

5. (a) KKT podmínky jsou

$$\begin{aligned}
-2(x_1 - 2) - 3\mu_1 - \mu_2 + \mu_3 &= 0,\\
-2(x_2 - 3) - 2\mu_1 + 2\mu_2 &= 0,\\
\mu_1(6 - 3x_1 - 2x_2) &= 0,\\
\mu_2(-x_1 + 2x_2 - 3) &= 0,\\
\mu_3(x_1 - 2) &= 0,\\
\mu_1, \mu_2, \mu_3 &\geq 0.
\end{aligned}$$

   (b) ano (je splněna afinní podmínka regularity).

   (c) ne (přepíšeme-li úlohu na minimalizační, pak cílová funkce není konvexní).

   (d) $(2,0)^T$ je řešení úlohy. (Nápověda: existence řešení je zaručena z Weierstrassovy věty.)

6. (a) Ano (je splněna Slaterova podmínka regularity).

   (b) Ano.

   (c) KKT podmínky jsou

$$\begin{aligned}
\alpha + 2\mu_1 x_1 + \mu_2 &= 0,\\
1 + 2\mu_1 x_2 - \mu_2 &= 0,\\
\mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 25) &= 0,\\
\mu_2(x_1 - x_2 - 1) &= 0,\\
\mu_1, \mu_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

   (d) $\alpha \leq -1$.

7. KKT podmínky jsou

$$\begin{aligned}
A^T A x + \mu x &= 0,\\
\mu(\|x\|^2 - \alpha) &= 0,\\
\mu &\geq 0.
\end{aligned}$$

   KKT podmínky jsou nutné i postačující podmínky pro body minima.

8. KKT podmínky jsou

$$\begin{aligned} -c + 2\mu x &= 0, \\ \mu(\|x\|^2 - 1) &= 0, \\ \mu &\geq 0. \end{aligned}$$

9. (b) Ať $\varphi(y) = (e^{y_1}, e^{y_2})$. Pak $\hat{y}$ je řešením úlohy z bodu (a) právě tehdy, když $\hat{x} = \varphi(\hat{y})$ je řešení původní úlohy.

   (d) Jediné řešení je vektor $(1, 1)^T$.