Dualita

Zadání

1. Ať $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

   (a) Ukažte, že je-li $m = n$ a $M \subseteq D_f \cap D_g$, pak

   $$\inf_{x\in M} f(x) + \inf_{x\in M} g(x) \leq \inf_{x\in M} f(x) + g(x).$$

   (b) Ukažte, že jsou-li $M \subseteq D_f$ a $N \subseteq D_g$ neprázdné, pak

   $$\inf_{x\in M} f(x) + \inf_{y\in N} g(y) = \inf_{(x,y)^T\in M\times N} f(x) + g(y).$$

2. Je dána úloha

   $$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & x_1 + 2x_2 \\ \text{za podmínek } & x_1 + x_2 \geq 1, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

   (a) Nalezněte k ní duální úlohu, jestliže $x_1, x_2 \geq 0$ bereme jako přímé omezení.

   (b) Nalezněte k ní duální úlohu, jestliže přímé omezení bereme ve tvaru $x \in \mathbb{R}^2$.

3. Je dána úloha

   $$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{za podmínek } & x_1 + x_2 \geq 4, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

   (a) Nalezněte k ní duální úlohu, jestliže $x_1, x_2 \geq 0$ bereme jako přímé omezení. Řešte duální úlohu a tento výsledek použijte k nalezení řešení původní úlohy.

   (b) Nalezněte k ní duální úlohu, jestliže přímé omezení bereme ve tvaru $x \in \mathbb{R}^2$. Řešte duální úlohu a tento výsledek použijte k nalezení řešení původní úlohy.

4. Nalezněte duální úlohu k úloze

   $$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & x_1 - 4x_2 + x_3^4 \\ \text{za podmínek } & x_1 + x_2 + x_3^2 \leq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

   Přímé omezení uvažujte ve tvaru $x_1, x_2 \geq 0$.

5. V $\mathbb{R}^n$ jsou dány množiny bodů $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ a $B = \{b_1, \ldots, b_l\}$. Ať $w \in \mathbb{R}^n$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. K úloze

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizujte} & h(w, \lambda) = \dfrac{1}{2} \|w\|^2 \\ \text{za podmínek} & \langle a_i, w \rangle + \lambda \geq 1 \text{ pro všechna } i = 1, \ldots, k, \\ & \langle b_j, w \rangle + \lambda \leq -1 \text{ pro všechna } j = 1, \ldots, l. \end{array}$$

zkonstruujte úlohu duální (přímé omezení je $w \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$).

Výsledky

2. (a)

$$\begin{aligned} \text{maximalizujte}\ & \mu \\ \text{za podmínky}\ & \mu \leq 1 \\ & \mu \geq 0. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \text{maximalizujte}\ & \mu_1 \\ \text{za podmínek}\ & 1 - \mu_1 - \mu_2 = 0, \\ & 2 - \mu_1 - \mu_3 = 0 \\ & \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0. \end{aligned}$$

3. (a)

$$\begin{aligned} \text{maximalizujte}\ & -\frac{\mu^2}{2} + 4\mu \\ \text{za podmínky}\ & \mu \geq 0. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \text{maximalizujte}\ & 4\mu_1 - \frac{(\mu_1 + \mu_2)^2}{4} - \frac{(\mu_1 + \mu_3)^2}{4} \\ \text{za podmínek}\ & \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \text{maximalizujte}\ & -2\mu \\ \text{za podmínky}\ & \mu \geq 4. \end{aligned}$$

5. Ať

$$\begin{aligned} \varphi(y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l) = & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \langle a_i, a_j \rangle\, y_i y_j + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \langle a_i, b_j \rangle\, y_i z_j \\ & -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} \langle b_i, b_j \rangle\, z_i z_j + \sum_{i=1}^{k} y_i + \sum_{i=1}^{l} z_i. \end{aligned}$$

Duální úloha je

$$\begin{aligned} \text{maximalizujte}\ & \varphi(y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l) \\ \text{za podmínek}\ & \sum_{i=1}^{k} y_i - \sum_{i=1}^{l} z_i = 0, \\ & y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l \geq 0. \end{aligned}$$