

# Lineární programování

## Zadání

1. Pomocí simplexové metody řešte

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } -x_1 - 2x_2 + x_3 \\ &\text{za podmíněk } -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ &\quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 3, \\ &\quad x_1, \dots, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

2. Pomocí simplexové metody řešte

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } x_1 + x_2 + x_3 \\ &\text{za podmíněk } -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ &\quad -x_1 + 2x_3 \geq 4, \\ &\quad x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

3. Pomocí simplexové metody řešte

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } 2x_2 - x_4 \\ &\text{za podmíněk } x_1 + 3x_2 - x_4 = 2, \\ &\quad x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ &\quad x_1, \dots, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

4. Pomocí simplexové metody řešte

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } 4x_3 - 6x_4 \\ &\text{za podmíněk } x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 6, \\ &\quad x_1 + 2x_3 - x_4 = 5, \\ &\quad x_1, \dots, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

5. Pomocí simplexové metody řešte

$$\begin{aligned} &\text{maximalizujte } 2x_1 + x_2 \\ &\text{za podmíněk } x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ &\quad x_1 - 4x_2 \leq 5, \\ &\quad 3x_1 + x_2 \leq 4, \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

6. Pomocí simplexové metody řešte

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } x_1 - x_2 - 2x_3 \\ &\text{za podmíněk } x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 2, \\ &\quad -x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 3, \\ &\quad 2x_1 - x_2 + x_3 = -4, \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

7. Pomocí první fáze simplexové metody rozhodněte, zda soustava  $Ax = b$  má nezáporné řešení, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

V kladném případě nalezněte jedno takové řešení.

8. Pomocí první fáze simplexové metody rozhodněte, zda soustava  $Ax = b$  má nezáporné řešení, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

V kladném případě nalezněte jedno takové řešení.

9. Pomocí simplexové metody řešte dvojici vzájemně duálních úloh

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } 3x_1 - 2x_2 \\ &\text{za podmínek } \quad x_1 - 2x_2 \geq -3, \\ &\quad \quad \quad -2x_1 + 4x_2 \geq -2, \\ &\quad \quad \quad -x_1 - 3x_2 \geq -6, \\ &\quad \quad \quad x_1, x_2 \geq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{maximalizujte } -3y_1 - 2y_2 - 6y_3 \\ &\text{za podmínek } \quad y_1 - 2y_2 - y_3 \leq 3, \\ &\quad \quad \quad -2y_1 + 4y_2 - 3y_3 \leq -2, \\ &\quad \quad \quad y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

10. Pomocí simplexové metody řešte dvojici vzájemně duálních úloh

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } -3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ &\text{za podmínek } \quad -2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq -3, \\ &\quad \quad \quad 3x_1 - 2x_2 - x_3 \geq -5, \\ &\quad \quad \quad -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq -2, \\ &\quad \quad \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{maximalizujte } -3y_1 - 5y_2 - 2y_3 \\ &\text{za podmínek } \quad -2y_1 + 3y_2 - y_3 \leq -3, \\ &\quad \quad \quad y_1 - 2y_2 + 2y_3 \leq 1, \\ &\quad \quad \quad -3y_1 - y_2 + 2y_3 \leq -2, \\ &\quad \quad \quad y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

11. Pomocí simplexové metody řešte dvojici vzájemně duálních úloh

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } x_2 + 8x_3 \\ &\text{za podmíněk } \begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &\geq -3, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 2, \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 &\geq -1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &\geq 1, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0; \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{maximalizujte } -3y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 \\ &\text{za podmíněk } \begin{aligned} 2y_1 - 3y_2 - y_3 + y_4 &\leq 0, \\ -y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 3y_4 &\leq 1, \\ -y_1 + y_2 - 4y_3 + y_4 &\leq 8, \\ y_1, \dots, y_4 &\geq 0. \end{aligned} \end{aligned}$$

12. Je dána úloha

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } |2x_1 + 3x_2 - 4| + |x_1 - x_2 - 2| \\ &\text{za podmíněk } x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Přepište ji jako úlohu lineárního programování.

13. Je dána úloha

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } \max\{2x_1 - x_2, x_1 + x_2 - 1\} \\ &\text{za podmíněk } \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \end{aligned}$$

Přepište ji jako úlohu lineárního programování.

14. Je dána úloha

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } \max\{|2x_1 - x_2|, |x_1 + x_2 - 1|\} \\ &\text{za podmíněk } \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \end{aligned}$$

Přepište ji jako úlohu lineárního programování.

## Výsledky

1.  $(0, 3, 0, 2, 0)^T$ .
2. Řešení neexistuje. (Přípustná množina je prázdná.)
3.  $(0, \frac{3}{2}, 0, \frac{7}{2})^T$ .
4. Řešení neexistuje. (Cílová funkce je na přípustné množině zdola neomezená.)
5.  $(1, 1, 0)^T$ .
6. Řešení neexistuje. (Přípustná množina je prázdná.)
7. ano, např.  $(0, 1, 0, 0)^T$ .
8. ne.
9. Minimalizační úloha má řešení  $(0, \frac{3}{2})^T$ . Maximalizační úloha má řešení  $(1, 0, 0)^T$ .
10. Minimalizační úloha má řešení  $(11, 19, 0)^T$ . Maximalizační úloha má řešení  $(3, 1, 0)^T$ .
11. Řešení neexistuje. (Cílová funkce v maximalizační úloze je shora neomezená. Přípustná množina v minimalizační úloze je prázdná.)

12.

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } t_1 + t_2 \\ &\text{za podmíněk } \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 4 &\leq t_1, \\ -2x_1 - 3x_2 + 4 &\leq t_1, \\ x_1 - x_2 - 2 &\leq t_2, \\ -x_1 + x_2 + 2 &\leq t_2, \\ x_1, x_2, t_1, t_2 &\geq 0. \end{aligned} \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } t \\ &\text{za podmíněk } \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\leq t, \\ x_1 + x_2 - 1 &\leq t, \\ x_1 + x_2 &= 1, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } t \\ &\text{za podmíněk } \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\leq t, \\ -2x_1 + x_2 &\leq t, \\ x_1 + x_2 - 1 &\leq t, \\ -x_1 - x_2 + 1 &\leq t, \\ x_1 + x_2 &= 1, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \end{aligned}$$