Optimalizace a teorie her

Maticové hry

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

Úvod

Definice

Maticová hra je konečná hra dvou hráčů s nulovým součtem.

Ať $G = (S_1, S_2, u)$ je maticová hra, kde $S_1 = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$, $S_2 = \{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ a $u : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$.

- Jednoznačná korespondence mezi u a maticí $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, kde $a_{ij} = u(\sigma_i, \tau_j)$.
- $A \ldots$ matice hry (výplatní matice, matice užitku,$\ldots$)
- Smíšené rozšíření hry G je hra $\Gamma(A) = (X, Y, U)$, kde
  - $X = \left\{x \in \mathbb{R}^m_+ \,\middle|\, \sum_{i=1}^m x_i = 1\right\}$,
  - $Y = \left\{y \in \mathbb{R}^n_+ \,\middle|\, \sum_{i=1}^n y_i = 1\right\}$,
  - $U : X \times Y \to \mathbb{R}$ je dána předpisem

$$U(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} u(\sigma_i, \tau_j) x_i y_j = x^T A y = \langle Ay, x \rangle .$$

Úvod

- X, Y jsou (neprázdné) konvexní kompaktní množiny a U je spojitá funkce na $X \times Y$.
- Smíšené rozšíření maticové hry je plně určeno maticí A, neboť:
  - počet řádků matice A určuje X,
  - počet sloupců matice A určuje Y,
  - Funkce U je dána maticí A.
- $\Gamma(A)$ je hra dvou hráčů s nulovým součtem.

Značení:

- $\mathcal{O}_1(A)\ldots$ množina všech optimálních strategií 1. hráče ve hře $\Gamma(A)$.
- $\mathcal{O}_2(A)\ldots$ množina všech optimálních strategií 2. hráče ve hře $\Gamma(A)$.
- $\underline{V}(x) := \inf_{y\in Y} U(x,y) = \min_{y\in Y} \langle Ay, x\rangle$.
- $\overline{V}(y) := \sup_{x\in X} U(x,y) = \max_{x\in X} \langle Ay, x\rangle$.

Optimální strategie a maticové hry

Platí:

- $\underline{v} = \max_{x \in X} \underline{V}(x)$.
- $\overline{v} = \min_{y \in Y} \overline{V}(y)$.
- Číslo $v \in \mathbb{R}$ je cena hry $\Gamma(A)$ právě tehdy, když

$$v = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \langle Ay, x \rangle = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} \langle Ay, x \rangle .$$

- $\mathcal{O}_1(A) = \operatorname{argmax}_{x \in X} \underline{V}(x)$.
- $\mathcal{O}_2(A) = \operatorname{argmin}_{y \in Y} \overline{V}(y)$.
- $\mathcal{O}_1(A)$ a $\mathcal{O}_2(A)$ jsou množiny všech řešení konvexních optimalizačních úloh.

Věta (O minimaxu)

Cena hry $\Gamma(A)$ existuje a oba hráči mají alespoň jednu optimální strategii.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Optimální strategie a maticové hry

Dále budeme značit:

- vektory standardní báze v $\mathbb{R}^m$ symboly $e_1, \ldots, e_m$;
- vektory standardní báze v $\mathbb{R}^n$ symboly $f_1, \ldots, f_n$.

Lemma

$$\begin{aligned} \underline{V}(x) &= \min_{j \in \{1,\ldots,n\}} \langle A f_j, x \rangle , \\ \overline{V}(y) &= \max_{i \in \{1,\ldots,m\}} \langle A y, e_i \rangle . \end{aligned}$$

Důkaz: Viz přednáška. ∎

Optimální strategie a maticové hry

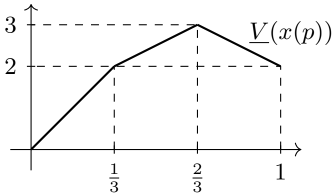
Příklad (Grafické řešení hry $\Gamma(A)$ s maticí $2 \times n$)

Je dána hra $\Gamma(A)$, kde $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\underline{V}(x) = \min_{j \in \{1,2,3\}} \langle Af_j, x \rangle = \min\{4x_1 + x_2, 2x_1 + 5x_2, 6x_1\}$$

Položíme-li $x = (p, 1-p)^T$, kde $p \in [0,1]$, pak

$$\underline{V}(x(p)) = \min\{3p+1, -3p+5, 6p\}$$



Optimální strategie a maticové hry

Příklad (Grafické řešení hry $\Gamma(A)$ s maticí $2 \times n$ – pokračování)

Protože jediný bod maxima funkce $\underline{V}(x(p))$ na $[0,1]$ je $\frac{2}{3}$, je $\hat{x} = \frac{1}{3}(2,1)^T$ jediný bod v $\mathcal{O}_1(A)$ a cena hry je $v = 3$.

Zbývá nalézt $\mathcal{O}_2(A) = \left\{\hat{y} \in Y \,\middle|\, \overline{V}(\hat{y}) = 3\right\}$. Ať $\hat{y} \in \mathcal{O}_2(A)$.

- Z rovnosti $A^T\hat{x} = (3,3,4)^T$ plyne $\hat{y}_3 = 0$.
- Podmínka $\overline{V}(\hat{y}) = 3$ znamená, že

$$3 = \max_{p\in[0,1]} (p, 1-p)A\hat{y} = \begin{cases} 4\hat{y}_1 + 2\hat{y}_2, & \text{je-li } \hat{y}_1 \geq \hat{y}_2, \\ \hat{y}_1 + 5\hat{y}_2, & \text{je-li } \hat{y}_1 < \hat{y}_2. \end{cases}$$

- $\hat{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, 0)^T \in Y$, tj. $\hat{y}_1 + \hat{y}_2 = 1$ a $\hat{y}_1, \hat{y}_2 \geq 0$.

Odtud $\hat{y} = \frac{1}{2}(1,1,0)^T$ je jediný bod v $\mathcal{O}_2(A)$.

Maticové hry a lineární programování

Tvrzení

Nechť $E \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *je matice samých jedniček,* $v \in \mathbb{R}$ *je cena hry* $\Gamma(A)$ *a* $c \in \mathbb{R}$*. Potom* $\mathcal{O}_1(A) = \mathcal{O}_1(A + cE)$, $\mathcal{O}_2(A) = \mathcal{O}_2(A + cE)$ *a cena hry* $\Gamma(A + cE)$ *je* $v + c$*.*

Důkaz: Viz přednáška. ■

Dále budeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že matice A má **všechny komponenty kladné**!

Maticové hry a lineární programování

Množina $\mathcal{O}_1(A)$ je množina všech řešení úlohy

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maximalizujte} & \displaystyle\min_{j\in\{1,\dots,n\}} \langle Af_j, x\rangle \\ \text{za podmínek} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \\ & x \geq 0. \end{array}\right\} (U1)$$

Množina $\mathcal{O}_2(A)$ je množina všech řešení úlohy

$$\left.\begin{array}{ll} \text{minimalizujte} & \displaystyle\max_{i\in\{1,\dots,m\}} \langle Ay, e_i\rangle \\ \text{za podmínek} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \\ & y \geq 0. \end{array}\right\} (U2)$$

Maticové hry a lineární programování

Označme $\mathbb{I}_k = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^k$.

Místo (U1) a (U2) můžeme řešit vzájemně duální úlohy lineárního programování:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{minimalizujte} & \langle \xi, \mathbb{I}_m \rangle \\ \text{za podmínek} & A^T\xi \geq \mathbb{I}_n, \\ & \xi \geq 0. \end{array}\right\} (P)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maximalizujte} & \langle \eta, \mathbb{I}_n \rangle \\ \text{za podmínek} & A\eta \leq \mathbb{I}_m, \\ & \eta \geq 0. \end{array}\right\} (U)$$

Maticové hry a lineární programování

Jak souvisí řešení úloh (U1) a (U2) s řešeními úloh (P) a (D)?

- Řeší-li $\hat{\xi}$ úlohu (P), pak $\hat{x} = \frac{1}{\langle \hat{\xi}, \mathbb{I}_m \rangle} \hat{\xi}$ řeší (U1).
- Řeší-li $\hat{x}$ úlohu (U1) a v je cena hry $\Gamma(A)$, pak $\hat{\xi} = \frac{1}{v}\hat{x}$ řeší (P).
- Řeší-li $\hat{\eta}$ úlohu (D), pak $\hat{y} = \frac{1}{\langle \hat{\eta}, \mathbb{I}_n \rangle} \hat{\eta}$ řeší (U2).
- Řeší-li $\hat{y}$ úlohu (U2) a v je cena hry $\Gamma(A)$, pak $\hat{\eta} = \frac{1}{v}\hat{y}$ řeší (D).

Příklad

Je dána hra $\Gamma(A)$ s maticí hry

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pak $\hat{x} = \frac{1}{2}(1,1)^T \in \mathcal{O}_1(A)$ a $\hat{y} = \frac{1}{4}(3,1,0)^T \in \mathcal{O}_2(A)$.