# Optimalizace a teorie her

## Konvexní množiny

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

# Definice konvexní množiny

**Definice**

Nechť $x, y \in \mathbb{R}^n$. Množina

$$[x, y] := \{\lambda x + (1-\lambda)y \,|\, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

se nazývá (uzavřená) úsečka s krajními body $x, y$.

**Definice**

Množina $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazve konvexní, jestliže pro každé $x, y \in C$ je $[x, y] \subseteq C$.

# Základní příklady

**Příklad**

1. Každý interval v $\mathbb{R}$ je konvexní množina.
2. Každý lineární podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$ je konvexní množina.
3. Každá úsečka a prázdná množina v $\mathbb{R}^n$ jsou konvexní množiny.
4. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Nadrovina

$$H(y;\alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = \alpha\}.$$

je konvexní množina. Vektor $y$ se nazývá normálový vektor nadroviny $H(y;\alpha)$.

# Základní příklady

**Příklad**

6. Nechť $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Uzavřený poloprostor
$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \leq \alpha\}$$
je konvexní množina.
7. Uzavřená koule
$$B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$$
o středu $a \in \mathbb{R}^n$ a poloměru $r > 0$ je konvexní množina.
8. Okolí
$$U(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$$
bodu $a \in \mathbb{R}^n$ o poloměru $r > 0$ je konvexní množina.

# Množinové operace a konvexita

**Tvrzení**

*Průnik libovolného počtu konvexních množin je konvexní množina.*

Důkaz: Viz přednáška. ■

**Příklad**

1. Nechť $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $b \in \mathbb{R}^m$. Afinní podprostor (lineární varieta)

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}.$$

je konvexní množina.

2. Nezáporný ortant

$$\mathbb{R}^n_+ := \left\{(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\right\}$$

je konvexní množina.

# Množinové operace a konvexita

**Příklad (Pokračování)**

3. Nechť $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $b \in \mathbb{R}^m$. Konvexní polyedrická množina

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \le b\}\,,$$

kde $Ax \le b$ znamená $b - Ax \in \mathbb{R}^m_+$, je konvexní množina. Omezená konvexní polyedrická množina se nazývá konvexní mnohostěn. Například

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

je konvexní mnohostěn.

- Sjednocení a rozdíly množin konvexitu nezachovávají (viz např. $[0,1] \setminus (0,1) = \{0\} \cup \{1\}$).

# Množinové operace a konvexita

### Definice

Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se nazývá afinní, existují-li $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $b \in \mathbb{R}^m$ tak, že $f(x) = Ax + b$.

### Tvrzení

*Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Pak $f$ je afinní právě tehdy, když pro každé $x, y \in \mathbb{R}^n$ a každé $\lambda \in \mathbb{R}$ platí*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Důkaz: Viz přednáška. ∎

- Z uvedeného tvrzení speciálně plyne, že afinní zobrazení $f$ zachovává úsečky, tj. pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^n$ je

$$f([x, y]) = [f(x), f(y)].$$

# Množinové operace a konvexita

**Tvrzení**

*Je-li* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *afinní a* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *konvexní, pak* $f(C)$ *je konvexní.*

Důkaz: Viz přednáška. ■

**Tvrzení**

*Nechť* $C_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ *a* $C_2 \subseteq \mathbb{R}^m$*. Pak* $C_1$ *a* $C_2$ *jsou konvexní množiny právě tehdy, když* $C_1 \times C_2$ *je konvexní množina.*

Důkaz: Viz přednáška. ■

**Příklad**

1. $[0, 1]^n$ je konvexní množina.
2. $B(0; 1) \times [0, 1]$ je konvexní množina.
3. Kladný ortant $\mathbb{R}^n_{++} = (0, \infty)^n$.

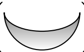
# Konvexní obal

**Definice**

Konvexní obal množiny $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je průnik všech konvexních množin v $\mathbb{R}^n$ obsahujících $M$. Konvexní obal množiny $M$ se značí symbolem $\operatorname{conv}(M)$.

- Konvexní obal libovolné množiny je konvexní množinou.
- Množina $C$ je konvexní právě tehdy, když $C = \operatorname{conv}(C)$.

**Příklad**

1. $\operatorname{conv}(S(0;1)) = B(0;1)$.
2. Nechť $x = (0,0)^T$, $y = (1,0)^T$ a $z = (0,1)^T$. Pak $\operatorname{conv}(\{x,y,z\})$ je trojúhelník s vrcholy $x, y, z$.
3. conv (  ) = .

# Konvexní kombinace

### Definice

Řekneme, že $x \in \mathbb{R}^n$ je konvexní kombinací bodů $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$, jestliže existují nezáporná reálná čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tak, že $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ a $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$.

### Věta

*Je-li $M \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná, pak $\operatorname{conv}(M)$ je množina všech konvexních kombinací bodů z $M$.*

Důkaz: Vynecháváme. ■

### Věta (Carathéodoryho věta)

*Je-li $M \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná, pak každý prvek z $\operatorname{conv}(M)$ lze vyjádřit jako konvexní kombinaci nejvýše $n+1$ prvků z $M$.*

Důkaz: Vynecháváme. ■

# Kužely

### Definice

Množina $K \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazve kužel, jestliže pro každé $x \in K$ a každé $\alpha > 0$ je $\alpha x \in K$.
Je-li kužel navíc konvexní množinou, nazývá se konvexní kužel.

### Příklad

1. Množiny $\emptyset$, $\{0\}$, $\mathbb{R}^n_+$, $\mathbb{R}^n_{++}$ a $\mathbb{R}^n$ jsou konvexní kužely.
2. Množina $\left\{(x,0)^T \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geq 0\right\} \cup \left\{(0,x)^T \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geq 0\right\}$ je kužel, ale není konvexní.

### Tvrzení

*Průnik libovolného počtu kuželů je kužel.*

Důkaz: Domácí úkol. ■

- Průnik libovolného počtu konvexních kuželů je konvexní kužel.

# Vzdálenost bodu od množiny

Jaký bod z neprázdné množiny $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je nejblíže bodu $x \in \mathbb{R}^n$?

### Definice

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná a $x \in \mathbb{R}^n$.

- Reálné číslo
$$\operatorname{dist}(x; M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|$$
se nazve vzdálenost bodu $x$ od množiny $M$.
- Bod $y \in M$ se nazývá projekce bodu $x$ na $M$, jestliže
$$y \in \operatorname*{argmin}_{z \in M} \|x - z\|$$
(tj. $\|x - y\| \le \|x - z\|$ pro všechna $z \in M$).
- Existuje-li právě jedna projekce $x$ na $M$, pak ji budeme značit symbolem $P_M(x)$.

# Vzdálenost bodu od množiny

**Příklad**

1. $\operatorname{argmin}_{y \in (1,2]} |0 - y| = \emptyset$.
2. $\operatorname{argmin}_{y \in (1,2]} |3 - y| = \{2\}$.
3. Je-li $K = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|x\| = 1 \right\}$, pak

$$\operatorname*{argmin}_{y \in K} \|0 - y\| = K.$$

**Věta (Věta o nejlepší aproximaci)**

*Je-li $C \subseteq \mathbb{R}^n$ neprázdná uzavřená konvexní množina, pak pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ existuje právě jeden bod $\hat{y} \in C$ tak, že*

$$\operatorname{dist}(x; C) = \|x - \hat{y}\|.$$

Důkaz: Viz přednáška. ∎

# Vzdálenost bodu od množiny

**Definice**

Nechť $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná uzavřená konvexní množina. Zobrazení $P_C : x \mapsto P_C(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, se nazývá projekční operátor na $C$.

- $P_C(x) = x$ pro každé $x \in C$.
- $P_C \circ P_C = P_C$.
- Lze ukázat, že projekční operátor je spojité zobrazení.

**Příklad**

$$P_{[0,1]}(x) = \begin{cases} x, & \text{pro } x \in [0,1], \\ 0, & \text{pro } x < 0, \\ 1, & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$

# Vzdálenost bodu od množiny

**Věta (Projekce bodu a variační nerovnost)**

*Nechť $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná uzavřená konvexní množina, $x \in \mathbb{R}^n$ a $y \in C$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. $y = P_C(x)$.
2. *Pro každé $z \in C$ je $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$.*

Důkaz: Viz přednáška ■

**Příklad**

Nechť $C = B(0; 1)$. Pak

$$P_C(x) = \begin{cases} x, & \text{jestliže } \|x\| \leq 1, \\ \frac{x}{\|x\|}, & \text{jestliže } \|x\| > 1. \end{cases}$$

# Vzdálenost bodu od množiny

**Tvrzení**

*Nechť $L \subseteq \mathbb{R}^n$ je lineární podprostor. Potom platí:*

1. $P_L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *je lineární zobrazení.*
2. *Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ je $P_{L^\perp}(x) = x - P_L(x)$.*
3. *Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ existují jednoznačně určené body $y \in L$ a $z \in L^\perp$ tak, že $x = y + z$. Navíc $y = P_L(x)$ a $z = P_{L^\perp}(x)$.*

Důkaz: Viz přednáška. ■

**Příklad**

Nechť $y \in \mathbb{R}^n$ a $L = \mathrm{span}\,(\{y\})$. Pak

$$P_L(x) = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y.$$

# Metoda nejmenších čtverců

Nechť $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a $b \in \mathbb{R}^m$. Jaké prvky obsahuje množina

$$\operatorname*{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\| = \operatorname*{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2\,?$$

**Tvrzení**

*Nechť $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ a $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. Potom*

$$\hat{x} \in \operatorname*{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2 \text{ \textit{právě tehdy, když} } A^T A\hat{x} = A^T b.$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

- $A^T Ax = A^T b$ ... soustava normálních rovnic.
- Má-li $A$ lineárně nezávislé sloupce, pak $A^T A$ je invertibilní. V tomto případě je

$$\operatorname*{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\| = \{(A^T A)^{-1} A^T b\}$$

(a $P_L(b) = A\hat{x} = A(A^T A)^{-1} A^T b$) pro každé $b \in \mathbb{R}^m$.

# Metoda nejmenších čtverců

**Příklad**

Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pak jediný bod minima funkce $\|Ax - b\|$ je

$$\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Příklad**

V rovině jsou dány body $(0, -\frac{1}{2})^T$, $(1, \frac{1}{3})^T$ a $(2, \frac{2}{3})^T$. Pomocí metody nejmenších čtverců proložme těmito body přímku o rovnici $y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$.
Hledané hodnoty koeficientů $k$ a $q$ jsou $k = \frac{7}{12}$ a $q = -\frac{5}{12}$.

# Věta o oddělování nadrovinou

**Věta (O oddělitelnosti bodu a konvexní množiny)**

*Je-li* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *neprázdná uzavřená konvexní množina a* $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$, *pak existuje* $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *a* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tak, že pro každé* $y \in C$ *platí*

$$\langle y, v \rangle \leq \alpha < \langle x, v \rangle \, .$$

Důkaz: Viz přednáška. ■

**Důsledek**

*Každá uzavřená konvexní množina v* $\mathbb{R}^n$ *je průnikem všech poloprostorů, které ji obsahují.*

Důkaz: Viz přednáška. ■

# Věta o oddělování nadrovinou

- Existuje nezáporné řešení soustavy lineárních rovnic? Obecně ne, stačí uvážit rovnici $x_1 + x_2 = -1$. Kdy takové řešení existuje?

**Příklad**

Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ a $b \in \mathbb{R}^2$. Označme

$$\begin{aligned} C &= \left\{Ax \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^2_+\right\} = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \geq 0\right\} \\ K &= \left\{y \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, A^T y \leq 0\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, y \right\rangle \leq 0, \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, y \right\rangle \leq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Nastává právě jedna z možností:

1. $b \in C$.
2. Existuje nenulový vektor $y \in K$ svírající s $b$ úhel $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$.

# Věta o oddělování nadrovinou

### Lemma

*Jestliže* $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$*, pak* $\left\{ Ax \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^n_+ \right\}$ *je neprázdná uzavřená konvexní množina.*

Důkaz: Viz přednáška (důkaz uzavřenosti vynecháváme). ∎

### Věta (Farkasovo lemma)

*Je-li* $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *a* $b \in \mathbb{R}^m$*, pak platí právě jedno z následujících tvrzení:*

1. *Existuje* $x \in \mathbb{R}^n$ *tak, že* $Ax = b$ *a* $x \geq 0$*.*
2. *Existuje* $y \in \mathbb{R}^m$ *tak, že* $A^T y \leq 0$ *a* $\langle y, b \rangle > 0$*.*

Důkaz: Viz přednáška. ∎

# Krajní body konvexní množiny

Úsečku, trojúhelník a čtverec lze rekonstruovat z jejich vrcholů. Jaké další konvexní množiny lze rekonstruovat ze znalosti „vrcholů"?

### Definice

Nechť $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina. Bod $x \in C$ nazveme krajní bod množiny $C$, jestliže neexistují dva různé body $y, z \in C$ tak, že $x = \frac{y+z}{2}$. Množinu všech krajních bodů množiny $C$ budeme značit symbolem $\mathrm{ext}\,(C)$.

### Příklad

1. $\mathrm{ext}\,([0,1]) = \{0,1\}$.
2. Je-li $L \subseteq \mathbb{R}^n$ netriviální lineární podprostor, pak $\mathrm{ext}\,(L) = \emptyset$.
3. $\mathrm{ext}\,(B(0;1)) = S(0;1)$.

# Krajní body konvexní množiny

**Věta (Kreinova-Milmanova)**

*Jestliže* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *je kompaktní (tj. omezená a uzavřená) konvexní množina, pak* $C = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(C))$.

Důkaz: Vynecháváme. ∎

Kompaktnost je důležitá:

- Interval $(0,1)$ není uzavřený a $\operatorname{ext}((0,1)) = \emptyset$.
- Množina $\mathbb{R}^2_+$ není omezená a $\operatorname{ext}\left(\mathbb{R}^2_+\right) = \{0\}$.

**Příklad**

$B(0;1) = \operatorname{conv}(S(0;1))$.