Optimalizace a teorie her

Dualita

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

Motivace

Jak můžeme „co nejlépe“ zdola odhadnout minimum cílové funkce?

Příklad

Je dána úloha

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } 2x_1 + 3x_2 \\ &\text{za podmínek } \ 1 - x_1 - x_2 \leq 0, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad x_1, x_2 \in [0, 2]. \end{aligned}$$

Označme $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$,

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in [0,2]^2 \,\middle|\, 1 - x_1 - x_2 \leq 0 \right\}$$

a $\hat{f} = \min_{x \in M} f(x)$.

Motivace

Příklad (Pokračování)

Využitím omezení ve tvaru nerovnosti dostaneme

- dolní odhad $\hat{f}$: pro každé $(x_1, x_2)^T \in M$ je $1 \leq x_1 + x_2 \leq f(x_1, x_2)$, a proto $1 \leq \hat{f}$;
- lepší dolní odhad $\hat{f}$: pro každé $(x_1, x_2)^T \in M$ je $2 \leq 2(x_1 + x_2) \leq f(x_1, x_2)$, a proto $2 \leq \hat{f}$.

Jaký je „nejlepší“ možný dolní odhad $\hat{f}$?
Položme

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \mu) &= 2x_1 + 3x_2 + \mu(1 - x_1 - x_2), \\ \varphi(\mu) &= \min_{(x_1,x_2)^T \in [0,2]^2} L(x_1, x_2, \mu). \end{aligned}$$

Zřejmě $\varphi(\mu) \leq \hat{f}$ pro každé $\mu \geq 0$.
Nejlepší dolní odhad $\hat{f}$ pomocí funkce φ je maximum $\hat{\varphi}$ funkce φ na $\mathbb{R}_+$.

Motivace

Příklad (Pokračování)

Problém nalezení „co nejlepšího“ dolního odhadu hodnoty $\hat{f}$ tak přirozeně vede k úloze

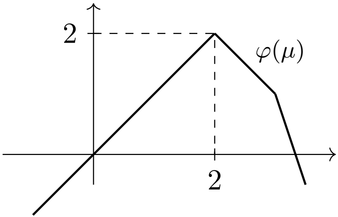
$$\begin{aligned} &\text{maximalizujte} \quad \varphi(\mu) \\ &\text{za podmínky} \quad \mu \geq 0. \end{aligned}$$

Jedná se o tzv. duální úlohu k původně zadané úloze.
Zřejmě

$$\varphi(\mu) = \min_{(x_1,x_2)^T \in [0,2]^2} L(x_1, x_2, \mu) = \begin{cases} \mu & \text{pro } \mu < 2, \\ 4 - \mu & \text{pro } \mu \in [2, 3), \\ 10 - 3\mu & \text{pro } \mu \geq 3. \end{cases}$$

Motivace

Příklad (Pokračování)



Tedy

$$\hat{\varphi} = \max_{\mu \in \mathbb{R}_+} \varphi(\mu) = \varphi(2) = 2.$$

Odtud $\hat{f} \geq \hat{\varphi} = 2$. Navíc $f(1,0) = 2$, a proto $\hat{f} = 2$.
Všimněme si, že v tomto konkrétním příkladu je $\hat{f} = \hat{\varphi}$.

Terminologie a značení

Nebude-li řečeno jinak, budeme v této kapitole používat níže uvedenou terminologii a značení.

- $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.
- $X = D_f \cap D_g$ a $\Omega \subseteq X$ neprázdná.
- Primární úloha:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{minimalizujte} & f(x) \\ \text{za podmínky} & g(x) \leq 0, \\ & \quad x \in \Omega. \end{array}\right\} \text{(P)}$$

- Lagrangeova funkce $L : X \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ pro úlohu (P) je daná předpisem

$$L(x, \mu) = f(x) + \langle g(x), \mu \rangle .$$

- $D_\varphi = \left\{ \mu \in \mathbb{R}^k \,\middle|\, \inf_{x \in \Omega} L(x, \mu) > -\infty \right\}$.

Terminologie a značení

- Lagrangeova duální funkce $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ je dána předpisem

$$\varphi(\mu) = \inf_{x \in \Omega} L(x, \mu).$$

- Duální úloha k úloze (P):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{miximalizujte} & \varphi(\mu) \\ \text{za podmínky} & \mu \geq 0. \end{array}\right\} \text{(D)}$$

- $M = \{x \in \Omega \,|\, g(x) \leq 0\}$ ... přípustná množina úlohy (P).
- $N = \{\mu \in D_\varphi \,|\, \mu \geq 0\}$ ... přípustná množina úlohy (D).
- $\hat{f} = \inf_{x \in M} f(x)$ ... hodnota primární úlohy (P).
- $\hat{\varphi} = \sup_{\mu \in N} \varphi(\mu)$ ... hodnota duální úlohy (D).

Věty o slabé a silné dualitě

Tvrzení

Jestliže $D_\varphi \neq \emptyset$, pak φ je konkávní.

Důkaz: Viz přednáška. ∎

- V netriviálním případě $N \neq \emptyset$ je duální úloha úlohou konvexní optimalizace!
- Hlavní otázka teorie duality je vztah $\hat{f}$ a $\hat{\varphi}$.

Věta (O slabé dualitě)

1. *Pro každé $x \in M$ a $\mu \in N$ je $\varphi(\mu) \leq f(x)$.*
2. $\hat{\varphi} \leq \hat{f}$.

Důkaz: Viz přednáška. ∎

Věty o slabé a silné dualitě

Důsledek

1. *Jestliže existují* $\hat{x} \in M$ *a* $\hat{\mu} \in N$ *splňující* $\varphi(\hat{\mu}) = f(\hat{x})$, *pak*

$$\hat{\mu} \in \operatorname*{argmax}_{\mu \in N} \varphi(\mu) \quad \textit{a} \quad \hat{x} \in \operatorname*{argmin}_{x \in M} f(x).$$

2. *Je-li* $\hat{f} = -\infty$, *pak* $N = \emptyset$.
3. *Je-li* $\hat{\varphi} = \infty$, *pak* $M = \emptyset$.

Důkaz: Viz přednáška. ■

- Rozdíl $\hat{f} - \hat{\varphi}$ se nazývá duální mezera.
- Pokud platí předpoklady z 1, pak $\hat{\varphi} = \hat{f}$.

Věty o slabé a silné dualitě

Příklad

Je dána úloha

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \;\; & -x^2 \\ \text{za podmínek} \;\; & 2x - 1 \le 0, \\ & x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Snadno nalezneme, že

$$\begin{aligned} L(x,\mu) &= -x^2 + \mu(2x-1), \\ \varphi(\mu) &= \begin{cases} \mu - 1 & \text{pro } \mu < \frac{1}{2}, \\ -\mu & \text{pro } \mu \ge \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Zřejmě $\hat{\varphi} = -\frac{1}{2}$ a $\hat{f} = -\frac{1}{4}$. Tedy $\hat{\varphi} < \hat{f}$!

Věty o slabé a silné dualitě

- Za jakých předpokladů nastává rovnost $\hat{\varphi} = \hat{f}$?

Věta (O silné dualitě)

Nechť $\hat{f} < \infty$ a cílová funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konvexní. Předpokládejme, že platí alespoň jedna z následujících podmínek:

1. *Komponenty $g_1, \ldots, g_k$ zobrazení g splňují Slaterovu podmínku regularity.*
2. *Zobrazení g je afinní a Ω je konvexní polyedrická množina.*

Potom $\hat{f} = \hat{\varphi}$. Je-li navíc $\hat{f} \in \mathbb{R}$, pak existuje řešení úlohy (D).

Důkaz: Vynecháváme. ■

- Předpoklad $\hat{f} < \infty$ znamená, že přípustná množina M je neprázdná.
- Pokud $\hat{f} = -\infty$, pak díky větě O slabé dualitě musí být $\hat{\varphi} = -\infty$.

Primární úlohy s omezeními ve tvaru rovnosti i nerovnosti

Analogicky lze konstruovat duální úlohu i pro úlohu tvaru

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte} \quad & f(x) \\ \text{za podmínky} \quad & g(x) \leq 0, \\ & h(x) = 0, \\ & x \in \Omega, \end{aligned}$$

kde

- $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
- $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $h : D_h \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$,
- $X = D_f \cap D_g \cap D_h$ a $\Omega \subseteq X$ neprázdná.

Lagrangeovu funkci $L : X \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ této úlohy definujeme předpisem

$$L(x, \mu, \lambda) = f(x) + \langle g(x), \mu \rangle + \langle h(x), \lambda \rangle .$$

Primární úlohy s omezeními ve tvaru rovnosti i nerovnosti

Duální úloha k uvedené (primární) úloze je

$$\begin{array}{ll} \text{miximalizujte} & \varphi(\mu,\lambda) \\ \text{za podmínky} & \mu \geq 0, \end{array}$$

kde $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} D_\varphi &= \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \,\middle|\, \inf_{x\in\Omega} L(x,\mu,\lambda) > -\infty \right\}, \\ \varphi(\mu,\lambda) &= \inf_{x\in\Omega} L(x,\mu,\lambda). \end{aligned}$$

- I v tomto případě lze dokázat analogie vět O slabé dualitě a O silné dualitě.