Optimalizace a teorie her

Kvadratické programování

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

Úvod do kvadratického programování

Úlohy kvadratického programování jsou optimalizační úlohy, ve kterých je

1. cílová funkce f je kvadratická, tj.

$$f(x) = \langle Qx, x \rangle + \langle x, c \rangle + d,$$

   kde $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$ (bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že Q je symetrická a $d = 0$);
2. přípustná množina je konvexní polyedrická množina.

Úloha kvadratického programování není obecně konvexní!

- Pokud ale minimalizujeme kvadratickou funkci f, ve které je Q pozitivně semidefinitní matice, pak se jedná o konvexní úlohu.

Úvod do kvadratického programování

V dalším budeme uvažovat jen úlohu kvadratického programování ve tvaru

$$\left.\begin{array}{ll} \text{minimalizujte} & \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle + \langle x, c\rangle \\ \text{za podmínky} & Ax \leq b, \end{array}\right\} (QP)$$

kde $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ je pozitivně definitní, $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ a $c \in \mathbb{R}^n$.

Cílová funkce v (QP) je ryze konvexní. Úloha tak má nejvýše jedno řešení. KKT podmínky

$$\begin{aligned} Qx + c + A^T\mu &= 0 \\ \langle Ax - b, \mu\rangle &= 0 \\ \mu &\geq 0 \end{aligned}$$

jsou nutné a postačující.

Tvrzení (Duální úloha kvadratického programovnání)

Duální úloha k úloze (QP) je

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{maximalizujte} & -\dfrac{1}{2}\langle By, y\rangle - \langle y, v\rangle - \dfrac{1}{2}\langle Q^{-1}c, c\rangle \\ \textit{za podmínky} & y \geq 0, \end{array}\right\} (DQP)$$

kde $B = AQ^{-1}A^T$ *a* $v = AQ^{-1}c + b$*.*

Důkaz: Viz přednáška. ∎

Věta (O silné dualitě pro kvadratické programování)

Úloha (QP) má řešení právě tehdy, když (DQP) má řešení. Má-li (QP) řešení, pak se hodnoty obou úloh rovnají.

Důkaz: Vynecháváme. ∎