Optimalizace a teorie her

Úvod do strategických her

Martin Bohata

Katedra matematiky
FEL ČVUT v Praze
bohata@math.feld.cvut.cz

Úvod do teorie her

- Více subjektů v rozhodovacím procesu.
- Rozhodnutí každého z nich může ovlivnit výsledek ostatních.

Aplikace:

- Bezdrátové sítě
- Umělá inteligence
- Kryptografie
- Ekonomie
- Biologie

$\vdots$

Základní dělení her:

- strategické $\times$ extenzivní
- kooperativní $\times$ nekooperativní

$\vdots$

Úvod do teorie her

Definice

Strategická hra s $n \in \mathbb{N}$ hráči je trojice

$$G = \left(N, (S_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n\right),$$

kde

- $N = \{1, \dots, n\}$ je konečná množina hráčů,
- S_i je neprázdná množina strategií i-tého hráče,
- $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ je funkce užitku (výplatní funkce) i-tého hráče.

Terminologie a značení:

- Prvek z S_i ... strategie i-tého hráče.
- Prvek z $S := S_1 \times \cdots \times S_n$ ... strategický profil.
- S ... množina strategických profilů.

Příklady strategických her

Příklad (Vězňovo dilema)

Hra je daná tabulkou:

$$
\begin{array}{c|c|c|}
 & P & Z \\
\cline{2-3}
P & -5; -5 & 0; -10 \\
\cline{2-3}
Z & -10; 0 & -1; -1 \\
\cline{2-3}
\end{array}
$$

Příklad (Panna nebo orel)

Hra je daná tabulkou:

$$
\begin{array}{c|c|c|}
 & P & O \\
\cline{2-3}
P & 10; -10 & -10; 10 \\
\cline{2-3}
O & -10; 10 & 10; -10 \\
\cline{2-3}
\end{array}
$$

Příklady strategických her

Příklad (Manželský spor)

Hra je daná tabulkou:

	D	H
D	$2; 3$	$-1; -1$
H	$0; 0$	$3; 2$

Příklad (Kámen-nůžky-papír)

Hra je daná tabulkou:

	K	N	P
K	$0; 0$	$1; -1$	$-1; 1$
N	$-1; 1$	$0; 0$	$1; -1$
P	$1; -1$	$-1; 1$	$0; 0$

Příklady strategických her

Příklad (Cournotův model oligopolu)

- $N = \{1, \ldots, n\}$ a $S_i = [0, \infty)$ pro každé $i \in N$.
- $q_i \in S_i$ ... množství vyrobeného zboží i-tou firmou.
- $P(\sum_{i \in N} q_i)$ ... cena jednotkového množství výrobku na trhu.
- $C_i(q_i)$ ... náklady i-té firmy na výrobu množství q_i.
- $u_i(q_1, \ldots, q_n) = P(\sum_{i \in N} q_i)q_i - C_i(q_i)$ ... funkce užitku i-té firmy.

Nashova rovnováha

- Jaký je „racionální" strategický profil hry?
- Budeme hledat takový strategický profil, kde žádný hráč nezíská výhodu pouze změnou své strategie.

Definice

Nechť $G = (N, (S_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n)$ je strategická hra. Strategický profil $\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_n) \in S$ se nazve Nashovo equilibrium hry G, jestliže pro každé $i \in N$ a každé $\sigma_i \in S_i$ je

$$u_i(\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_n) \geq u_i(\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_{i-1}, \sigma_i, \hat{\sigma}_{i+1}, \ldots, \hat{\sigma}_n)$$

V případě her dvou hráčů definice Nashova equilibria říká, že

1. $u_1(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2) \geq u_1(\sigma_1, \hat{\sigma}_2)$ pro každé $\sigma_1 \in S_1$;
2. $u_2(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2) \geq u_2(\hat{\sigma}_1, \sigma_2)$ pro každé $\sigma_2 \in S_2$.

Nashova rovnováha

Příklad (Vězňovo dilema)

	P	Z
P	$-5; -5$	$0; -10$
Z	$-10; 0$	$-1; -1$

Jediným Nashovým equilibriem je strategický profil (P, P).

Příklad (Panna nebo orel)

	P	O
P	$10; -10$	$-10; 10$
O	$-10; 10$	$10; -10$

V této hře neexistuje Nashovo equilibrium.

Nashova rovnováha

Příklad (Manželský spor)

	D	H
D	$2; 3$	$-1; -1$
H	$0; 0$	$3; 2$

Strategické profily (D, D) a (H, H) jsou jediná Nashova equilibria v této hře.

- Nashovo equilibrium nevede k „maximalizaci zisku“, ale k rovnováze.
- Jak jsme viděli na příkladech, Nashovo equilibrium nemusí být určeno jednoznačně, dokonce ani nemusí existovat.

Nashova rovnováha

Tvrzení

Nechť $G = (N, (S_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n)$ *je strategická hra a* $\hat{\sigma} \in S$. *Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. $\hat{\sigma}$ *je Nashovo equilibrium.*
2. *Pro každé* $i \in N$ *je*

$$\hat{\sigma}_i \in \operatorname*{argmax}_{\sigma_i \in S_i} u_i(\hat{\sigma}_1, \ldots, \hat{\sigma}_{i-1}, \sigma_i, \hat{\sigma}_{i+1}, \ldots, \hat{\sigma}_n).$$

Důkaz: Plyne přímo z definice Nashova equilibria. ∎

Nashova rovnováha

Příklad (Cournotův model oligopolu)

Ať

- $N = \{1, 2\}$ (tj. uvažujeme model duopolu) a $S_1 = S_2 = [0, \infty)$.
- $C_1(q_1) = cq_1$ a $C_2(q_2) = cq_2$, kde $c > 0$.
- $P(q_1 + q_2) = a - b(q_1 + q_2)$, kde $a > c$ a $b > 0$.
- $u_1(q_1, q_2) = [a - b(q_1 + q_2)]q_1 - cq_1$ a
  $u_2(q_1, q_2) = [a - b(q_1 + q_2)]q_2 - cq_2$.

Jediné Nashovo equilibrium je $(\hat{q}_1, \hat{q}_2) = \left(\frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{3b}\right)$ a $u_1(\hat{q}_1, \hat{q}_2) = u_2(\hat{q}_1, \hat{q}_2) = \frac{(a-c)^2}{9b}$.

Srovnejme tento výsledek s modelem monopolu. Funkce užitku $u(q) = q(a - c - bq)$, $q \in [0, \infty)$, má jediný bod maxima $\hat{q} = \frac{a-c}{2b}$ a $u(\hat{q}) = \frac{(a-c)^2}{4b}$.

Hry dvou hráčů s nulovým součtem

Definice

Hra dvou hráčů s nulovým součtem je strategická hra

$$G = (\{1,2\}, (S_1, S_2), (u_1, u_2))$$

taková, že pro každé $(\sigma_1, \sigma_2) \in S_1 \times S_2$ je

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2) + u_2(\sigma_1, \sigma_2) = 0.$$

- Hráči mají zcela opačné zájmy.
- Stačí zadat jen jednu funkci užitku, neboť $u_1 = -u_2$.
- Je zbytečné uvádět množinu $\{1,2\}$ všech hráčů.
- Zjednodušené značení hry dvou hráčů:

$$G = (S_1, S_2, u),$$

kde $u = u_1$.

Hry dvou hráčů s nulovým součtem

Definice

Ať $G = (S_1, S_2, u)$ je hra dvou hráčů s nulovým součtem.

1. Dolní cena hry G je číslo
$$\underline{v} := \sup_{\sigma \in S_1} \inf_{\tau \in S_2} u(\sigma, \tau).$$
2. Horní cena hry G je číslo
$$\overline{v} := \inf_{\tau \in S_2} \sup_{\sigma \in S_1} u(\sigma, \tau).$$
3. Řekneme, že $v \in \mathbb{R}$ je cena hry G, jestliže $v = \underline{v} = \overline{v}$.

- První hráč nemůže „získat“ méně než $\underline{v}$.
- Druhý hráč nemůže „prohrát“ více než $\overline{v}$.
- Platí $\underline{v} \leq \overline{v}$.

Hry dvou hráčů s nulovým součtem

Definice

Ať $G = (S_1, S_2, u)$ je hra dvou hráčů s nulovým součtem a v je její cena. Řekneme, že

1. $\hat{\sigma} \in S_1$ je optimální strategie prvního hráče, jestliže $v = \inf_{\tau \in S_2} u(\hat{\sigma}, \tau)$;
2. $\hat{\tau} \in S_2$ je optimální strategie druhého hráče, jestliže $v = \sup_{\sigma \in S_1} u(\sigma, \hat{\tau})$.

Příklad

Hra G je dána tabulkou:

	C	D
C	$1; -1$	$2; -2$
D	$3; -3$	$4; -4$

Hry dvou hráčů s nulovým součtem

Příklad (Pokračování)

G je hra dvou hráčů s nulovým součtem, a proto stačí zadat tabulku:

	C	D
A	1	2
B	3	4

Tedy $G = (S_1, S_2, u)$, kde $S_1 = \{A, B\}$, $S_2 = \{C, D\}$, $u(A, C) = 1$, $u(A, D) = 2$, $u(B, C) = 3$ a $u(B, D) = 4$.

Platí:

- $v = \underline{v} = \overline{v} = 3$;
- optimální strategie 1. hráče je B;
- optimální strategie 2. hráče je C.

Hry dvou hráčů s nulovým součtem

Příklad (Panna nebo orel)

G je hra dvou hráčů s nulovým součtem, a proto stačí zadat tabulku:

	P	O
P	10	-10
O	-10	10

Platí:

- $\underline{v} = -10$;
- $\overline{v} = 10$;
- v neexistuje;
- optimální strategie prvního a druhého hráče neexistují.

Hry dvou hráčů s nulovým součtem

Příklad

Uvažme hru $G = (S_1, S_2, u)$ dvou hráčů s nulovým součtem, kde $S_1 = S_2 = (0, 1)$ a $u(\sigma, \tau) = \sigma\tau$.
Platí:

- $v = \underline{v} = \overline{v} = 0$;
- optimální strategie prvního hráče je každá strategie z S_1.
- optimální strategie druhého hráče neexistuje.

Tvrzení

Ať $G = (S_1, S_2, u)$ je hra dvou hráčů s nulovým součtem taková, že S_1 a S_2 jsou konečné. Jestliže existuje cena hry G, pak existuje optimální strategie prvního a také druhého hráče.

Důkaz: Viz přednáška. ∎

Hry dvou hráčů s nulovým součtem

Jaký je vztah Nashova equilibria a strategického profilu složeného z optimálních strategií?

Definice

Nechť $f : M \times N \to \mathbb{R}$. Řekneme, že $(\hat{x}, \hat{y}) \in M \times N$ je sedlový bod funkce f, jestliže pro každé $x \in M$ a každé $y \in N$ je

$$f(x, \hat{y}) \leq f(\hat{x}, \hat{y}) \leq f(\hat{x}, y)$$

Sedlový bod z předchozí definice se přesněji nazývá sedlový bod typu maxmin.

Tvrzení

Ať $G = (S_1, S_2, u)$ je hra dvou hráčů s nulovým součtem a $(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) \in S_1 \times S_2$. Potom $(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$ je Nashovo equilibrium hry G právě tehdy, když $(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$ je sedlový bod funkce u.

Důkaz: Viz přednáška. ■

Hry dvou hráčů s nulovým součtem

Věta (O Nashově equilibriu a optimálních strategií)

Nechť $G = (S_1, S_2, u)$ je hra dvou hráčů s nulovým součtem

1. *Je-li $(\hat{\sigma}, \hat{\tau}) \in S_1 \times S_2$ Nashovo equilibrium hry G, pak $v = u(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$ je cena hry G, $\hat{\sigma}$ je optimální strategie prvního hráče a $\hat{\tau}$ je optimální strategie druhého hráče.*
2. *Jestliže v je cena hry G, $\hat{\sigma}$ je optimální strategie prvního hráče a $\hat{\tau}$ je optimální strategie druhého hráče, pak $v = u(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$ a $(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$ je Nashovo equilibrium.*

Důkaz: Viz přednáška. ■

Z předchozí věty plyne, že jsou-li $(\hat{\sigma}_1, \hat{\tau}_1)$ a $(\hat{\sigma}_2, \hat{\tau}_2)$ Nashova equilibria, pak také $(\hat{\sigma}_1, \hat{\tau}_2)$ a $(\hat{\sigma}_2, \hat{\tau}_1)$ jsou Nashova equilibria a $u(\hat{\sigma}_1, \hat{\tau}_1) = u(\hat{\sigma}_1, \hat{\tau}_2) = u(\hat{\sigma}_2, \hat{\tau}_1) = u(\hat{\sigma}_2, \hat{\tau}_2)$. Toto neplatí pro obecné hry dvou hráčů (viz např. Manželský spor).

Smíšené strategie

- Chceme vybírat strategie s určitou pravděpodobností.
- Omezíme se na tzv. konečné hry.

Definice

Nechť $G = (N, (S_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n)$ je strategická hra. Řekneme, že G je konečná, jestliže pro každé $i \in N$ je S_i konečná množina.

- Mezi konečné hry patří Vězňovo dilema, Manželský spor,...

Smíšené strategie

Definice

Nechť $G = (N, (S_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n)$ je konečná strategická hra $N = \{1, \dots, n\}$ a pro každé $i \in N$ je $S_i = \left\{\sigma_1^i, \dots, \sigma_{m_i}^i\right\}$. Smíšené rozšíření G je strategická hra $\overline{G} = (N, (\Delta S_i)_{i=1}^n, (U_i)_{i=1}^n)$, kde pro každé $i \in N$ je

- $\Delta S_i = \left\{x \in \mathbb{R}_+^{m_i} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{m_i} x_j = 1\right\}$ množina všech smíšených strategií (loterií) nad S_i,
- $U_i : \Delta S_1 \times \cdots \times \Delta S_n \to \mathbb{R}$ je daná předpisem $U_i(p^1, \dots, p^n) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{m_n} u_i(\sigma_{j_1}^1, \dots, \sigma_{j_n}^n) p_{j_1}^1 \dots p_{j_n}^n$.

- Prvek σ_k^i ztotožňujeme s prvkem v $\mathbb{R}_+^{m_i}$, který má na k-té pozici jedničku a všude jinde nuly.
- Prvky z ΔS_i, které mají na jedné pozici jedničku a na ostatních nulu nazýváme čisté strategie.

Smíšené strategie

Příklad (Panna nebo orel)

Připomeňme, že tato hra G (dvou hráčů s nulovým součtem) je dána tabulkou:

	P	O
P	10	-10
O	-10	10

- Množiny strategií jsou $S_1 = S_2 = \{P, O\}$ a funkce užitku jsou u_1, u_2 (kde $u_2 = -u_1$).
- Označme $\sigma_1 = P, \sigma_2 = O$ strategie prvního hráče a $\tau_1 = P, \tau_2 = O$ strategie druhého hráče.
- Pro $p \in \Delta S_1$ a $q \in \Delta S_2$ je

$$U_1(p, q) = 10p_1q_1 - 10p_1q_2 - 10p_2q_1 + 10p_2q_2.$$

- Protože $u_2 = -u_1$, je $U_2 = -U_1$.

Smíšené strategie

Příklad (Panna nebo orel – pokračování)

- Smíšené rozšíření hry G je hra $\overline{G} = (\Delta S_1, \Delta S_2, U_1)$.
- Položíme-li $p_1 = x$ a $q_1 = y$, pak $x, y \in [0, 1]$, $p_2 = 1 - x$ a $q_2 = 1 - y$.
- Místo funkce U_1 tak můžeme uvažovat jen funkci

$$\widetilde{U}(x, y) = 10(4xy - 2x - 2y + 1).$$

- Místo $\overline{G}$ můžeme ekvivalentně vyšetřovat hru $\Gamma = ([0, 1], [0, 1], \widetilde{U})$.
- Existuje Nashovo equilibrium hry Γ (a odtud hry $\overline{G}$)?
- Cena hry Γ je $v = 0$, optimální strategie prvního hráče je $x = \frac{1}{2}$ a optimální strategie druhého hráče je $y = \frac{1}{2}$.
- Nashovo equilibrium hry Γ je proto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
- $\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ je Nashovo equilibrium hry $\overline{G}$.

Smíšené strategie

Věta (Nashova věta)

Smíšené rozšíření konečné strategické hry má nejméně jedno Nashovo equilibrium.

Důkaz: Vynecháváme. ■