

Vzorové zadání

1. [10 bodů] Je dána funkce

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_3} + x_1^2 - 2\alpha x_1 x_2 + x_2^4,$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr.

- (a) Pro jaké hodnoty parametru α je f konvexní?
(b) Ukažte, že pro $\alpha = 0$ je množina

$$M = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid f(x_1, x_2, x_3) \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

konvexní.

2. [10 bodů] Necht

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte všechny body minima funkce $f(x) = \|Ax - b\|^2$ na \mathbb{R}^2 .

3. [15 bodů] Je dána úloha

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte} && -2x_1 + x_2 \\ &\text{za podmínek} && x_1 - x_2 \leq 0 \\ &&& x_1^2 + x_2^2 \leq 8 \end{aligned}$$

- (a) Napište KKT podmínky pro tuto úlohu.
(b) Ověřte, že KKT podmínky jsou splněny v bodě $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
(c) Využitím KKT podmínek zdůvodněte, proč $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ je řešením zadané úlohy.

4. [15 bodů] Necht $\Gamma(A)$ je smíšené rozšíření maticové hry s maticí hry

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pomocí úlohy lineárního programování nalezněte cenu hry $\Gamma(A)$ a optimální strategii prvního hráče.