

Fourierova Transformace

26. listopadu 2008 18:23

1. Nalezněte Fourierův obraz funkce $f(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$.
Výsledek: $F(p) = \frac{2a}{a^2 + p^2}$
2. Nalezněte Fourierův obraz funkce $f(t) = e^{-\alpha|t|} \cdot 1(t)$.
Výsledek: $F(p) = \frac{1}{\alpha + jp}$
3. Nalezněte Fourierův obraz funkce $f(t) = \frac{1}{(t^2+4)(t^2+9)}$.
Výsledek: $F(p) = \frac{\pi}{5} \left(\frac{e^{-2|p|}}{2} - \frac{e^{-3|p|}}{3} \right)$
4. Nalezněte Fourierův obraz funkce $f(t) = e^{-a(t-1)^2}$, $a > 0$.
Výsledek: $e^{-jp\sqrt{\frac{\pi}{a}}} e^{-\frac{p^2}{4a}}$
5. Nalezněte Fourierův obraz funkce $f(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$, $a > 0$.
Výsledek: $\frac{1}{a}\pi e^{-a|p|}$
6. Nalezněte Fourierův obraz funkce $f(t) = \sin t \cdot e^{-at^2}$, $a > 0$.
Výsledek: $\frac{-j\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \left(e^{-\frac{(p-1)^2}{4a}} - e^{-\frac{(p+1)^2}{4a}} \right)$
7. Nalezněte Fourierův obraz funkce $f(t) = t e^{-at} 1(t)$, $a > 0$.
Výsledek: $\frac{1}{(a+jp)^2}$
8. Nalezněte Fourierův obraz funkce $f(t) = t^2 e^{-at^2}$, $a > 0$.
Výsledek: $F(p) = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(e^{-\frac{p^2}{4a}} - \frac{p^2}{2a} e^{-\frac{p^2}{4a}} \right)$
9. Určete inverzní Fourierovu transformaci funkce $g(p) = e^{j\omega p} (1(p-a) - 1(p-b))$, $a < b$.
Výsledek: $f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{j(\omega+t)b} - e^{j(\omega+t)a}}{j(\omega+t)}$
10. Jaké funkce mají současně reálný vzor i obraz ve Fourierově transformaci?
Výsledek: sudé funkce
11. Pomocí Fourierova obrazu funkce $f(t)$ určete Fourierův obraz funkce $g(t) = f(3t-2)$.
Výsledek: $\hat{g}(p) = e^{-\frac{2}{3}jp} \frac{1}{3} \hat{f}\left(\frac{p}{3}\right)$

12. Pomocí Fourierova obrazu funkce $f(t)$ určete Fourierův obraz funkce $g(t) = t f(2t + 1)$.

$$\text{Výsledek: } \hat{g}(p) = \frac{j}{2} e^{j\frac{p}{2}} \left[\frac{j}{2} \hat{f}\left(\frac{p}{2}\right) + \frac{1}{2} f'\left(\frac{p}{2}\right) \right]$$

13. Pomocí Fourierova obrazu funkce $f(t)$ určete Fourierův obraz funkce $g(t) = e^{-jt} f'(2t - 1)$.

$$\text{Výsledek: } \hat{g}(p) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}j(p+1)} j \frac{p+1}{2} \hat{f}\left(\frac{p+1}{2}\right)$$

14. Je dána funkce

$$f(t) = \frac{t}{t^2 + r^2}, r > 0.$$

a) Vypočtete Fourierovu transformaci funkce $f(t)$ a nakreslete graf její imaginární části.

b) Vypočtete Fourierovu transformaci funkce $f(t) \sin 2t$.

c) Vypočtete inverzní Fourierovu transformaci funkce $f(t)$.

Výsledky: a) $F(p) = -\text{sign}(p) \pi e^{-|p|r} j$.

b) $F(p) = \frac{1}{2j} \hat{f}(p-2) - \frac{1}{2j} \hat{f}(p+2)$

c) $\text{sign}(p) \pi e^{-|p|r} j \frac{1}{2\pi}$.

15. a) Pomocí reziduové věty spočtete $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t^2 + 1)(t^2 + 2)} e^{-jpt} dt$.

b) Pomocí tohoto výsledku určete Fourierův obraz následujících funkcí

$$f(t) = \frac{1}{(4t^2 + 1)(4t^2 + 2)}, \quad c) g(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{(t^2 + 1)(t^2 + 2)} \right).$$

Výsledky: a) $\pi \left(e^{-|p|} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|p|} \right)$

$\frac{\pi}{2} \left(e^{-|p|/2} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2} \frac{|p|}{2}} \right)$

c) $j p \pi \left(e^{-|p|} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|p|} \right)$

16. Nalezněte funkci $f(t)$, pro kterou platí

$$f(t) * e^{-at^2} = e^{-bt^2} \quad a > b > 0.$$

Výsledek: $f(t) = \frac{a}{\sqrt{\pi(a-b)}} e^{-\frac{ab}{a-b}t^2}$.

17. Řešte pomocí F-transformace diferenciální rovnici

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2} + a^2 u(x) = f(x)$$

$$-\infty < x < \infty, a > 0.$$

$$\text{Výsledek: } u(x) = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-a|x-s|} ds$$