Laplaceova Transformace

26. listopadu 2008 18:08

1. Pomocí věty o rozkladu nalezněte inverzní Laplaceův obraz funkce
$$F(p) = \arctan \frac{1}{p}\,.$$
Výsledek: $f(t) = \frac{\sin t}{t}$.

2. Pomocí věty o rozkladu nalezněte inverzní Laplaceův obraz funkce
$$F(p) = \frac{e^{1/p}}{p}\,.$$
Výsledek: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}\, t^n$.

3. Pomocí věty o rozkladu nalezněte inverzní Laplaceův obraz funkce
$$F(p) = \frac{\sin(\frac{1}{p})}{p}\,.$$
Výsledek: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[(2\,n+1)!]^2}\, t^{2\,n+1}$

4. Pomocí metody reziduí stanovte Laplaceův vzor funkce
$$F(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)(p-3)}\,.$$
Výsledek: $\frac{1}{2}e^t - e^{2\,t} + \frac{1}{2}\,e^{3\,t}$.

5. Pomocí metody reziduí stanovte Laplaceův vzor funkce
$$F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p-2)(p-3)}\,.$$
Výsledek: $\frac{3}{4}e^t + \frac{1}{2}\,t\,e^t - e^{2\,t} + \frac{1}{4}\,e^{3\,t}$.

6. Pomocí metody reziduí stanovte inverzní Laplaceovu transformaci funkce
$$F(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+1)^2}\,.$$
Výsledek: $f(t) = -\frac{t\cos t}{4} - \frac{t\sin t}{4} - \frac{1}{2}\cos t + \sin t$.

7. Pomocí metody reziduí stanovte inverzní Laplaceův obraz funkce

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+4)^2}.$$

Výsledek: $-\frac{t}{8}\cos 2\,t + \frac{1}{16}\sin 2\,t.$

8. Nalezněte pomocí trigonometrické řady inverzní Laplaceův obraz funkce

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+4)(1-e^{-p})}\,.$$

Výsledek: $f(t) = \frac{e^{2\,j\,t}}{4\,j(1-e^{-2\,j})} + \frac{e^{-2\,j\,t}}{-4\,j\,(1-e^{2\,j})} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2\,k\,\pi\,t)}{1-k^2\,\pi^2}.$

9. Nalezněte pomocí trigonometrické řady inverzní Laplaceův obraz funkce

$$F(p) = \frac{1}{p-3}\,\frac{1}{1-e^{-2\,p}}\,.$$

Výsledek: $f(t) = \frac{e^{3\,t}}{1-e^{-6}} - \frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-3\,\cos(k\,\pi\,t)+k\,\pi\sin(k\,\pi\,t)}{k^2\,\pi^2+9}.$

10. Nalezněte analyticky inverzní Laplaceův obraz funkce

$$F(p) = \frac{1}{p-3}\,\frac{1}{1-e^{-2\,p}}\,.$$

Výsledek: $f(t) = \frac{e^{3\,t}}{1-e^{-6}} + g(t)$, kde $g(t)$ je periodick funkce s periodou 2, kter8 je na intervalu $< 0, 2)$ rovna funkci $-\frac{e^{-6}}{1-e^{-6}}\,e^{3\,t}$.

11. Stanovte $a \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce

$$F(p) = \frac{1}{p-a}\,\frac{1}{1+e^p}$$

měla periodický vzor v Laplaceově transformaci. Tento vzor učete.
Výsledek: $a = 0$. Vzorem je v tomto případě funkce $f(t) = 1$ na intervalech $< 2\,n+1, 2\,n+2 >$, $n = 0, 1, \ldots$, a nula jinde.

12. Určete analyticky Laplaceův vzor k funkci

$$F(p) = \frac{1}{p\,(1-e^{-p})}.$$

Výsledek: $f(t) = n$ je-li $t \in < n-1, n)$ $n = 1, 2, \ldots.$

13. Nalezněte pomocí trigonometrické řady inverzní Laplaceův obraz funkce

$$F(p) = \frac{1}{p\,\sinh\,2\,p}\,.$$

Výsledek $f(t) = \frac{t}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\,\frac{\sin(\frac{k\,\pi\,t}{2})}{k}\,.$

14. Určete analyticky inverzní Laplaceův obraz $f(t)$ funkce

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)\,(1-e^{-3\,p})}\,,$$

a spočtete hodnotu $f(200)$.

Výsledek: $f(t) = \frac{1}{1-e^3}\,e^{-t} + g(t)$, kde $g(t)$ je periodická funkce s periodou 3 taková, že $g(t) = \frac{e^3}{e^3-1}\,e^{-t}$ na intervalu $< 0, 3)$.
$f(200) = \frac{1}{1-e^3}\,e^{-200} + \frac{e^3}{e^3-1}\,e^{-2}$.

15. Vyjádřete analyticky inverzní Laplaceův obraz funkce

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)\,(p+2)\,(1-e^{-p})}\,.$$

Výsledek: $f(t) = A\,e^{-t} + B\,e^{-2\,t} + g(t)$, kde $A = \frac{1}{1-e}$, $B = \frac{1}{e^2-1}$ a $g(t)$ je periodická funkce s periodou 1, která je na intervalu $< 0, 1)$ rovna funkci $(1-A)\,e^{-t} - (1+B)\,e^{-2\,t}$.

16. Určete inverzní Laplaceovu transformaci $f(t)$ funkce

$$F(p) = \frac{1}{(p+j)\,(1-e^{-2\,p})}\,.$$

Určete $f(100)$.

Výsledek: $f(t) = A\,e^{-j\,t} + g(t)$, kde $A = \frac{1}{1-e^{2\,j}}$ a $g(t)$ je periodick funkce s periodou 2, která je na intervalu $< 0, 2)$ rovna funkci $(1-A)\,e^{-j\,t}$.
$f(100) = A\,e^{-100\,j} + 1 - A$.

17. Stanovte pomocí trigonometrické řady i analyticky Laplaceův vzor funkce

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+4)(1-e^{-p})}\,.$$

Výsledek:

$$f(t) = \frac{1}{4(1-\cos 2)}\,[-\sin 2\cos 2t + (\cos 2 - 1)\sin 2t] + 1/4 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi t}{1-k^2\pi^2}\,.$$

$$f(t) = \frac{1}{4(1-\cos 2)}\,[-\sin 2\cos 2t + (\cos 2 - 1)\sin 2t] + g(t)$$

kde g je periodická funkce s periodou 1, která je na intervalu $< 0, 1 >$ rovna funkci

$$\frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{4(1-\cos 2)}\,[-\sin 2\cos 2t + (\cos 2 - 1)\sin 2t]\,.$$

18. Určete analyticky inverzní Laplaceovu transformaci funkce

$$F(p) = \frac{1}{p\sinh p}\,.$$

Výsledek: $f(t) = t + g(t)$, kde $g(t)$ je periodick funkce s periodou 2, která je dána vzorci $g(t) = -t$ je-li $t \in < 0, 1)$; $g(t) = 2 - t$ je-li $t \in < 1, 2)$.

Ekvivalentní vyjádření: $f(t) = 0$ na intervalu $< 0, 1)$ a $f(t) = 2\,n$ na intervalu $< 2\,n - 1, 2\,n + 1)$, kde $n = 1, 2 \ldots$ (po částech konstantní funkce).

19. Nalezněte Laplaceův obraz řešení diferenciální rovnice

$$y''(t) + y(t) = |\sin t|\,,$$

y(0)=y'(0)=0 .

Výsledek:

$$Y(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2(1-e^{-\pi p})} + e^{-\pi p}\,\frac{p}{(p^2+1)^2(1-e^{-\pi p})}$$

20. Stanovte Laplaceův obraz řešení diferenciální rovnice

$$y'(t) + 3y(t) = e^{-t} + |\sin t|$$

$y(0) = 0$.

Výsledek:

$$F(p) = \frac{1}{(p+3)(p+1)} + \frac{p}{(p+3)(p^2+1)(1-e^{-\pi p})} - \frac{e^{-\pi p} p}{(p+3)(p^2+1)(1-e^{-\pi p})}\,.$$

21. Pomocí Laplaceovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$y'(t) + 2\,y(t) = A\,e^{-t} + g(t)\,,$$

kde $A = \frac{1}{1-e}$ a $g(t)$ je periodická funkce s periodou 1, která je na intervalu $< 0, 1 >$ dána vztahem $g(t) = (1-A)e^{-t}$. Počáteční podmínka je $y(0) = 0$.

Výsledek: $g(t) = \frac{1}{1-e}e^{-t} - \frac{1}{1-e^2}e^{-2t} + h(t)$, kde $h(t)$ je periodická funkce s periodou 1, která je na intervalu $< 0, 1 >$ rovna

$$h(t) = (1 - \frac{1}{1-e})\,e^{-t} - (1 - \frac{1}{1-e^2})e^{-2t}\,.$$