

M4B – Příklady z přednášky a cvičení

Jan Hamhalter

11. ledna 2007

1 Kombinatorická pravděpodobnost

1. Házáme šesti kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že padnou a) různá čísla b) pouze lichá čísla?
Výsledek: a) 0,01543 b) 0,015625.
2. Hra "Star Riders" nabízí stírací losy s deseti políčky. Dvě obsahují symbol výhry, dvě symbol "ZAP" a zbývající políčka jsou prázdná. Hráč postupně seškrabává políčka. Vyhraje pokud odkryje oba symboly výhry dříve než políčko "ZAP". Jaká je pravděpodobnost výhry?
Výsledek: $\frac{1}{6}$.
3. V osudí je bílá, modrá, černá, červená a zelená koule. Vybereme náhodně tři koule. Jaká je pravděpodobnost, že je mezi nimi a) bílá koule b) není modrá c) je bílá a není modrá?
Výsledek: a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{10}$.
4. Ve skříni je 6 (různých) párů střevíců. Vybereme náhodně 5 střevíců. Jaká je pravděpodobnost, že z nich sestavíme alespoň jeden úplný pár?
Výsledek: $0, \overline{75}$.
5. Z množiny $\{1, 2, \dots, N\}$ vybereme náhodně n čísel. Určete pravděpodobnost, že a) ve výběru je číslo i b) ve výběru je i a j ($i \neq j$) c) ve výběru je i nebo j ($i \neq j$) d) ve výběru je i ale není j ($i \neq j$).
Výsledek: a) $\frac{n}{N}$ b) $\frac{n(n-1)}{N(N-1)}$ c) $\frac{n}{N} \left(2 - \frac{n-1}{N-1} \right)$ d) $\frac{n}{N} \left(1 - \frac{n-1}{N-1} \right)$.
6. Na katedře matematiky je 25 řádných profesorů, 15 docentů a 35 asistentů. Náhodně se vybere komise o 6 členech. Jaká je pravděpodobnost, že všichni členové budou asistenti?
Výsledek: $\frac{23188}{2876565} = 0,008061003315$.

7. Víme, že z dvaceti vyrobených součástek jsou tři vadné. Jejich promíchání je náhodné. Musí se postupně prohlédnou a najít vadné součástky. Jaká je pravděpodobnost, že nebudeme muset prohlédnout více než 17 součástek?
Výsledek: 0,597368.
8. Házíme 10 krát za sebou hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že dostaneme neklesající posloupnost výsledků?
Výsledek: 0,000049664.
9. Házíme šesti kostkami. Jaká je pravděpodobnost že posloupnost výsledků je monotónní?
Výsledek: 0,0197.
10. Jaká je pravděpodobnost že ve třídě n žáky se najde dvojice mající narozeniny ve stejný den?
Výsledek: $1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{365}\right)$
11. 30 žáků je rozděleno do skupin po deseti. Jaká je pravděpodobnost, že žák Romeo bude ve stejné skupině jako žákyně Julie?
Výsledek: 0,3103.
12. Mezi $N + 1$ osobami se šíří anekdota, jejíž šíření začal její autor Každý kdo anekdotu slyšel ji může vyprávět kterékoliv další osobě (i té od které ji slyšel). Anekdota byla vyprávěna n krát. Jaká je pravděpodobnost, že se anekdota vrátí ke svému autorovi. Jaká je limita této pravděpodobnosti pro $N \rightarrow \infty$ je-li $\frac{n}{N} = a$.
Výsledek: $1 - \frac{N(N-1)^{n-1}}{N^n}$; Limita: $1 - e^{-a}$.
13. V osudí je r bílých a b černých koulí. Náhodně vybereme n koulí. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými bude právě k bílých koulí?
Výsledek: $\frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{b}{n-k}}{\binom{r+b}{n}}$.
14. Jaká je pravděpodobnost, že mezi pěti náhodně vybranými kartami jsou dva králové. (Karet je 52, králové 4).
Výsledek: $3,99 \cdot 10^{-2}$.
15. Kolikrát je větší šance že uhodneme pět čísel ve Sportce než že uhodneme všech šest?
Výsledek: 258 krát.

16. V osudí je r koulí. Náhodně vybereme n z nich a pak je vrátíme. Pak opět vybereme dalších n koulí. Jaká je pravděpodobnost, že oba výběry mají společných právě k prvků?

Výsledek: $\frac{\binom{n}{k} \cdot \binom{r-n}{n-k}}{\binom{r}{n}}$

17. n hostů restaurace přichází odložit svůj kabát. Šatnářka je vydává zcela náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jedna osoba dostane svůj kabát? Stanovte limitu této pravděpodobnosti pro $n \rightarrow \infty$.

Výsledek: $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$; Limita: $1 - e^{-1} = 0,6321\dots$

18. Hodíme n kostkami, $n \geq 6$. Jaká je pravděpodobnost, že se nám objeví všechna čísla: $1, 2, \dots, 6$?

Výsledek:

$$P = 1 - 6 \left(\frac{5}{6}\right)^n + 15 \left(\frac{4}{6}\right)^n - 20 \left(\frac{3}{6}\right)^n + 15 \left(\frac{2}{6}\right)^n - 6 \left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

Například pro $n = 13$ je $P = 0,514$; pro $n = 27$ je $P = 0,957$.

19. **Boltzmannův-Maxwellův model.** Uvažujme r různých částic rozdělených do n přihrádek. Všechna rozdělení částic jsou stejně pravděpodobná. Stanovte pravděpodobnost, že v pevně zvolené přihrádce je právě k částic. Jaká je limita této pravděpodobnosti, jestliže $n \rightarrow \infty$ a $\lim_n \frac{r}{n} = \lambda$? Interpretujte toto schéma pomocí schématu Bernoulliho.

Výsledek: $\binom{r}{k} \frac{(n-1)^{r-k}}{n^r}$. V limitě Poissonův zákon: $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Série r nezávislých pokusů zjišťujících zda postupně probírané částice jsou v dané přihrádce.

20. Jaká je pravděpodobnost, že z 500 osob nemá nikdo narozeniny 1.1. ?

Výsledek: 0,2537.

21. Jaká je pravděpodobnost, že z 500 nezávislých pokusů s 365 možnými výsledky je realizován výsledek číslo 200 právě 3 krát?

Výsledek: 0,1089.

22. Do tří vagónů nastupuje nezávisle na sobě 10 osob. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jeden vagón bude prázdný?

Výsledek: 0,05202458975.

2 Geometrická pravděpodobnost

1. Na kružnici o poloměru r náhodně zvolíme bod. Poté bez ohledu na tuto volbu zvolíme na kružnici náhodně bod druhý. Jaká je pravděpodobnost, že tětiva určená prvním a druhým bodem je větší než poloměr r ?

Výsledek: $\frac{11}{36}$.

2. Romeo a Julie si smluvili schůzku mezi 12:00 a 13:00. Přijdou náhodně v tomto rozmezí a čekají na sebe 20 minut, nejdéle však do 13:00. Jaká je pravděpodobnost, že se setkají?

Výsledek: $\frac{5}{9}$.

3. Do přístaviště vplouvají dva parníky kdykoliv během 24 hodin. První je v přístavišti jednu hodinu, druhý dvě hodiny. Jaká je pravděpodobnost, že se setkají?

Výsledek: 0,125.

4. Daná úsečka se dvěma náhodně zvolenými body rozdělí na tři díly. Jaká je pravděpodobnost, že z těchto dílů sestavíme trojúhelník?

Výsledek $\frac{1}{4}$.

5. Volíme náhodně dvě čísla z intervalu $(0,1)$. Jaká je pravděpodobnost, že jejich součet je menší než jedna a současně jejich součin menší než 0,09?

Výsledek: 0,2977502112.

6. Buffonova úloha. V rovině jsou rozmístěny rovnoběžky ve vzdálenosti $d > 0$. Na rovinu hodíme jehlu délky $0 < l < d$. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne některou rovnoběžku?

Výsledek: $\frac{2l}{\pi d}$.

3 Pravděpodobnostní prostor

V dalším textu bude vždy trojice (Ω, \mathcal{A}, P) značit pravděpodobnostní prostor.

1. Ukažte, že pro náhodné jevy $A, B \in \mathcal{A}$ platí $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.
2. Ukažte, že $P(A \cap B) = 1$, jestliže $P(A) = P(B) = 1$.
3. Ukažte, že $P(A \cup B) = 0$, jestliže $P(A) = P(B) = 0$.
4. Pro náhodné jevy A, B platí $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,9$ a $P(A \cap B) = 0,75$. Vypočtěte $P(A \setminus B)$, $P(B \setminus A)$, $P(A \cup B)$, $P(A^c \cap B^c)$.
Výsledek: $P(A \setminus B) = 0,05$, $P(B \setminus A) = 0,15$, $P(A \cup B) = 0,95$, $P(A^c \cap B^c) = 0,05$.
5. Předpokládejme, že $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ je posloupnost navzájem neslučitelných jevů. Ukažte, že $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$.
6. Víme, že $P(A) = 0,7$ a $P(B) = 0,7$. Jaká je dolní mez pro pravděpodobnost $P(A \cap B)$?
Odpověď: $P(A \cap B) \geq 0,4$.
7. Nechť (Ω, \mathcal{A}, P) je diskrétní pravděpodobnostní prostor. Ukažte, že je-li $P(\{\omega\}) = c > 0$ pro všechna $\omega \in \Omega$, pak je Ω konečná množina.
8. Předpokládejme, že \mathcal{A} je systém všech podmnožin množiny Ω . Zvolme $x \in \Omega$. Ověřte, že zobrazení $P : \mathcal{A} \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ definované: $P(A) = 1$ je-li $x \in A$ a $P(A) = 0$ je-li $x \notin A$, je pravděpodobnost. Tuto pravděpodobnost budeme dále označovat jako $P = \delta_x$.
9. Předpokládejme, že \mathcal{A} je systém všech podmnožin množiny Ω . Zvolme posloupnost $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ bodů v Ω a posloupnost nezáporných čísel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ takovou, že $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$. Ověřte, že zobrazení $P : \Omega \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ definované sumou

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{x_n}(A)$$

je pravděpodobnost.

10. Ukažte, že každý diskrétní pravděpodobnostní prostor je prostor uvedený v předchozím příkladu.

4 Podmíněná pravděpodobnost, nezávislost jevů a Bayesova Věta

1. Pro náhodné jevy A a B platí $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$ a $P(A \cup B) = 0,6$. Spočtete $P(A|B)$ a $P(B|A)$. Jsou A a B nezávislé?
Výsledek: $P(A|B) = 0,25$, $P(B|A) = \frac{1}{3}$. Jevy nejsou nezávislé.
2. Skříňka má tři zásuvky. V jedné jsou dvě zlaté mince, ve druhé zlatá a stříbrná, ve třetí dvě stříbrné. Náhodně byla vybrána jedna zásuvka a náhodně z ní byla mince. Byla stříbrná. Jaká je pravděpodobnost, že zbývající mince v přihrádce je zlatá?
Výsledek: $\frac{1}{3}$.
3. Náhodné jevy A, B, C jsou nezávislé. Určete $P(A \cup B \cup C)$ je-li $P(A) = P(B) = P(C) = 0,1$
Výsledek: 0,271.
4. Kdy jsou jevy A a A^c nezávislé?
Výsledek: Pouze když $P(A) = 0$ nebo $P(A) = 1$.
5. Kdy jsou jevy A a B , $A \subset B$ nezávislé? Výsledek: Pouze když $P(A) = 0$ nebo $P(B) = 1$.
6. Ukažte, že jestliže jsou A a B nezávislé jevy, pak jsou nezávislé i jevy A a B^c .
7. Uvažujme pokus se dvěma možnými výsledky. Zdar Z s pravděpodobností $\frac{1}{2} + \varepsilon$ a nezdar N s pravděpodobností $\frac{1}{2} - \varepsilon$. Pokus dvakrát nezávisle opakujeme. Který z náhodných jevů $A = \{(Z, Z), (N, N)\}$ a $B = \{(Z, N), (N, Z)\}$ je pravděpodobnější?
Výsledek: A je pravděpodobnější.
8. Tenista má první podání úspěšné s pravděpodobností 0,6 a druhé s pravděpodobností 0,8. S jakou pravděpodobností se dopustí dvojchyby?
Výsledek: 0,08.
9. Favority dostihu jsou koně A a B . A zvítězí s pravděpodobností 0,5 a B s pravděpodobností 0,3. Kůň A se zranil na startu. Jaká je pravděpodobnost, že zvítězí kůň B ?
Výsledek: 0,6.

10. Otec nabídl synovi odměnu za výhru ve dvou po sobě jdoucích zápasech. Může si vybrat ze dvou strategií: a) hrát postupně s panem Novákem, s otcem a panem Novákem a b) hrát postupně s otcem, panem Novákem, a otcem. Ví se, že Novák je lepší hráč než otec. Jaká strategie je výhodnější? (Výsledky zápasů jsou nezávislé.)
Výsledek: strategie a).
11. Alois a Bartoloměj nejsou dobří počtáři. Pravděpodobnost, že příklad správně vyřeší Alois je $\frac{1}{8}$ a u Bartoloměje $\frac{1}{12}$. Pracují nezávisle. V případě, že počítají špatně, dojdou ke stejnému výsledku s pravděpodobností $\frac{1}{1001}$. Po spočítání příkladu oba dospěli ke stejnému výsledku. Jaká je pravděpodobnost, že je správný?
Výsledek: $\frac{13}{14}$.
12. Roztržitý profesor zapomene v obchodě deštník s pravděpodobností $\frac{1}{4}$. Navštívil tři obchody a vrátil se bez deštníku. V jakém obchodě ho s největší pravděpodobností zanechal?
Výsledek: V prvním a to s pravděpodobností $\frac{16}{37}$. (Ve druhém s pravděpodobností $\frac{12}{37}$, ve třetím s pravděpodobností $\frac{9}{37}$.)
13. Letecká společnost č.1 ztratí 1% zavazadel, společnost č.2 ztratí 3% a společnost č.3 2% zavazadel. Cestující letěl letadlem společnosti č.1, pak společnosti č. 2 a pak společnosti č.3. Zavazadlo se ztratilo. Jaká je pravděpodobnost že ke ztrátě došlo vinou jednotlivých společností?
Výsledek: 1. 0,1697 2. 0,5042 3. 0,3260.
14. V krabici č.1 je 50 černých a 60 bílých kuliček. V krabici č.2 je 60 černých a 50 bílých kuliček. Hodíme si hrací kostkou. Padne-li 6 vybereme krabici č.1, v opačném případě krabici č.2. Z vybrané krabice náhodně vybereme kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že je bílá?
Výsledek: $\frac{31}{66} = 0,4697$.
15. Vězeň odsouzený k smrti dostane šanci zachránit se. Dozorci mu přinesou dvě krabice, 12 bílých a 12 černých kuliček. Odsouzenec může rozmístit kuličky do obou krabic dle svého uvážení. Poté co to udělá dozorce vybere náhodně jednu krabici a z ní vytáhne jednu kuličku. Bude-li bílá dostane odsouzený milost. Jak kuličky uspořádat aby šance na milost bylo co nejvyšší?
Výsledek: Do jedné krabice se dá jedna bílá kulička. V tomto případě je pravděpodobnost přežití 0,739.

16. Krabice č.1 obsahuje 1 bílou a 9 černých kuliček. Krabice č.2 obsahuje 1 černou a 9 bílých kuliček. Náhodně byla vybrána jedna z krabic. Z ní byla náhodným způsobem vybrána jedna kulička. Tato kulička byla bílá. Jaká je pravděpodobnost, že vylosovaná byla krabice č.1.
Výsledek $\frac{1}{10}$.
17. Ve městě jezdí 85% zelených taxíků a 15% taxíků modrých. Svědek dopravní nehody vypověděl, že nehodu zavinil řidič modrého taxíku. Svědek správně identifikuje barvu taxíku v 80% případů. Došlo k nehodě. Svědek tvrdí, že ji zavinil modrý taxík. Jaká je pravděpodobnost, že viníkem byl skutečně modrý taxík? Jaká je tato pravděpodobnost tvrdí-li totéž dva svědkové.
Výsledek: 0,4138 ; 0,7385.
18. Nemoc D se testuje biologickým testem. U nemocné osoby je test pozitivní s pravděpodobností 0,999. U zdravé osoby je test pozitivní s pravděpodobností 0,01. Onemocnělo 10% populace. a) Spočítejte pravděpodobnost, že osoba s pozitivním testem je nemocná. b) Spočítejte pravděpodobnost, že osoba s negativním testem je zdravá.
Výsledek: a) 0,9182736455 b) 0,998877791.
19. Test na danou nemoc je u nemocné osoby pozitivní s pravděpodobností 0,95. U zdravé osoby je test negativní s pravděpodobností 0,95. Celkem 0,5% populace je nakaženo. Jaká je pravděpodobnost, že osoba s pozitivním testem je nemocná? Jaká je tato pravděpodobnost, jestliže je test dvakrát po sobě pozitivní?
Výsledek: 0,087, 0,645.
20. Krabice byla naplněna náhodným způsobem deseti koulemi, které jsou bílé nebo černé. Daná koule v krabici je bílá s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ a černá pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Nevíme jaké koule se v krabici nacházejí. Z krabice jsme n krát vybrali náhodně kouli a zase ji vrátili. Všechny vytažené koule byly bílé. Jaká je pravděpodobnost, že všechny koule v krabici jsou bílé?
Výsledek:

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{k}{10}\right)^n}$$

5 Náhodné veličiny

1. Náhodná veličina je dána maximem počtu ok při šesti hodech hrací kostkou. Určete pravděpodobnostní funkci a střední hodnotu.

Výsledek: $P[X = j] = \left(\frac{j}{6}\right)^6 - \left(\frac{j-1}{6}\right)^6$, $(j = 1 \dots, 6)$. $EX = 5,56029$.

2. Hráči košíkové házejí střídavě na koš dokud jeden z nich nezasáhne. Hráč, který začíná jako první má pravděpodobnost zásahu 0,4. Druhý hráč má pravděpodobnost zásahu 0,6. Určete pravděpodobnostní funkci a střední hodnotu počtu hodů.

Výsledek: $P[X = 2k - 1] = (0,6 \cdot 0,4)^{k-1} \cdot 0,4$, $k = 1, 2 \dots$

$P[X = 2k] = (0,6 \cdot 0,4)^{k-1} \cdot 0,6^2$ ($k = 1, \dots$). $EX = 2,105263158$.

3. **Náhodná procházka.** Bod startuje v bodě 0 a pohybuje se po ose x . V každém časovém okamžiku $n = 0, 1, \dots$ se může posunout s pravděpodobností 0,5 doprava a 0,5 doleva. S_n je poloha částice v čase n . Určete pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny S_n a její střední hodnotu.

Výsledek: $P[S_n = t] = \binom{n}{\frac{n+t}{2}} \frac{1}{2^n}$, $(t = 2k - n, k = 0, 1, \dots, n)$. $E(S_n) = 0$.

4. Střelíme na terč o poloměru r . Výhra je dána podle vzdálenosti zásahu d od jeho středu vztahem

$$X = 10(r - d).$$

Určete distribuční funkci, hustotu a střední hodnotu výhry.

Výsledek: Distribuční funkce $F(x) = 0$ pro $x \leq 0$; $F(x) = 1 - \frac{(r - \frac{x}{10})^2}{r^2}$, pro $0 \leq x \leq 10r$; $F(x) = 1$ jinak.

Hustota $f(x) = \frac{1}{5r^2} \left(r - \frac{x}{10}\right)$ pro $0 \leq x \leq 10r$; $f(x) = 0$ jinak.

$EX = \frac{10}{3}r$.

5. Bod je náhodně vybrán z koule o poloměru R . Nalezněte distribuční funkci a hustotu pro jeho vzdálenost od počátku.

Výsledek: Distribuční funkce $F(x) = \frac{x^3}{R^3}$ pro $x \in \langle 0, R \rangle$; 0 nalevo a 1 napravo od tohoto intervalu.

Hustota $f(x) = 3 \frac{x^2}{R^3}$ pro $x \in \langle 0, R \rangle$ a 0 jinak.

6. Strana krychle má rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$. Stanovte distribuční funkci objemu krychle.

Výsledek: $F(x) = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x}$ pro $x \in \langle 0, 8 \rangle$; 0 nalevo a 1 napravo od tohoto intervalu.

7. Hranici lesa tvoří rovnostranný trojúhelník o straně a . V lese se ztratilo dítě, které se může vyskytovat se stejnou pravděpodobností v různých částech. Jaké je rozdělení vzdálenosti dítěte od zvolené strany lesa?

Výsledek: $F(x) = \frac{ax - \frac{x^2}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}}$ pro $x \in \langle 0, \frac{a\sqrt{3}}{2} \rangle$; 0 nalevo a 1 napravo od tohoto intervalu.

8. Bod je náhodně vybrán z horní polokružnice mající střed v počátku souřadnic a poloměr 2. Nalezněte distribuční funkci jeho x -ové souřadnice

Výsledek:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \left[2 \arcsin(x/2) - 2x \sqrt{4 - x^2} + \pi \right]$$

pro $x \in \langle -2, 2 \rangle$; 0 nalevo a 1 napravo od tohoto intervalu.

9. X je spojitá náhodná veličina s hustotou $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Určete pravděpodobnost, že $1 \leq |X| \leq 2$.

Výsledek: $e^{-1} - e^{-2}$.

10. $f(x) = a \frac{1}{1+x^2}$. Určete a tak, aby f byla hustota. Určete v tomto případě distribuční funkci.

Výsledek: $a = \frac{1}{\pi}$, $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg(x)$.

11. Distribuční funkce náhodné veličiny je $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2(|x|+1)}$. Nalezněte hustotu.

Výsledek: $f(x) = \frac{1}{2(|x|+1)^2}$.

12. Distribuční funkce spojitě náhodné veličiny je dána vzorcem $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(x)$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$; 0 nalevo a 1 napravo od tohoto intervalu. Určete hustotu a střední hodnotu.

Výsledek: $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$; 0 jinak. $EX = 0$.

13. Stanovte kvantil x_α náhodné veličiny X s hustotou $f(x) = 2(1-x)$ for $x \in \langle 0, 1 \rangle$; 0 jinak. Určete medián.

Výsledek: $x_\alpha = 1 - \sqrt{1-\alpha}$; $x_{0,5} = 0,292$.

14. Rychlost částice o hmotnosti 1 má rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$. Stanovte medián energie částice.

Výsledek: $x_{0,5} = \frac{1}{2}$.

15. Předpokládejme, že hustota f náhodné veličiny X splňuje pro $\mu \in \mathbb{R}$ identitu

$$f(\mu - x) = f(\mu + x), x \in \mathbb{R}.$$

Ukažte, že pro kvantily platí

$$x_{1-\alpha} = 2\mu - x_\alpha.$$

16. Hustota náhodné veličiny je $f(x) = 3x^2$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$ a nula jinak. Určete kvantilovou funkci.

Výsledek: $g(\alpha) = \sqrt[3]{\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$.

6 Transformace náhodných veličin

1. F je distribuční funkce náhodné veličiny X , která je spojitá a rostoucí. Určete rozdělení náhodné veličiny $Y = F(X)$.

Výsledek: Rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

2. Předpokládejme, že X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a F je spojitá a prostá distribuční funkce nějaké náhodné veličiny. Určete distribuční funkci náhodné veličiny $Z = F(X)$.

Výsledek: Z má distribuční funkci $G(z) = F^{-1}(z)$ pro $z \in [0, 1]$; 0 nalevo a 1 napravo od tohoto intervalu.

3. Úhel φ má rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Určete rozdělení náhodné veličiny $Y = tg \varphi$.

Výsledek: Cauchyovo rozdělení s hustotou $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$; $x \in (-\infty, \infty)$.

4. Rychlost molekul plynu má rozdělení $N(0, 1)$. Molekula má hmotnost m . Nalezněte distribuční funkci a hustotu energie částice.

Výsledek: Distribuční funkce

$$F(x) = 2 \Phi\left(\sqrt{\frac{2}{m}} x\right) - 1$$

pro $x \geq 0$ a nula jinak. Hustota $f(x) = \frac{1}{\sqrt{m\pi x}} e^{-\frac{x}{m}}$ pro $x > 0$, nula jinak.

5. X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 0, 3 \rangle$. Určete rozdělení $Y = 2X + 1$.

Výsledek: Rovnoměrné rozdělení na $\langle 1, 7 \rangle$.

6. Poloha částice o hmotnosti jedna má rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Určete rozdělení momentu setrvačnosti vůči počátku.

Výsledek: Distribuční funkce $F(x) = \sqrt{x}$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$; 0 nalevo a 1 napravo od tohoto intervalu.

Hustota $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pro $x \in (0, 1)$; 0 jinak.

7. X má hustotu $f(x)$. Určete hustotu $g(y)$ náhodné veličiny $Y = |X|$.

Výsledek: $g(y) = f(y) + f(-y)$ je-li $y \geq 0$; 0 jinak.

8. X má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 1. Určete hustotu náhodné veličiny $Y = aX + b$, $a > 0$.

Výsledek: $g(x) = \frac{1}{a} e^{\frac{b}{a}} e^{-\frac{x}{a}}$ pro $x > b$; 0 jinak.

9. Určete hustotu rozdělení $-X$, kde X je exponenciální rozdělení se střední hodnotou 1.

Výsledek: $f(x) = e^x$ pro $x < 0$; 0 jinak.

10. Náhodná veličina X má hustotu $f(x)$, která je nulová na doplňku intervalu I . Funkce h definovaná na I je ryze monotónní diferencovatelná funkce na intervalu I , která zobrazí interval I na interval J . Definujme náhodnou veličinu $Y = h(X)$. Ukažte, že hustota $g(y)$ veličiny Y je dána vztahem

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} h^{-1}(y) \right|,$$

pro $y \in J$; 0 jinak.

Návod: Pro distribuční funkci $G(y)$ veličiny Y platí

$$G(y) = \int_{\{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \leq y\}} f(x) dx,$$

Proveďte v integrálu substituci $z = h(x)$ a diskutujte zvlášť případ kdy h je rostoucí a klesající.

11. Plocha kruhu je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením $Exp(1)$. Určete rozdělení pro poloměr.
Výsledek: Hustota je dána vztahem:

$$g(y) = 2\pi y e^{-\pi y^2},$$

pro $y \geq 0$ a nula jinak.

12. **Logaritmicko-normální rozdělení.** X má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Určete hustotu náhodné veličiny $Y = e^X$.
Výsledek:

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{y},$$

pro $y > 0$ a 0 jinak.

13. Náhodná veličina X má hustotu $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pro $x > 0$ a 0 jinak. Určete hustotu náhodné veličiny $Y = -\ln X$.
Výsledek: $g(y) = \lambda e^{-\lambda e^{-y}} \cdot e^{-y}$.

14. Určete hustotu druhé mocniny normálního rozdělení $N(0, 1)$.
Výsledek:

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}.$$

pro $y \geq 0$ a 0 jinak.

15. Pravoúhlý trojúhelník má odvěsnu a velikosti 1. Ostrý úhel při této odvěsňě je náhodně vybrán z intervalu $(0, \pi/2)$. Určete rozdělení velikosti druhé odvěsny.
Výsledek: Hustota této veličiny je

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+x^2},$$

pro $x \geq 0$; 0 jinak.

16. X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle -1, e \rangle$. Určete distribuční funkci veličiny $Y = \ln |X|$.
Výsledek: $F(x) = \frac{2}{1+e}e^x$ pro $x \leq 0$; $F(x) = \frac{1+e^x}{1+e}$ pro $y \in \langle 0, 1 \rangle$; 1 jinak.

7 Standardní rozdělení

- Co je pravděpodobnější (a) šesti kostkami hodíme alespoň jedenkrát šestkou (b) dvanácti kostkami hodíme alespoň dvakrát šestku?
Výsledek: Pravděpodobnost prvního jevu je 0,6651, druhého 0,6187.
- Pravděpodobnost, že paměťový prvek je vadný je 2^{-27} . Na čipu je 2^{30} těchto prvků. a) Jaká je pravděpodobnost, že žádný prvek na čipu není vadný? b) Jaká je pravděpodobnost, že nejvýše tři prvky jsou vadné?
Výsledek: a) 0,00033546 b) 0,04238011
- Sklovina na výrobu lahví obsahuje kazy. Průměrný počet kazů je x na metrický cent. Láhev váží 1 kg. Jaký je podíl vadných lahví?. Jak se tento podíl změní bude-li láhev vážit 0,25 kg?
Výsledek: $1 - e^{-x/100}$; $1 - e^{-x/400}$.
- V každých 100 metrech látky je průměrně pět kazů. Látku rozstříháme na kusy po 3 m. Kolik můžeme očekávat kusů bez kazu?
Výsledek: 86,07079764%.
- Každých deset minut padá hvězda. Jaká je pravděpodobnost, že za 15 minut pozorujeme dvě hvězdy.
Výsledek: 0,285606
- Tohoto roku došlo na poštu 1017 dopisů bez adresy. Odhadněte počet dnů kdy došly více než dva dopisy bez adresy.
Výsledek: 52,72745272%.

7. Náhodná veličina má geometrické rozdělení s parametrem p . Určete pravděpodobnost, že $X \geq m$.
Výsledek: p^m .
8. Náhodná veličina má geometrické rozdělení s parametrem p . Určete $P[X \geq t + s | X \geq t]$.
Výsledek: p^s .
9. Dva hráči se střídají a házejí hrací kostkou. Vyhrává ten, kterému padne šestka. Jaká je pravděpodobnost výhry jednotlivých hráčů?
Výsledek: Začínající hráč má pravděpodobnost výhry 0,5454.
10. Házíme symetrickou mincí dokud nám nepadne třikrát líc. Jaká je střední hodnota počtu hodů.
Výsledek: 6.
11. Veličina X má exponenciální rozdělení s parametrem λ . Určete medián m .
Výsledek: $m = \frac{\ln 2}{\lambda}$.
12. Rádium má poločas rozpadu 1580 let. V 1g radiové rudy je asi 10^{15} atomů. Kolik těchto atomů se rozpadne za první rok.
Výsledek: $4,390036 \cdot 10^{12}$.
13. Pro náhodnou veličinu X s exponenciálním rozdělením platí $P[X \geq 0, 1] = 1/2$. Nalezněte t tak, že $P[X \geq t] = 0,9$.
Výsledek: 0,01520.
14. Pro oděvní továrnu je neziskové vyrábět pro velmi malé a velmi velké osoby. Ignorujeme 7,5% největších a 7,5% nejmenších osob. Výška mužů se řídí normálním rozdělením $N(69, 2, 8^2)$ (míry jsou v palcích). Nalezněte nejmenší a největší výšku, pro kterou vyrábět.
Výsledek: 65–73
15. Životnost žárovky v hodinách se řídí normálním rozdělením $N(61, 6, 3^2)$. Výrobce garantuje, že pouze 3% žárovek se spálí před určitou dobou. Určete tuto dobu.
Výsledek 49,15023.

16. Výsledky testu u přijímacích zkoušek se řídí normálním rozdělením $N(500, 100^2)$. Je přijato 70% uchazečů. K přijetí postačí 85 bodů. Kolik musí student získat bodů aby byl přijat.
Výsledek: 448
17. Výsledky přijímacích zkoušek se řídí normálním rozdělením s rozptylem 100. Je přijato 30% žadatelů. Jaký je průměrný výsledek u zkoušky?
Výsledek: 79,8
18. Máme normální rozdělení X s rozptylem $\sigma^2 = 0,5$. Jak zvolit střední hodnotu μ tak, aby $P[X > 2] \leq 0,001$?
Výsledek: $\mu \leq 0,35502$.
19. Máme rozdělení $N(100, \sigma^2)$. Jaké musí být σ aby
a) $P[99 \leq X \leq 101] = 0,5$
b) $P[99 \leq X \leq 101] = 0,7$
c) $P[99 \leq X \leq 101] = 0,9$?
Výsledek: a) 1,4826017 b) 0,9648505 c) 0,60795.
20. Výtah má nosnost 700 kg. Průměrná váha osob v kg má rozdělení $N(70, 400)$. a) Do výtahu nastoupilo šest osob. Jaká je pravděpodobnost, že výtah bude přetížen.
b) Kolik osob musí nejvýše nastoupit, aby pravděpodobnost přetížení byla menší než 0,001?
Výsledky: a) $0,54 \cdot 10^{-8}$ b) ne více než 7.

8 Nezávislost náhodných veličin

21. Ukažte, že jsou-li nezávislé veličiny X_1, X_2, \dots, X_n , pak jsou nezávislé i veličiny X_1, X_2, \dots, X_{n-1} .
22. Ukažte, binomické rozdělení je součtem nezávislých alternativních rozdělení.
23. X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, f a g po částech monotónní funkce. Ukažte, že $f(X)$ a $g(Y)$ jsou opět nezávislé.

24. X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením $\text{Exp}(\lambda)$. Stanovte hustotu součtu $Z = X + Y$.
Výsledek: $f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$ je-li $x \geq 0$, 0 jinak.
25. X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Stanovte hustotu součtu $Z = X + Y$.
Výsledek: trojúhelníkové rozdělení $f(x) = x$ pro $0 \leq x \leq 1$, $f(x) = 2 - x$ pro $1 \leq x \leq 2$, nula jinak.
26. X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny. X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a Y na intervalu $\langle 1, 2 \rangle$. Určete hustotu $X + Y$.
Výsledek: trojúhelníkové rozdělení, $f(x) = x - 1$ pro $1 \leq x \leq 2$; $f(x) = 3 - x$ pro $2 \leq x \leq 3$; jinak 0.
27. Dokažte matematickou indukcí, že součet n nezávislých exponenciálních rozdělení s parametrem λ má rozdělení s hustotou

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}, x \geq 0,$$

a 0 jinak.

9 Charakteristická funkce a vyšší momenty

- Stanovte charakteristickou funkci Poissonova rozdělení $Po(\lambda)$. Výsledek: $\psi(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)}$.
- Ukažte že součet nezávislých Poissonových rozdělení je Poissonovo rozdělení.
Návod: Vyjádřete charakteristickou funkci součtu.
- Určete střední hodnotu a rozptyl Poissonova rozdělení $Po(\lambda)$.
Výsledek: $EX = \lambda$; $\text{var} X = \lambda$.
- Stanovte obecný moment m_k standardního normálního rozdělení.
Výsledek: $m_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$; $m_{2k+1} = 0$. Návod – použijte Taylorův rozvoj charakteristické funkce v bodě 0.

- Stanovte charakteristickou funkci exponenciálního rozdělení s parametrem λ a určete pomocí ní obecné momenty tohoto rozdělení.
Výsledek: $\psi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - jt}$. $m_k = \frac{n!}{\lambda^n}$. Návod – rozviňte charakteristickou funkci v Taylorovu řadu v bodě 0.
- Určete charakteristickou funkci geometrického rozdělení $Ge(p)$.
Výsledek: $\psi(t) = \frac{1-p}{1-pe^{jt}}$.

10 Náhodné vektory

- Náhodná veličina X má distribuční funkci $F(x)$. Určete distribuční funkci vektoru $\vec{X} = (X, X)$.
Výsledek: $F(x, y) = F(\min\{x, y\})$.
- Náhodná veličina X má spojitou distribuční funkci $F(x)$. Určete distribuční funkci vektoru $\vec{X} = (X, -X)$.
Výsledek: $F(x, y) = F(x) - F(-y)$ je-li $x \geq -y$; 0 jinak.
- Náhodný vektor $\vec{X} = (X, Y)$ má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu v rovině se středem v počátku. Určete marginální rozdělení. Jsou kartézské souřadnice X a Y nezávislé?
Výsledek: Marginální distribuční funkce: $F(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\pi} + \frac{\arcsin x}{\pi} + \frac{1}{2}$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$; 0 nalevo a 1 napravo od tohoto intervalu. X a Y nejsou nezávislé.
- Náhodný vektor $\vec{X} = (X, Y)$ má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu v rovině se středem v počátku. Jsou polární souřadnice nezávislé?
Výsledek: Jsou nezávislé.
- Doba životnosti žárovky se řídí exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 1. Jaká je střední hodnota doby, po kterou svítí systém složený ze dvou žárovek jsou-li zapojeny a) sériově b) paralelně?
Výsledek a) 0,5 b) 1,5.
- Náhodné veličiny X a Y mají sdruženou hustotu $f(x, y) = \frac{1}{2} e^{-y} \sin x$ je-li $(x, y) \in \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, \infty \rangle$; 0 jinak. Určete pravděpodobnost, že

$X > Y$.

Výsledek: $1 - \frac{1}{4}(e^{-\pi} + 1)$.

7. Sdružená hustota veličin X a Y je $f(x, y) = x + y$ pro $(x, y) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$; 0 jinak. Určete hustotu marginálních rozdělání.

Výsledek: Marginální hustota pro X : $f(x) = x + \frac{1}{2}$ pro $0 \leq x \leq 1$; 0 nalevo a 1 napravo od tohoto intervalu. Stejně pro y .

8. X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $N(0, 1)$. Vypočtete pravděpodobnost, že a) (X, Y) má hodnotu v mezikruží se středem v počátku, vnitřním poloměrem 1 a vnějším poloměrem 2; b) $|X| < |Y|$.
Výsledek: a) $e^{-1/2} - e^{-2}$, b) $\frac{1}{2}$.

9. X má diskrétní rovnoměrné rozdělení na množině $\{x_1, x_2, x_3\}$, Y má diskrétní rovnoměrné rozdělení na množině $\{y_1, y_2, y_3\}$.

Dále platí $P[X = x_i, Y = y_i] = 1/3$ pro $i = 1, 2, 3$. Určete korelaci mezi X a Y .

Výsledek: korelace je rovna úhlu mezi vektory (x_1, x_2, x_3) , (y_1, y_2, y_3) .

10. Sdružená hustota veličin X a Y je $f(x, y) = x + y$ pro $(x, y) \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$; 0 jinak. Určete korelaci mezi X a Y .

Výsledek: $\rho(X, Y) = -\frac{1}{11}$.

11. X má standardní normální rozdělení. Určete $cov(X, X^3)$.

Výsledek: $\frac{3\sqrt{8}}{\sqrt{120}} = 0,774596$.

11 Asymptotické vlastnosti, Centrální limitní věta

1. Pomocí Čebyševovy nerovnosti nalezněte horní odhad hodnoty $P[|X - \frac{1}{\lambda}| \geq \varepsilon]$, je-li X veličina s rozdělením $Exp(\lambda)$.

Výsledek: $P[|X - \frac{1}{\lambda}| \geq \varepsilon] \leq \frac{1}{\lambda^2 \varepsilon^2}$.

2. Nechť X je náhodná veličina s Poissonovým rozdělením $Po(n, \lambda)$. Čím je možno aproximovat distribuční funkci veličiny $\frac{X - EX}{\sqrt{var X}}$ pro n velké?

Výsledek: Rozdělením $N(0, 1)$ dle centrální limitní věty.

3. Žárovka vydrží průměrně deset dní a doba její životnosti se řídí exponenciálním rozdělením. Žárovky jsou postupně nahrazovány novými.

Nalezněte pravděpodobnost, že za dobu jednoho roku nebude zapotřebí více než 50 žárovek.

Výsledek: 0,971933.

4. V 10 000 hodech mincí padl líc 5087 krát. Lze minci považovat za symetrickou?

Výsledek: Je-li mince skutečně symetrická, pak pravděpodobnost, že počet líců přesáhne 5087, je 0,0409295090 a tedy relativně malá.

5. Bylo sečteno 300 čísel zaokrouhlených na jedno desetinné místo. Stanovte pravděpodobnost, že zaokrouhlovací chyba nebude větší než 1. (Zaokrouhlovací chyba při jednom součtu má rovnoměrné rozdělení.)

Výsledek: 0,9545.

6. 32% lidí má krevní skupinu 0. Nalezněte pravděpodobnost, že ze 400 náhodně vybraných osob je počet osob s touto krevní skupinou mezi 200 a 250.

Výsledek: 0,0093.

7. Sledujeme polohu bodu při náhodné procházce v čase n . (Viz příklad výše.) Stanovte (přibližně) pravděpodobnost, že vzdálenost od počátku nebude větší než 1.

Výsledek: $2 \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1$.

8. Kolik respondentů je třeba oslovit při předvolebním průzkumu abychom odhadli volební výsledek s pravděpodobností α a chybou ne více než ε ?

Výsledek: počet osob: $n \geq \frac{1}{4\varepsilon^2} u_{\frac{1+\alpha}{2}}^2$.

9. Kolik respondentů je třeba oslovit při předvolebním průzkumu abychom odhadli volební výsledek s pravděpodobností α a chybou ne více než ε , víme-li, že volební preference nebudou větší než 30%? Určete tuto hodnotu je-li $\varepsilon = 0,01$; $\alpha = 0,9$.

Výsledek: počet osob: $n \geq 0,21 \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} u_{\frac{1+\alpha}{2}}^2$.

alespoň: 5 676 osob.

12 Intervalové odhady

1. Odvoďte horní $1 - \alpha$ interval spolehlivosti pro μ z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, známe-li σ .

Výsledek: $\mu \leq \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha}$.

2. Odvoďte dolní $1 - \alpha$ interval spolehlivosti pro μ z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ pomocí výběrového rozptylu.

Výsledek: $\mu \geq \bar{X}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_{n-1}(1 - \alpha)$.

3. Bylo provedeno 31 měření teploty. Výběrový průměr byl 62,8 F. Víme, že směrodatná odchylka je 6,06. a) Určete 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu teploty. b) Určete horní 95% interval spolehlivosti pro střední hodnotu teploty.

Výsledek: (60,7, 64,9); b) $(-\infty, 64,5)$.

4. Botanik měří výšku 16 rostlin. Průměr naměřených hodnot je 72,5cm, výběrová odchylka je 4,5cm. Naleznete 90% interval spolehlivosti pro střední výšku rostliny.

Výsledek: (70,53cm, 74,47cm).

5. U 1525 žen byl měřen cholesterol. Výběrový průměr je 191,7 (mg/100ml), výběrová směrodatná odchylka je 41. Určete 97% interval spolehlivosti pro střední hodnotu hladiny cholesterolu.

Výsledek: (189,42, 193,98).

6. Chceme si být na 99% jisti, že průměrné IQ u n náhodně vybraných osob bude v intervalu délky 4. Víme, že směrodatná odchylka rozdělení IQ je menší než 15. Stanovte n .

Výsledek: $n \geq 374$.

7. Odvoďte $1 - \alpha$ intervalový odhad pro σ^2 z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

Výsledek:

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1}^2(1-\alpha/2)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{n-1}^2(\alpha/2)}$$

8. Určete horní 95% interval spolehlivosti pro σ^2 v rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, víme-li, že $S_{1000} = 2$. (Aproximujte kvantily rozdělení χ^2 kvantily normálního rozdělení.)

Výsledek: $\sigma^2 \leq 4,318$.

9. V průzkumu Roper Organization bylo zjištěno, že z 2000 dospělých mělo 1280 pravidelné spoření. Najděte 95% interval spolehlivosti pro skutečný podíl osob s pravidelným spořením.
Výsledek: (61,9%, 66,1%).
10. Ankety o legalizaci měkkých drog se zúčastnilo 500 osob. Jaká je chyba tohoto šetření chceme-li 95% odhad procenta osob souhlasících s legalizací.
Výsledek: Chyba je 4,38%.
11. Chceme odhadnout s maximální chybou 3% skutečné procento lidí sledujících daný TV pořad. Požadujeme 95% interval spolehlivosti. U kolika osob musíme sledovanost zjišťovat?
Výsledek: Alespoň 1068.
12. Bylo uskutečněno 2000 měření hodnot náhodné veličiny X . Výběrový průměr je 12,5; výběrová směrodatná odchylka je 1,6. Nalezněte přibližný 95% intervalový odhad pro střední hodnotu X .
Výsledek: $12,4298 \leq EX \leq 12,5701$.

13 Testování statistických hypotéz

1. V roce 1951 byla průměrná výška 10 letých chlapců 136,1cm se směrodatnou odchylkou 6,4cm. V roce 1961 se u 15 náhodně vybraných chlapců zjistila průměrná výška 139,133cm. (Předpokládáme že rozptyl rozdělení se nemění.) Testujte hypotézu, že průměrná výška v roce 1961 je stejná jako v roce 1951 oproti alternativní hypotéze, že je větší.
Výsledek: Na hladině významnosti 5% je výška větší.
2. Automat plní krabice pracím práškem. V každé krabici má být 2kg pracího prášku. Náhodně bylo vybráno 6 krabic a byly zjištěny následující odchylky od normy (v dkg).

$$-5, 1, -1, -8, 7, -6.$$

Testujte hypotézu, že automat pracuje správně.

Výsledek: Na hladině významnosti 5% pracuje správně.

3. Elektrický měřicí přístroj byl nastaven na hodnotu 15,2. Při sérii měření byly získány výsledky:

15,23—15,21—15,19—15,16—15,26—15,22—15,23—15,26—15,23—15,29.

Testujte na hladině významnosti 5% hypotézu že přístroj pracuje správně. Výsledek: Hypotézu zamítáme.

4. Máme rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Víme, že výběrová směrodatná odchylka $S_n = 0,01$. Pro jakou hodnotu výběrového průměru zamítneme hypotézu $H_0 : \mu = 10$ oproti a) $H_1 : \mu \neq 10$ b) $H_1 : \mu > 10$? Spočítejte numericky pro $n = 1000$. Hladina významnosti je 5%.

Výsledek: a) $|\bar{X}_n - 10| \geq \frac{0,01}{\sqrt{n}} t_{n-1}(0,975)$; $|\bar{X}_n - 10| \geq 6,2 \cdot 10^{-4}$ b) $\bar{X}_n > 10 + \frac{0,01}{\sqrt{n}} t_{n-1}(0,95)$, $\bar{X}_n > 10 + 5,202 \cdot 10^{-4}$.

5. Je sledován efekt diety u tří osob. Jejich váhy jsou uvedeny v následující tabulce:

Váha před dietou	82 kg	70 kg	91 kg
Váha po dietě	81 kg	69,5 kg	89 kg

Má dieta hubnoucí efekt?

Výsledek: Na hladině významnosti 5% není hubnoucí efekt průkazný.

6. Byla sledována váha pěti osob před tréninkem a po tréninku. Srovnání vah je uvedeno v následující tabulce:

Váha před tréninkem	99 kg	62 kg	74 kg	59kg	70kg
Váha po tréninku	94 kg	62 kg	66 kg	58 kg	70 kg

Testujte hypotézu že trénink vede ke změně váhy oproti její negaci. Výsledek: Potvrzujeme na hladině významnosti 5% že trénink nemá vliv na váhu osob.

7. Statisticky šetříme alternativní rozdělení $A(p)$. Pro jakou hodnotu výběrového průměru zamítneme hypotézu

$$H_0 : p \leq p_0$$

ve prospěch hypotézy

$$H_1 : p > p_0$$

na hladině významnosti α ?

$$\text{Výsledek: } \overline{X}_n \geq p_0 + \frac{u_{1-\alpha}}{2\sqrt{n}}.$$

8. 1 600 osob bylo dotázáno zda budou volit danou politickou koalici. Kolik procent hlasů z této skupiny osob musí koalice získat aby byla na hladině významnosti 1% potvrzena hypotéza, že koalice volby vyhraje. Výsledek: 52,9% hlasů, tj. 847 hlasů.
9. Testujeme zda hrací kostka není falešná. Bylo provedeno 120 pokusných hodů. Výsledky jsou uvedeny v následující tabulce.

hodnota	1	2	3	4	5	6
četnost	15	16	25	31	15	18

Výsledek: Na hladině významnosti 5% je potvrzena hypotéza, že kostka je homogenní.

10. Hod dvojicí kostek má 36 možných výsledků. Testuje se homogenita obou kostek. Kolik pokusů test vyžaduje? Pro takovýto počet pokusů byla získána hodnota $\sum_{i=1}^n \frac{(O_i - np_i)^2}{np_i} = 67,2$. Jaký je závěr? Výsledek: Počet pokusů alespoň 181, zamítnout na hladině významnosti 5%.
11. Testujeme hypotézu že data pocházejí ze standardního normálního rozdělení. Bylo provedeno 1000 měření. Z toho: 250 hodnot bylo menších než $-u_{0,8}$; 550 hodnot bylo v intervalu $(-u_{0,8}, u_{0,8})$; 200 hodnot bylo větších než $u_{0,8}$. Výsledek: Na hladině významnosti 5% zamítáme hypotézu, že data pocházejí z rozdělení $N(0, 1)$.

12. Území Londýna bylo rozděleno na 576 oblastí stejné velikosti. Za války bylo zasaženo celkem 537 raketami V1 a V2. Testujte hypotézu že počet zásahů v náhodně vybrané oblasti se řídí Poissonovým rozdělením. K dispozici jsou následující data:

počet zásahů	0	1	2	3	4 a více
počet oblastí	229	211	93	35	8

Výsledek: Na hladině významnosti 5% hypotézu potvrzujeme.

13. Na hladině významnosti 5% testujte hypotézu, že data pocházejí z geometrického rozdělení. Bylo provedeno 100 pokusů s následujícím výsledkem:

hodnota	0	1	2	3 a více
četnost	50	20	20	10

Výběrový průměr je 1,5.

Výsledek: Zamítáme.

Literatura

- J.Hamhalter: přednášky předmětu M4B (2005).
- J.Hamhalter: cvičení předmětu M4B (2005).
- V.Rogalewicz: Pravděpodobnost a statistika pro inženýry, skripta, Vydavatelství ČVUT, 1998.

- K.Zvára a J.Štěpán: Pravděpodobnost a matematická statistika, matfyzpress, Praha 2002.
- J.Anděl: Matematika náhody, matfyzpress, Praha 2003.
- J.Anděl: Statistické metody, matfyzpress, Praha 2003.
- V.Dupač a M.Hušková: Pravděpodobnost a matematická statistika, Nakladatelství Karolinum, 1999.
- Z.Prášková: Základy náhodných procesů II, Nakladatelství Karolinum, Praha, 2004.
- A. Rényi: Teorie pravděpodobnosti, Academia, Praha 1972.