

Z-Transformace

26. listopadu 2008 18:51

1. Nalezněte Z-obraz posloupnosti $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$
Výsledek $F(z) = \frac{z^2}{z^2-1}$.
2. Nalezněte Z-obraz posloupnosti $(\frac{a^n}{n!})$.
Výsledek: $e^{\frac{a}{z}}$.
3. Nalezněte Z-obraz posloupnosti $(0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$.
Výsledek: $F(z) = -\text{Log}(1 - 1/z)$.
4. Víme, že $Z(a_n) = F(z)$. Učete Z-obraz posloupnosti $(0, 0, a_0, 0, 0, a_1, 0, 0, a_2, \dots)$.
Výsledek: $\frac{1}{z^2} F(z^3)$.
5. Nalezněte Z-obraz posloupnosti $(a^n \cos \omega n)_{n=0}^{\infty}$.
Výsledek: $\frac{a z (\frac{z}{a} - \cos \omega)}{z^2 - 2 a z \cos \omega + a^2}$.
6. Nalezněte Z-obraz posloupnosti $(\sinh \omega n)$.
Výsledek: $\frac{z \sinh \omega}{z^2 - 2 z \cosh \omega + 1}$.
7. Nalezněte Z-obraz posloupnosti (n^2) .
Výsledek: $\frac{z^2+z}{(z-1)^3}$.
8. Nalezněte Z-obraz posloupnosti $(0, a, \frac{a^2}{2}, \frac{a^3}{3}, \dots, \frac{a^k}{k}, \dots)$.
Výsledek: $\text{Log} \frac{z}{z-a}$.
9. Určete posloupnost (a_n) , pro kterou platí

$$(a_n) * (2^n) = (4^n).$$

Výsledek: $a_n = \delta_{n0} + 2 \cdot 1(n-1) 4^{n-1}$.

10. Vypočtěte konvoluci $(a^n)_{n=0}^{\infty} * (b^n)_{n=0}^{\infty}$.
Výsledek: $\left(\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}\right)_{n=0}^{\infty}$ pro $a \neq b$ a $((n+1)a^n)_{n=0}^{\infty}$ pro $a = b$.
11. Časově invariantní diskretní lineární systém má odezvu na jednotkový impulz posloupnost $(2^n)_{n=0}^{\infty}$. Co je odezvou na posloupnost $(3^n)_{n=0}^{\infty}$?
Výsledek: $(3^{n+1} - 2^{n+1})_{n=0}^{\infty}$.

12. Časově invariantní diskretní lineární systém transformuje posloupnost $(2^n)_{n=0}^\infty$ na posloupnost $(3^n)_{n=0}^\infty$. Co je odezvou na jednotkový impulz ?

Výsledek: $(1, 1, 3, 3^2, 3^3, \dots)$.

13. Nalezněte inverzní Z-obraz funkce $F(z) = \frac{1}{z^2+1}$.

Výsledek: $a_{2n+2} = (-1)^n$ a nula jinak.

14. Nalezněte inverzní Z-obraz funkce $F(z) = \frac{z}{z^2-6z+8}$.

Výsledek: $(\frac{1}{2}(4^n - 2^n))$.

15. Nalezněte inverzní Z-obraz funkce $F(z) = \frac{3z^2-z}{(z-1)(z-2)^2}$.

Výsledek: $(2 - 2^{n+1} + 5n \cdot 2^{n-1})$.

16. Řešte diferenční rovnici

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$$

$y_0 = 1, y_1 = 2$.

Výsledek: $y_n = 2^n$.

17. Řešte diferenční rovnici

$$y_{n+1} + 2y_n = n$$

$y_0 = 1$.

Výsledek: $y_n = \frac{10}{9}(-2)^n - \frac{1}{9} + \frac{3}{9}n$.

18. Řešte diferenční rovnici

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} = [(-1)^{n-1} - 1]1(n-1)$$

$y_0 = 1, y_1 = 0$.

Výsledek: $y_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{3} - \frac{2^{n-1}}{3}, n \geq 2$.

19. Řešte diferenční rovnici

$$y_{n+2} - y_{n+1} + y_n = 0$$

$y_0 = 1, y_1 = 2$.

Výsledek: $y_n = 2 \cos(\frac{(n-1)\pi}{3})$.

20. Řešte diferenční rovnici

$$\Delta^2 y_n = 2$$

$$y_0 = 1, \Delta y_0 = 1.$$

$$\text{Výsledek: } y_n = n^2 + 1.$$

21. Řešte diferenční rovnici

$$\Delta^2 y_n + y_n = 0$$

$$y_0 = 1, \Delta y_0 = 0.$$

$$\text{Výsledek: } y_n = 2^{n/2} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

22. Řešte diferenční rovnici

$$\Delta^2 y_n = a_n$$

$$y_0 = 0, \Delta y_0 = 1.$$

$$\text{Výsledek: } y_n = n + \sum_{k=1}^n (k-1) a_{n-k}, n \geq 1.$$

23. Řešte diferenční rovnici

$$y_{n+1} - 2y_n = a_n$$

$$y_0 = 0.$$

$$\text{Výsledek: } y_n = \sum_{k=1}^n 2^{k-1} a_{n-k}, n \geq 1.$$

24. Řešte diferenční rovnici

$$y_{n+3} + y_n = a_n$$

$$y_0 = y_1 = y_2 = 0.$$

$$\text{Výsledek: } y_n = a_{n-3} - a_{n-6} + a_{n-9} + \dots$$

25. Řešte diferenční rovnici

$$y_{n+2} + \sum_{k=0}^n 2^k y_{n-k} = 1$$

$$y_0 = y_1 = 0.$$

$$\text{Výsledek: } y_n = (n-1)\left[-\frac{1}{2}n + 2\right].$$

26. Určete součet

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

Výsledek: $\frac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1)$.

27. Určete součet

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n}.$$

Výsledek: $2 - \frac{n+1}{2^n} - \frac{1}{2^n}$.