

NOVÉ MOŽNOSTI PROGRAMU MAPLE VE VÝUCE MATEMATIKY

Aleš Němeček

Abstrakt:

Příspěvek se zabývá přístupy, které umožňují počítačové algebraické systémy ve výuce základních kurzů matematiky.

Nástin situace

Role počítačů ve výuce na všech stupních škol je v současné době ve světě prvořadým pedagogickým, metodickým, ale i sociologickým a psychologickým problémem. Jeho aktuálnost, zvláště v matematice, podtrhují již existující a dále se rozvíjející počítačové algebraické systémy (PAS), které umožňují provádět většinu symbolických i numerických výpočtů, včetně grafického znázornění postupů a výsledků i snadné modifikace řešení.

Poslední novinkou bylo vytvoření prostředí, které koncovému uživateli umožňuje pouze pomocí webového prohlížeče zadat svoje vstupní data do výpočtu, který na vzdáleném serveru realizuje program *MATHEMATICA*[®] nebo *Maple*[®] (navíc možno i v uspořádání do clusteru) a stejnou cestou získat zpět třeba i grafický výsledek. Tím se zcela nově dostávají k systému i vzdálení uživatelé, kteří nejen že nepotřebují vlastní instalaci programu, ale nemusí ani detailně znát jeho příkazy. Mohou však naplno využívat jeho sofistikované výpočetní možnosti. To však předpokládá kvalitní hardwarové i personální zázemí, které je nutné udržovat a rozvíjet, aby byla zajištěna vysoká spolehlivost a rychlost přístupu pro dostatečný počet současně připojených uživatelů.

V naší republice používá PAS už většina vysokých škol, i když ve značně omezeném počtu instalací, protože jsou cenově velmi náročné. Mají své místo ve vědecké práci pedagogů (uplatnily se i v čistě teoretickém výzkumu), tvorbě skript a vhodným způsobem mohou doplňovat a zpestřovat výuku.

Do značné míry se však liší přístupy k jejich začlenění do výuky. U aplikačních předmětů, ať už matematických nebo technických, je volba jednoduchá – využijeme zvláště výpočetní sílu systémů v podobě nástroje pro řešení složitých a jinak časově velmi náročných výpočtů, simulací i grafických reprezentací (typickým příkladem na FEL ČVUT je [10] a další [13]).

Mnohem citlivejši je ale nutné postupovať zvlášť v predmätach základných kurzů matematiky, kde snadno môžeme sklouznout ke dvěma krajním možnostem. Podľa jedného názoru je matematická teória téměř zbytočná, pretože nakoniec stejně inženýr použije určitý príkaz, proceduru, prográmek ap. a dostane konkrétne výsledok, ktorý vyhodnotí a nemusí ho moc zaujímat jak a proč se k němu došlo (metoda black box). Druhým extrémním přístupem je strohé předkládání matematické teorie stylem definice, věta, důkaz, doplněné příklady, kde výsledky vycházejí „pěkně“, nejlépe celočíselně, a není proto třeba si čistit ruce od křídly pro použití kalkulačky nebo klávesnice počítače.

Poslední verze programů *Maple*[®], ale i *Derive*, však nabízejí novinky, které vnášejí do učebního procesu pomocí PAS zcela nový rozměr. Uživatel si může nejen nechat zobrazit a přímo modifikovat mnoho teoretických poznatků, ale lze také provádět řešení „krok po kroku“ zadáváním posloupnosti pravidel, které se postupně aplikují v probíhající výpočtu nebo úpravě. Pokud si uživatel neví rady, lze zobrazit nápovědu postupu včetně připomenutí formulace právě aplikovaného pravidla. Jestliže použití některého pravidla již zvládáte, můžete ho označit a systém vás při jeho další případné aplikaci již nebude zdržovat připomínkou (podobně jako když začnete vynechávat opakování již dobře známých slovíček cizího jazyka v osobním slovníčku).

Možnosti programu Maple

Na katedře matematiky FEL používáme programy *MATHEMATICA*[®] a *Maple*[®] od roku 1990 (*Mathematica 2.1*, *Maple V Release 2*). Velmi brzy jsme získali i celoškolské multilicence obou hlavních představitelů PAS a umožnili tím jejich rozšíření nejen mezi akademická pracoviště ČVUT, ale i do učeben, studoven a částečně i pro domácí využití studenty. Tím se otevřela možnost jejich širokého použití v učebním procesu [13]. Postupný vývoj dokládá celá řada publikací [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9], [14]. Dále se soustředíme pouze na novinky posledních verzí *Maple*[®].

Již od verze 8 (rok 2002) se tvůrci programu *Maple*[®] začali intenzivně zabývat dalším rozvojem knihoven *Calculus1* a *LinearAlgebra* pro základní partie inženýrské vysokoškolské matematiky. Balíčky byly doplněny zvlášť o příkazy umožňující přehledné grafické demonstrace definic a vět teorie diferenciálního a integrálního počtu (definice derivace; zobrazení tečen ke grafu funkce, asymptot, bodů, kde funkce nabývá lokální extrém, inflexe, ap.; rozvoj do Taylorovy řady a aproximace jejím částečným součtem; věta

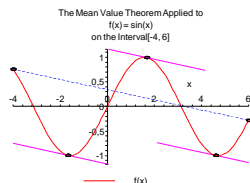
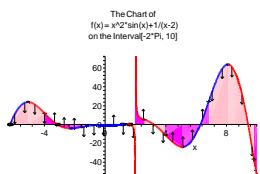
o strední hodnotě a Rolleova věta), základních algoritmů numerické matematiky (Newtonova metoda na hledání nulových bodů funkce; interpolace a aproximace funkce; aproximace integrálu Newtonovými-Cotesovými vzorci), ale i výpočet např. délky křivky resp. funkce, objemu tělesa vytvořeného rotací dané funkce kolem jedné z os ap. V balíčku *LinaerAlgebra* můžeme snadno pracovat s novými typy datových struktur umožňující korektně definovat maticové operace a efektivně počítat s maticemi speciálních typů, což často vede k podstatnému urychlení výpočtu. I zde je dostatek místa pro zobrazení vektorů, jejich součtů, součinů, dále rovin, řešení soustav lineárních rovnic, lineárních transformací a projekcí, ale i aproximace metodou nejmenších čtverců.

Další nadstavba pro studenty byla zařazena do následující verze 9 (rok 2003), která však trpěla „dětskými nemocemi“ zásadní změny technologie – přepsání jádra do jazyku *Java*, přeprogramování některých algoritmů, celkovou změnou designu grafického uživatelského rozhraní a jiným formátem uložení worksheetu včetně změny kódování české diakritiky a ostatních národních abeced. Alespoň po prvním seznámení s poslední verzí 9.5 (červen 2004) se zdá, že došlo k vylepšení funkčnosti. Potěšitelné zůstává, že tvůrci programu pokračují v trendu rozvoje balíčků pro potřeby výuky, konkrétně se objevují příkazy pro diferenciální počet funkcí více proměnných *Multivariate Calculus* a počet interaktivních tutorů se zvětšil na čtyřicet.

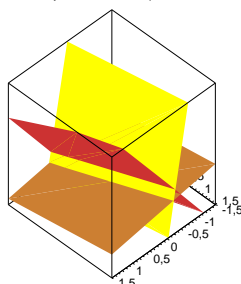
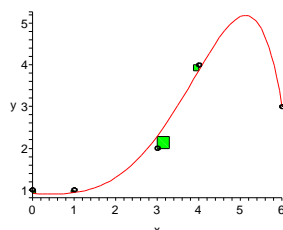
Většinu těchto nástrojů využíváme se studenty prvního ročníku ve volitelném předmětu *Matematika v Maple* [12].

Vizualizace

Základním prostředkem pro pochopení podstaty problému je v mnoha případech jeho zobrazení a následná modifikace vstupů pro porovnání změny výsledků. Většinu jednoduchých úloh lze zadat tak, aby student nejprve musel provést jejich matematickou formulaci, pak teprve určit vhodnou metodu řešení, kterou následně aplikuje (již s pomocí výpočetního systému), ověří správnost výsledku (početně i graficky, pokud to lze) a provede modifikaci zadání a porovnání výsledků. Snadno, většinou použitím jednoho příkazu, lze demonstrovat často používaná tvrzení a postupy. Na obrázcích je postupně grafické vyšetření průběhu funkce, ilustrace věty o střední hodnotě, vzájemná poloha rovin pro soustavu tří lineárních rovnic, která nemá řešení, aproximace metodou nejmenších čtverců s vykreslením kvadrátů odchylek.



A System of Linear Equations

The Least Squares Fit of 5 Points of the Curve $a \cdot x^3 + d \cdot \exp(x) + e$ 

Samotné príkazy *Maple*[®] však poslúži i v mnoha ďalších grafických demonštráciach [15]. Ukážky zadání príkladů a jejich řešení budou předvedeny při prezentaci na konferenci.

Step by step

Verze 9 a následně i 9.5 přinesla i možnost postupného výpočtu, takže student může krok po kroku nejen sledovat jakou posloupnost pravidel je potřeba během výpočtu aplikovat, ale má možnost i tento proces sám ovlivňovat určením pořadí pravidel a jejich postupným zadáváním. V případě nesprávné volby je upozorněn na nemožnost aplikace zvoleného pravidla.

Při tomto přístupu, stejně jako v případě vizualizace, je však nutné znát příkazy a ovládání programu *Maple*[®]. To může často způsobit i zvýšení časové náročnosti řešených příkladů. Student však má možnost se zcela samostatně dozvědět, jaký je správný postup řešení a případně si sám ověřit svoji úvahu na dalších příkladech.

Maplets

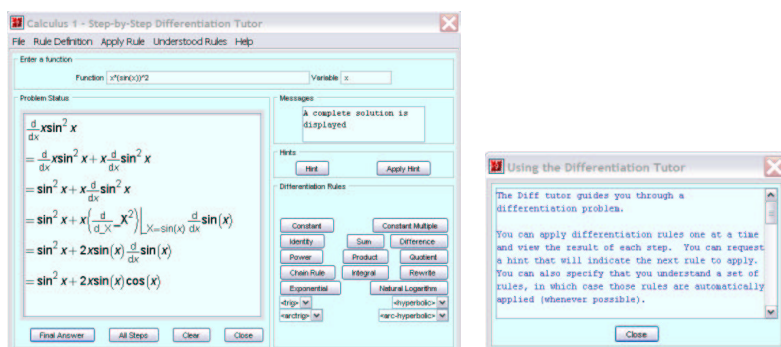
Předchozí nevýhody odstraňuje kombinace obou zatím zmíněných přístupů – *Maplets*TM, nově definovaná grafická uživatelská rozhraní pro demonstrace

a výpočty. Ovládají se většinou tlačítkovými lištami a obsahují okna pro zadání vstupních a zobrazení výstupních hodnot, které mohou být jak ve tvaru obrázku, tak výrazu, posloupnosti hodnot ap. Mají také samostatnou nápovědu. Lze je spouštět jako ostatní příkazy většinou bez uvedení argumentů, ty se mohou často doplnit až přímo na určené místo v nově otevřeném okně. Zkušený uživatel může pomocí příkazů *Maple*[®] vytvářet vlastní *Maplets*[™] pro zvolené použití a přesně podle svých představ. Dříve byly dostupné nezávisle na distribuci programu, ale poslední verze je stále více zařazují ve formě interaktivních tutorů přímo do jednotlivých knihoven.

Alespoň malou ukázkou, ovšem v nepříjemně „mrtvém provedení“, může být několik dalších obrázků (tutor pro výpočet inverzní matice – s nápovědou dalšího kroku – a Gaussovy eliminace, ...



...tutor pro výpočet derivace funkce jedné proměnné a úvodní informace helpu).



S novou technologií *MapleNetTM* je možno *MapletsTM* interaktivně používat bez instalace *Maple[®]* na vlastním klientském počítači pouze prostřednictvím webového prohlížeče. Na vzdáleném *MapleNetTM* serveru běží vedle sebe software zprostředkovávající komunikaci klientských požadavků zadávaných ve webovém prohlížeči s „matematickým motorem“ – jádrem programu *Maple[®]* a do webového prohlížeče zpět předává i výsledky. Komunikace probíhá na bázi http, XML a MathML protokolů. K tomu je nezbytně nutné, aby klientský počítač byl schopen používat odpovídající *Java Applety* a JRE plugin. Tento přístup je teprve na začátku vývoje, takže ho provázejí mnohé potíže a chyby, ale lze očekávat, že to bude hlavní směr, který výrobce bude výrazně dotovat a rychle vyvíjet. Otevírá se tím cesta k nyní tak často skloňovaným pojmům jako *distance education* a *e-learning*.

Závěr

Popisovat na papír možnosti interaktivní aplikace je velmi nevděčný úkol, protože slova nemohou nahradit bezprostřední zkušenost a výhodu vlastního experimentu před obrazovkou počítače. Něco málo, s využitím posledních technologií však podstatně více, lze zprostředkovat pomocí Internetu.

V matematických aplikacích ani vědecké práci však nikdy nemůže dojít k plnému nahrazení člověka výpočetní technikou, protože kouzlo nové myšlenky, jiného úhlu pohledu na věc, analytického přístupu k řešení, intuitivní

úvahy s využitím predchádzajúcich skúseností a v neposlední rade i kontroly výsledku „odhadem od oka“ asi ešte dlho zůstanou výsadou dosud v prírode neprekonané „technologie“ mozgových buniek. Teorie matematiky a hlbší pochopení jejích alespoň základních principů by neměla zmizet z poslucháren technických univerzit, protože tento způsob tvůrčí práce, stejně jako efektivní použití výpočetních možností systémů, patří ke kvalifikaci moderního inženýra.

Resumé

This contribution focuses on some approaches to teaching bachelor-level mathematics which were made possible by computer algebraic systems. The main focus is on visualization, possibility of step-by-step calculations, and connections with distance education and e-learning.

Literatura

- [1] Gregor, J. – Němeček, A.: Problem oriented mathematical education in engineering with *MATHEMATICA*[®], nepublikovaná přednáška na *European Mathematica Conference for advanced users*, Oxford, Velká Británie, 1994.
- [2] Gregor, J. – Němeček, A.: The Impact of *MATHEMATICA*[®] on Mathematical Education, in *Innovation in Mathematics*, Proceedings of the Second International Mathematica Symposium, V. Keranen (ed.), Rovaniemi, Finland, Computational Mechanics Publications, Southampton Boston, 1997, pp. 177–183.
- [3] Navara, M.: Less simple Maple – evaluation rules, bugs, and advantages, Workshop *Computer Aided Education in Automatic and Control*. Bratislava, ed. M. Huba, Slovak University of Technology, Bratislava, Slovensko, 1997, pp. 74–97.
- [4] Němeček, A.: Matematika příjemněji?, *Sborník 25. konference VŠTEZ*, ed. V. Kočandrová, konference Matematika v inženýrském vzdělávání, MtF STU Trnava, JČMF, JSMF, Trnava, Slovensko, 1998, pp. 181–184.
- [5] Němeček, A.: Computer Algebra Systems (CAS) – New Ways in Mathematical Teaching. *Workshop 98*, ČVUT Praha, 1998, pp. 43–44.

- [6] Němeček, A.: Matematika nejen v *Mathematice*_®, *Sborník konference MATHEMATICA '99*, konference MATHEMATICA '99, Slovenská technická univerzita Bratislava, KM SjF, KMaDG SvF, Bratislava, Slovensko, 1999, pp. 99–102.
- [7] Němeček, A.: Numerické metody pokaždé jinak, *Sborník semináře Matematika na vysokých školách*, JČMF v Praze, ed. L. Herrmann, Herbertov, p. 41-44, 2001, ISBN 80-01-02367-2.
- [8] Němeček, A.: *Numerické metody v přímém přenosu*, Využití Maple ve výuce a výzkumu na vysokých školách a akademiích věd, Workshoop, Fak. informatiky MU a Fak. stavební VUT Brno, 2002, publikováno na CD ROM.
- [9] Němeček, A.: The Course of Numerical Methods with Electronic Support, *CTU Reports, Proceedings of Workshoop 2002 (Part A)*, CTU in Prague, p. 26-27, 2002, ISBN 80-01-02511-X.
- [10] <http://math.feld.cvut.cz/nemecek/nummet.html>
podrobné informace o předmětu *Numerické metody*.
- [11] <http://math.feld.cvut.cz/nemecek/pas-v.html>
podrobné informace o předmětu *Počítačové algebraické systémy*.
- [12] <http://math.feld.cvut.cz/nemecek/matvmap.html>
podrobné informace o předmětu *Matematika v Maple*.
- [13] <http://math.feld.cvut.cz/nemecek/pas.html#predmety>
přehled předmětů využívajících PAS na ČVUT.
- [14] <http://math.feld.cvut.cz/nemecek/pas-pub.html>
přehled publikací využívajících PAS na ČVUT.
- [15] <http://math.feld.cvut.cz/nemecek/maple/knihovny9/knihovny.html>
ukázky příkazů *Maple 9* z knihovny *Student*.

RNDr. Aleš Němeček
katedra matematiky, FEL ČVUT
Technická 2, 166 27 Praha 6
nemecek@math.feld.cvut.cz
<http://math.feld.cvut.cz/nemecek>