

KAPITOLA 1: Míra a měřitelné funkce

$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$ – potenční množina množiny X

1.1 Měřitelné množiny

dále předpokládáme $X \neq \emptyset$

Definice: Systém \mathcal{S} podmnožin množiny X se nazývá **algebra**, jestliže

$$(A1) \quad \emptyset \in \mathcal{S},$$

$$(A2) \quad A \in \mathcal{S} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{S} \text{ (uzavřenost na doplněk),}$$

$$(A3) \quad A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{S} \text{ (uzavřenost na sjednocení).}$$

Systém \mathcal{S} se nazývá **σ -algebra**, pokud splňuje podmínky (A1), (A2) a

$$(A3\sigma) \quad A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{S}.$$

Je-li \mathcal{S} σ -algebra na X , nazýváme dvojici (X, \mathcal{S}) **měřitelný prostor** a množiny $A \in \mathcal{S}$ nazýváme **\mathcal{S} -měřitelné**.

Platí: Podmínky (A1), (A2) v definici (σ -)algebry lze nahradit podmínkami

$$(A1^*) \quad X \in \mathcal{S}$$

$$(A2^*) \quad A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{S}$$

(Odtud dostáváme, že každá σ -algebra splňuje podmínky (A1), (A1*), (A2), (A2*), (A3 σ) (analogicky pro algebra).)

Důkaz proveďte jako cvičení. (Návod: Abychom ukázali, že (σ -)algebra splňuje (A2*), musíme využít její uzavřenost na sjednocení.) \square

Platí: a) Každá algebra je uzavřená na průnik.

b) Každá algebra je uzavřená na konečná sjednocení a konečné průniky, tj.

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{S} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{S} \text{ a } A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{S}.$$

c) Každá σ -algebra je uzavřená na spočetné průniky.

Důkazy a) a b) proveďte jako cvičení. K důkazu **c)** použijeme přepis

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = X \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} (X \setminus A_j). \quad \square$$

Příklady:

- $\{\emptyset\}$ není σ -algebra (protože předpokládáme $X \neq \emptyset$).
- $\{\emptyset, X\}$ je σ -algebra.
- $\mathcal{P}(X)$ je σ -algebra.
- $\{A \subset X \mid A \text{ je konečná}\}$ je pro X konečnou σ -algebra, pro X nekonečnou není ani algebra (nepatří tam X).
(Jak to bude se systémem $\{A \subset X \mid A \text{ je spočetná}\}$?)
- $\{A \subset X \mid A \text{ nebo } X \setminus A \text{ je konečná}\}$ je algebra. (Pro jaká X je to dokonce σ -algebra?)

Definice: Necht' $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. Nejmenší σ -algebru, která obsahuje všechny množiny z \mathcal{F} („obsahuje \mathcal{F} “) značíme $\sigma(\mathcal{F})$ a říkáme jí **σ -algebra generovaná \mathcal{F}** . (Podobně lze definovat algebra generovanou \mathcal{F} .)

Otázky:

1) Musí vždy existovat σ -algebra obsahující \mathcal{F} ?

ANO: $\mathcal{P}(X)$ je σ -algebra a $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$.

2) Lze mezi všemi σ -algebami obsahujícími \mathcal{F} , najít tu nejmenší?

ANO: $\sigma(\mathcal{F})$ je průnik všech σ -algeber obsahujících \mathcal{F} . (Ukažte jako cvičení, že tento průnik je skutečně σ -algebra.)

1.2 Míra a vnější míra

- Je-li $Y \neq \emptyset$ a $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(Y)$, pak zobrazení $\tau : \mathcal{G} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, kde $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, říkáme **množinová funkce**.
- Jsou-li $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathcal{P}(Y)$, $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, $\mu : \mathcal{U} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\nu : \mathcal{V} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\mu(A) = \nu(A)$ pro všechna $A \in \mathcal{U}$, pak ν je **rozšíření μ z \mathcal{U} na \mathcal{V}** a μ je **zúžení ν z \mathcal{V} na \mathcal{U}** .

Definice: Nechť (X, \mathcal{S}) je měřitelný prostor (tj. $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ je σ -algebra). Množinová funkce $\mu : \mathcal{S} \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$ se nazývá **míra**, jestliže splňuje:

$$(M1) \quad \mu(\emptyset) = 0,$$

(M2) Jsou-li $A_j \in \mathcal{S}, j = 1, 2, \dots$, po dvou disjunktní (tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$), pak

$$\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j). \quad (\sigma\text{-aditivita})$$

Trojici (X, \mathcal{S}, μ) nazýváme **prostor s mírou**.

Příklady:

- **Diracova míra:** $(\emptyset \neq) X$ – libovolná množina, $a \in X$ pevně zvolené, $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

- **Aritmetická (též (po)čítací) míra:** $(\emptyset \neq) X$ – libovolná množina, $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$

$$\alpha(A) = \begin{cases} \text{počet prvků } A & \text{pro } A \text{ konečnou} \\ \infty & \text{pro } A \text{ nekonečnou} \end{cases}$$

- **Lebesgueova míra:** zobecňuje pojmy délka intervalu, obsah obdélníka, objem kvádrů (více viz dále)

Zdisjunktnění sjednocení měřitelných množin:

Abychom mohli využít σ -aditivity míry, potřebujeme pracovat s množinami, které jsou po dvou disjunktní. Pokud toto naše množiny nesplňují, „zdisjunktníme“ je: Nechť (X, \mathcal{S}) je měřitelný prostor, $(A_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$. Položme

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_2 \setminus A_1 \\ B_3 &= A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pak platí

$$B_i \subset A_i, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{pro } i \neq j, \quad \bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{i=1}^k B_i \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

(Dokažte jako cvičení.)

Věta 1.1 (vlastnosti míry): Necht' (X, \mathcal{S}, μ) je prostor s mírou, $(A_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$. Pak

(1) Je-li $A_1 \subset A_2$, pak $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$. (monotonie míry)

$$(2) \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

(3) Je-li $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$, pak

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j).$$

(4) Je-li $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ a $\mu(A_1) < \infty$, pak

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j).$$

Důkaz: (1) Máme $A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$, kde $A_1 \cap (A_2 \setminus A_1) = \emptyset$. Tedy $\mu(A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) \geq \mu(A_1)$.

(2) Je-li B_1, B_2, \dots zdisjunktnění A_1, A_2, \dots , pak

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) \stackrel{(1)}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

(3) Je-li B_1, B_2, \dots jako v (2), pak $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, a podle předpokladu $\bigcup_{j=1}^k B_j = \bigcup_{j=1}^k A_j = A_k$ pro $k \in \mathbb{N}$. Tedy

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \mu(B_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^k B_j\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k).$$

(4) Označme $\tilde{A}_i = A_1 \setminus A_i$. Pak $A_i \cup \tilde{A}_i = A_1$, $\mu(A_i) + \mu(\tilde{A}_i) = \mu(A_1) < \infty$ (tedy $\mu(\tilde{A}_i) = \mu(A_1) - \mu(A_i)$) a $\tilde{A}_1 \subset \tilde{A}_2 \subset \tilde{A}_3 \subset \dots$. Tedy podle (3) máme $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{A}_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(\tilde{A}_j)$. Využijeme-li nyní toho, že sjednocení $A_1 = (A_1 \setminus (\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j)) \cup (\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j)$ a $A_1 = (A_1 \setminus A_j) \cup A_j$ jsou disjunktní a rozdíl $\mu(A_1) - \mu(A_j)$ je definován pro každé $j \in \mathbb{N}$ (protože $\mu(A_1) < \infty$), dostaneme

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \mu(A_1) - \mu\left(A_1 \setminus \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_j)\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{A}_j\right) = \\ &= \mu(A_1) - \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(\tilde{A}_j) = \mu(A_1) - \lim_{j \rightarrow \infty} (\mu(A_1) - \mu(A_j)) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j). \quad \square \end{aligned}$$

Příklad: Necht' μ je aritmetická míra na \mathbb{N} a $A_j = \{j, j+1, j+2, \dots\}$. Pak $A_j \searrow \emptyset$ (tj. $A_{j+1} \subset A_j$ a $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \emptyset$). Přitom máme $\mu(A_j) = \infty$ pro každé $j \in \mathbb{N}$ a $\mu(\emptyset) = 0$. Tedy neplatí $\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j)$. Toto není ve sporu s V1.1(4), protože tu není splněno $\mu(A_1) < \infty$.

Definice: Necht' (X, \mathcal{S}, μ) je prostor s mírou. Pak míru μ nazýváme

- **konečná** – je-li $\mu(X) < \infty$,
- **σ -konečná** – existují-li $X_1, X_2, \dots \subset X$ tak, že $\mu(X_j) < \infty \forall j$ a $\bigcup_{j=1}^{\infty} X_j = X$,
- **pravděpodobnostní** – je-li $\mu(X) = 1$, (X, \mathcal{S}, μ) pak nazýváme pravděpodobnostní prostor,
- **úplná** – je-li každá podmnožina množiny míry nula měřitelná (díky monotonii a nezápornosti míry má také míru nula).

Věta 1.2 (zúplnění míry): Necht' (X, \mathcal{S}, μ) je prostor s mírou. Pak existuje nejvyšší rozšíření $(\bar{\mathcal{S}}, \bar{\mu})$ míry (\mathcal{S}, μ) na úplnou míru. Míru $(\bar{\mathcal{S}}, \bar{\mu})$ nazýváme **zúplnění míry** (\mathcal{S}, μ) .

Důkaz: Položme

$$\bar{\mathcal{S}} = \{A \subset X \mid \text{existují } A', A'' \in \mathcal{S} \text{ tak, že } A' \subset A \subset A'' \text{ a } \mu(A'' \setminus A') = 0\}.$$

Při stejném významu A, A', A'' jako výše pak definujeme

$$\bar{\mu}(A) = \mu(A') (= \mu(A'')).$$

Zřejmě $\mathcal{S} \subset \bar{\mathcal{S}}$. Nyní potřebujeme ukázat, že $(\bar{\mathcal{S}}, \bar{\mu})$ má požadované vlastnosti. To uděláme v několika krocích:

1) $\bar{\mathcal{S}}$ je σ -algebra: Vlastnosti (A1) a (A2) ověřte jako cvičení. Zbývá ukázat, že systém $\bar{\mathcal{S}}$ je uzavřený na spočetná sjednocení. Nechť $A_1, A_2, \dots \in \bar{\mathcal{S}}$ a A'_i, A''_i jsou jako výše A', A'' . Pak $\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A''_i$ a

$$\mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A''_i\right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A'_j\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A''_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A'_j)\right) \stackrel{V1.1(2)}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A''_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A'_j) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A''_i \setminus A'_i) = 0,$$

protože $A''_i \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A'_j \subset (A''_i \setminus A'_i)$ a $\mu(A''_i \setminus A'_i) = 0$. Tedy $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \bar{\mathcal{S}}$.

2) Definice $\bar{\mu}(A)$ je korektní (tj. nezávisí na volbě A', A''): Nechť $A'_i \subset A \subset A''_i$, $\mu(A''_i \setminus A'_i) = 0$, $i = 1, 2$. Označme $C = A'_1 \cup A'_2$. Pak pro $i = 1, 2$ platí $A'_i \subset C \subset A \subset A''_i$, a tedy pro $i = 1, 2$ máme

$$\mu(C) = \underbrace{\mu(C \setminus A'_i)}_{\subset A''_i \setminus A'_i} + \mu(A'_i) \leq \underbrace{\mu(A''_i \setminus A'_i)}_{=0} + \mu(A'_i) = \mu(A'_i) \leq \mu(C).$$

To ale znamená, že $\mu(A'_1) = \mu(A'_2) (= \mu(A''_1) = \mu(A''_2))$. Tím jsme ukázali, že $\mu(A)$ na volbě A', A'' nezávisí.

3) $\bar{\mu}$ je míra: $\bar{\mu} \geq 0$, $\bar{\mu}(\emptyset) = 0$ zřejmě. Dále, jsou-li po dvou disjunktní množiny A_i , jsou po dvou disjunktní také množiny A'_i (množiny A''_i po dvou disjunktní ale být nemusí). Tedy podle důkazu uzavřenosti $\bar{\mathcal{S}}$ na spočetná sjednocení máme

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A'_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i).$$

4) Míra $\bar{\mu}$ je úplná: Nechť $B \subset A$, $\bar{\mu}(A) = 0$, $A' \subset A \subset A''$, $\mu(A'' \setminus A') = 0$. Pak $\mu(A'') (= \bar{\mu}(A)) = 0$, $\emptyset \subset B \subset A''$, $\mu(A'' \setminus \emptyset) = 0$, tedy $\bar{\mu}(B) = \mu(\emptyset) = 0$.

5) $(\bar{\mathcal{S}}, \bar{\mu})$ je nejuzší rozšíření: Nechť $(\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\mu})$ je úplné rozšíření (\mathcal{S}, μ) a $A \in \bar{\mathcal{S}}$, tj. existují $A', A'' \in \mathcal{S}$ tak, že $A' \subset A \subset A''$ a $\mu(A'' \setminus A') = 0$. Ukážeme, že $A \in \tilde{\mathcal{S}}$. Protože $\tilde{\mu}$ je úplná míra rozšiřující μ a $A \setminus A' \subset A'' \setminus A'$, dostáváme $A \setminus A' \in \tilde{\mathcal{S}}$, tedy $A = A' \cup (A \setminus A') \in \tilde{\mathcal{S}}$. To znamená, že $\bar{\mathcal{S}} \subset \tilde{\mathcal{S}}$, a tedy $\bar{\mathcal{S}}$ je nejmenší možná σ -algebra, na které existuje úplná míra rozšiřující μ . \square

Tvrzení 1.3: Nechť (X, \mathcal{S}, μ) je prostor s mírou, $D \in \mathcal{S}$. Pak $(D, \mathcal{S}_D, \mu_D)$, kde

$$\mathcal{S}_D = \{A \in \mathcal{S} \mid A \subset D\} (= \{B \cap D \mid B \in \mathcal{S}\}) \quad \text{a} \quad \mu_D = \mu|_{\mathcal{S}_D},$$

je prostor s mírou. Pokud je míra μ úplná, je i míra μ_D úplná.

Důkaz je zřejmý (proved'te si ho jako cvičení). \square

Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme místo $(D, \mathcal{S}_D, \mu_D)$ psát jen stručně (D, \mathcal{S}, μ) .

Konstrukce míry z množinové funkce přes vnější míru

Mějme $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ a množinovou funkci $\tau : \mathcal{G} \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$ splňující

$$\emptyset \in \mathcal{G}, \quad \tau(\emptyset) = 0.$$

Definujme množinovou funkci $\tau^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$ tak, že pro $A \subset X$ položíme

$$\tau^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \tau(B_j) \mid B_j \in \mathcal{G} \text{ pro } j \in \mathbb{N} \text{ a } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \right\}.$$

Jsou-li $B_j \in \mathcal{G}$ a $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, nazýváme $\sum_{j=1}^{\infty} \tau(B_j)$ **horní součet k** $\tau^*(A)$.

Poznámky: 1) Funkce τ^* zřejmě nemusí být rozšířením funkce τ , tj. pro nějaké $A \in \mathcal{G}$ může být $\tau^*(A) \neq \tau(A)$. Nechť např. $X = \{1, 2\}$, $\mathcal{G} = \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}\}$, $\tau(\emptyset) = 0$, $\tau(\{1\}) = \tau(\{2\}) = 2$ a $\tau(\{1, 2\}) = 1$. Protože $\{1\} \subset \{1, 2\}$, je $\tau(\{1, 2\})$ horní součet k $\tau^*(\{1\})$, a tedy $\tau^*(\{1\}) \leq \tau(\{1, 2\}) = 1 < \tau(\{1\})$.

2) Pokud pro nějakou množinu $A \subset X$ neexistují množiny $B_j \in \mathcal{G}$ tak, že $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, je $\tau^*(A) = \inf \emptyset = +\infty$.

Definice: Množinová funkce $\gamma : \mathcal{P}(X) \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$ se nazývá **vnější míra** na množině X , jestliže

$$(VM1) \quad \gamma(\emptyset) = 0$$

$$(VM2) \quad A \subset B \Rightarrow \gamma(A) \leq \gamma(B) \quad (\text{monotonie})$$

$$(VM3) \quad \gamma\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(A_j) \quad (\sigma\text{-subaditivita})$$

Věta 1.4: Množinová funkce τ^* je vnější míra (na X).

Důkaz: Splnění podmínek (VM1) a (VM2) je zřejmé. Abychom ověřili podmínku (VM3), potřebujeme ukázat, že nic většího než

$$\beta := \sum_{j=1}^{\infty} \tau^*(A_j)$$

není dolní mezí množiny M všech horních součtů k $\tau^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)$. Pak ani infimum (tedy největší dolní mez) této množiny nebude větší než β . Mějme dáno $\varepsilon > 0$. Abychom ukázali, že $\beta + \varepsilon$ není dolní mezí množiny M , potřebujeme najít horní součet k $\tau^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)$ menší než $\beta + \varepsilon$. Z definice τ^* existují pro každé $j \in \mathbb{N}$ množiny $B_{i,j} \in \mathcal{G}$ takové, že $A_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{i,j}$ a jim odpovídající horní součet splňuje

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tau(B_{i,j}) < \tau^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Protože

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{i,j=1}^{\infty} B_{i,j},$$

je $\sum_{i,j=1}^{\infty} \tau(B_{i,j})$ horní součet k $\tau^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)$. A pro tento horní součet platí

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \tau(B_{i,j}) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \tau(B_{i,j}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\tau^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \tau^*(A_j) \right) + \varepsilon = \beta + \varepsilon.$$

(V prvním kroku jsme využili toho, že řadu s nezápornými členy lze přerovnat.) Tedy každá dolní mez množiny všech horních součtů k $\tau^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)$ je rovna nejvýše $\beta = \sum_{j=1}^{\infty} \tau^*(A_j)$. \square

Definice: Nechť $\gamma : \mathcal{P}(X) \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$ je vnější míra na X . Množina $A \subset X$ se nazývá **γ -měřitelná** (podle Carathéodoryho), jestliže pro každou množinu $T \subset X$ platí

$$\gamma(T) = \gamma(T \cap A) + \gamma(T \setminus A).$$

Množinu všech γ -měřitelných množin značíme $\mathfrak{M}(\gamma)$ a pro $A \in \mathfrak{M}(\gamma)$ pokládáme $\gamma^\circ(A) = \gamma(A)$. Tedy $\gamma^\circ = \gamma|_{\mathfrak{M}(\gamma)}$ (zúžení γ na $\mathfrak{M}(\gamma)$).

Věta 1.5 (Carathéodoryova): Nechť γ je vnější míra na X . Pak systém γ -měřitelných množin $\mathfrak{M}(\gamma)$ je σ -algebra a γ° je úplná míra.

Důkaz je pracný a nebudeme ho tu uvádět. \square

1.3 Lebesgueova míra na \mathbb{R}^n

$a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $a \leq b$

$(a, b), \langle a, b \rangle, (a, b], \langle a, b \rangle$ – (jednorozměrný) interval

(a, b) – usměrněný interval (není to běžně používaný název, zjednoduší nám ale vyjadřování)

$\mathcal{I}_1 = \{I \mid I \text{ - interval, } a, b \in \mathbb{R}\}$ (systém všech omezených intervalů v \mathbb{R})

$\tilde{\mathcal{I}}_1 = \{(a, b) \mid -\infty < a \leq b < \infty\}$ (systém všech omezených usměrněných intervalů v \mathbb{R})

délka intervalu I s krajními body a, b , kde $-\infty < a \leq b < \infty$:

$$l(I) (= l_1(I)) = b - a$$

Platí: Pokud sjednocením, průnikem či rozdílem usměrněných intervalů je interval, pak je usměrněný. (Pro rozdíl otevřených nebo uzavřených intervalů toto obecně neplatí. V jakém případě by to platilo?)

n -rozměrný interval:

$I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$, kde I_i jsou jednorozměrné intervaly

$$\mathcal{I}_n = \{I \subset \mathbb{R}^n \mid I \text{ je omezený interval}\}$$

usměrněný n -rozměrný interval:

$I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$, kde I_i jsou usměrněné jednorozměrné intervaly

$$\tilde{\mathcal{I}}_n = \{I \in \mathcal{I}_n \mid I \text{ je usměrněný}\}$$

usměrněný poloprostor: množina typu

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \leq c\} \quad \text{nebo} \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > c\}, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R} \text{ a } i \in \{1, \dots, n\} \text{ je vhodná dvojice čísel}$$

elementární objem n -rozměrného intervalu $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \in \mathcal{I}_n$:

$$l_n(I) = l(I_1) \cdot l(I_2) \cdot \dots \cdot l(I_n)$$

Platí: Každý usměrněný interval v \mathbb{R}^n je průnik $2n$ usměrněných poloprostorů. (V případě neomezeného intervalu poloprostory odpovídající neomezeným souřadnicím zapíšeme do průniku dvakrát.)

Důkaz můžeme provést indukcí s využitím toho, že pro $A \subset X$, $B, B_1, B_2 \subset Y$ platí $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$ a $A \times (B_1 \cap B_2) = (A \times B_1) \cap (A \times B_2)$. Proved'te ho jako cvičení. \square

Platí: Jsou-li I usměrněný interval a H usměrněný poloprostor v \mathbb{R}^n , pak $I \cap H$ a $I \setminus H$ jsou usměrněné intervaly.

Důkaz: Průnik intervalu I s usměrněným poloprostorem omezuje pouze jednu složku bodů z intervalu I . Přitom $(a, b) \cap (-\infty, c) \in \{\emptyset, (a, c), (a, b)\}$, $(a, b) \cap (c, \infty) \in \{(a, b), (c, b), \emptyset\}$ a prázdná množina je usměrněný interval, protože $\emptyset = (a, a)$. Podobně pro $I \setminus H$. \square

Vlastnosti funkce l_n na $\tilde{\mathcal{I}}_n$:

- l_n je **aditivní** v tomto smyslu: pro každý usměrněný interval I_n a usměrněný poloprostor H platí

$$l_n(I) = l_n(I \cap H) + l_n(I \setminus H)$$

(Dokažte jako cvičení pro $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq c\}$. Ostatní případy by se dokázaly podobně.)

- l_n je **nezáporná** (zřejmé)
- l_n je **zprava spojitá** v tom smyslu, že kdykoliv $(Q_j)_{j=1}^{\infty} \subset \tilde{\mathcal{I}}_n$, $I \in \tilde{\mathcal{I}}_n$ a $Q_j \searrow I$ (tj. $Q_{j+1} \subset Q_j$, $I = \bigcap_{j=1}^{\infty} Q_j$) nebo $Q_j \nearrow I$ (tj. $Q_j \subset Q_{j+1}$, $I = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$), pak $l_n(Q_j) \rightarrow l_n(I)$ pro $j \rightarrow \infty$.
(Jde o jednoduchý důsledek definice l_n a vlastností l_1 .)

Příklady dalších aditivních nezáporných zprava spojitých funkcí intervalu:

- **Diracova funkce:** $x \in \mathbb{R}^n$ pevně zvoleno, $I \in \tilde{\mathcal{I}}_n$

$$d_x(I) = \begin{cases} 1, & x \in I \\ 0, & x \notin I \end{cases}$$

- funkce $m_n : \tilde{\mathcal{I}}_n \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná pomocí neklesající zprava spojitě funkce $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že

$$m_n(I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n) = m_1(I_1) \cdot m_1(I_2) \cdot \dots \cdot m_1(I_n),$$

kde pro $I_j = (a_j, b_j)$ je

$$m_1(I_j) = F(b_j) - F(a_j).$$

Definice: Vnější míru l_n^* na \mathbb{R}^n generovanou elementárním objemem l_n na $\tilde{\mathcal{I}}_n$, tj.

$$l_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} l_n(Q_j) \mid Q_j \in \tilde{\mathcal{I}}_n \text{ pro } j \in \mathbb{N}, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \right\},$$

nazýváme **Lebesgueova vnější míra**. Vnější míru m^* , která je daná obecnou konečnou aditivní nezápornou zprava spojitou funkcí m na $\tilde{\mathcal{I}}_n$ nazýváme **Lebesgue-Steiltjesova vnější míra generovaná m** .

Platí: Lebesgueova vnější míra je definovaná na celé $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, je monotonní a σ -subaditivní.

Věta 1.6: Pro každé $I \in \tilde{\mathcal{I}}_n$ platí $l_n^*(I) = l_n(I)$.

Důkaz: Mějme dáno $I \in \tilde{\mathcal{I}}_n$. Nerovnost $l_n^*(I) \leq l_n(I)$ je zřejmá, neboť $l_n(I)$ je horní součet k $l_n^*(I)$. Opačnou nerovnost dokážeme sporem.

Předpokládejme, že existují $Q_j \in \tilde{\mathcal{I}}_n$ takové, že $I \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ a $l_n(I) > \sum_{j=1}^{\infty} l_n(Q_j)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\bar{I} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j^{\circ}$, kde \bar{I} je uzávěr intervalu I a Q_j° je vnitřek intervalu Q_j . (Kdyby tomu tak totiž nebylo, mohli bychom každý z intervalů Q_j natáhnout v každém směru na obě strany o tak malý kousek, že pro nově získaný interval \hat{Q}_j bude platit $l_n(\hat{Q}_j) \leq l_n(Q_j) + \frac{d}{2} \frac{1}{2^j}$, kde $d = l_n(I) - \sum_{j=1}^{\infty} l_n(Q_j) > 0$. Pak bude $\sum_{j=1}^{\infty} l_n(\hat{Q}_j) < \sum_{j=1}^{\infty} l_n(Q_j) + \frac{d}{2} < l_n(I)$. Takže by stačilo místo Q_j vzít v dalších úvahách \hat{Q}_j .)

Položme nyní $I_1 = I$. Protože je l_n nezáporná a aditivní, je též monotonní, tedy $l_n(Q_j) \geq l_n(Q_j \cap I_1)$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. To ale znamená, že $l_n(I_1) > \sum_{j=1}^{\infty} l_n(Q_j \cap I_1)$. Zvolme usměrněný poloprostor H_1 tak, že platí $l_n(I_1 \cap H_1) = l_n(I_1 \setminus H_1) = \frac{1}{2} l_n(I_1)$. (Jeho hraniční nadrovina bude kolmo půlit některou z hran intervalu I_1 .) Protože průnik dvou usměrněných intervalů je usměrněný interval, dostáváme z aditivity a nezápornosti elementárního objemu l_n : $l_n(I_1) = l_n(I) > \sum_{j=1}^{\infty} l_n(Q_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} l_n(I_1 \cap Q_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (l_n((I_1 \cap Q_j) \cap H_1) + l_n((I_1 \cap Q_j) \setminus H_1)) = \sum_{j=1}^{\infty} (l_n((I_1 \cap H_1) \cap Q_j) + l_n((I_1 \setminus H_1) \cap Q_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} l_n((I_1 \cap H_1) \cap Q_j) + \sum_{j=1}^{\infty} l_n((I_1 \setminus H_1) \cap Q_j)$. Součet některé z posledních dvou řad je tedy nutně menší než $\frac{1}{2} l_n(I_1)$. Označme I_2 tu z množin $I_1 \cap H_1$, $I_1 \setminus H_1$, které odpovídá řada, která toto splňuje. Pak $l_n(I_2) = \frac{1}{2} l_n(I_1) > \sum_{j=1}^{\infty} l_n(Q_j \cap I_2)$.

Budeme-li postupovat analogicky dále, při vhodné volbě poloprostorů, kterými půlíme aktuální interval, („každý směr“ musíme při půleních použít nekonečněkrát) získáme posloupnost intervalů I_k , jejichž průměry konvergují k nule a pro které platí $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ a $l_n(I_k) > \sum_{j=1}^{\infty} l_n(Q_j \cap I_k)$ pro každé k . Z vícerozměrné analogie principu vnorených intervalů dostáváme, že existuje bod $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{I}_k$. Protože však máme $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{I}_k \subset \bar{I} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j^{\circ}$, existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že x je vnitřním bodem intervalu Q_m , tedy x má nějaké okolí U , které leží celé v Q_m . Průměry intervalů

I_k jdou přitom k nule, takže pro dostatečně velká k je $I_k \subset U \subset Q_m$. To ale znamená, že $l_n(I_k) = l_n(I_k \cap Q_m) \leq \sum_{j=1}^{\infty} l_n(I_k \cap Q_j)$. To je ovšem ve sporu s vlastnostmi intervalu I_k . Žádný horní součet k $l_n^*(I)$ tak nemůže být menší než $l_n(I)$, a tedy i infimum horních součtů k $l_n^*(I)$, což je samo $l_n^*(I)$, musí být rovno minimálně $l_n(I)$. Tím jsme dostali nerovnost $l_n^*(I) \geq l_n(I)$ a důkaz je dokončen. \square

Důsledek 1.7: Necht' $I \in \mathcal{I}_n$. Pak $l_n^*(I) = l_n(I)$.

Důkaz provedeme jen pro $n = 1$, pro $n > 1$ by se provedl podobně. Pro $-\infty < a < b < \infty$ platí:

1) $(a, b - \varepsilon) \subset (a, b) \subset (a, b)$ pro každé $0 < \varepsilon < b - a$, tedy

$$b - \varepsilon - a = l_1^*((a, b - \varepsilon)) \leq l_1^*((a, b)) \leq l_1^*((a, b)) = b - a.$$

Limitním přechodem pro $\varepsilon \rightarrow 0^+$ dostáváme

$$l_1^*((a, b)) = b - a = l_1((a, b)).$$

2) Pro intervaly $\langle a, b \rangle, \langle a, b \rangle$ použijeme analogicky vztahy $(a, b) \subset \langle a, b \rangle \subset (a - \varepsilon, b)$ pro každé $\varepsilon > 0$ a $\langle a, b - \varepsilon \rangle \subset (a, b) \subset (a - \varepsilon, b)$ pro každé $0 < \varepsilon < b - a$. \square

Tvrzení 1.8: l_n^* je translačně invariantní, tj. pro každé $A \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$ je při označení $A + x = \{a + x \mid a \in A\}$

$$l_n^*(A + x) = l_n^*(A).$$

Důkaz proved'te jako cvičení. \square

Definice: Řekněme, že $A \subset \mathbb{R}^n$ je **lebesgueovskiy měřitelná** (píšeme $A \in \mathfrak{M}_n$), jestliže pro každý usměrněný interval $Q \in \tilde{\mathcal{I}}_n$ platí

$$l_n^*(Q) = l_n^*(Q \cap A) + l_n^*(Q \setminus A).$$

Pro $A \in \mathfrak{M}_n$ položíme $\lambda_n(A) = l_n^*(A)$. λ_n nazýváme **Lebesgueova míra**.

Podobně pro m nezápornou zprava spojitou aditivní funkci na intervalu dostaneme **Lebesgue-Stieltjesovu míru generovanou m** .

Tvrzení 1.9: a) Je-li H usměrněný poloprostor v \mathbb{R}^n , pak $H \in \mathfrak{M}_n$.

b) Je-li H usměrněný poloprostor v \mathbb{R}^n a $A \in \mathfrak{M}_n$, pak $H \cap A \in \mathfrak{M}_n$.

c) Je-li I usměrněný interval v \mathbb{R}^n , pak $I \in \mathfrak{M}_n$ (tedy $\tilde{\mathcal{I}}_n \subset \mathfrak{M}_n$).

Důkaz: a) Necht' $Q \in \tilde{\mathcal{I}}_n$. Pak $Q \cap H, Q \setminus H \in \tilde{\mathcal{I}}_n$, a tedy podle Věty 1.6

$$l_n^*(Q) = l_n(Q) = l_n(Q \cap H) + l_n(Q \setminus H) = l_n^*(Q \cap H) + l_n^*(Q \setminus H).$$

b) Podle a) je H měřitelný. Necht' $Q \in \tilde{\mathcal{I}}_n$. Pak $Q \cap H \in \tilde{\mathcal{I}}_n$, a využijeme-li subaditivitu l_n^* a měřitelnost A a H , dostaneme

$$\begin{aligned} l_n^*(Q) &\leq l_n^*(Q \cap (H \cap A)) + l_n^*(Q \setminus (H \cap A)) = l_n^*((Q \cap H) \cap A) + l_n^*((Q \setminus H) \cup (Q \cap H) \setminus A) \leq \\ &\leq (l_n^*(Q \cap H) - l_n^*(Q \cap H) \setminus A) + l_n^*(Q \setminus H) + l_n^*((Q \cap H) \setminus A) = l_n^*(Q \cap H) + l_n^*(Q \setminus H) = l_n^*(Q). \end{aligned}$$

To ale znamená, že $l_n^*(Q) = l_n^*(Q \cap (H \cap A)) + l_n^*(Q \setminus (H \cap A))$, a tedy množina $H \cap A$ je měřitelná.

c) Tvrzení plyne z a), b) a toho, že n -rozměrný usměrněný interval je průnikem $2n$ usměrněných poloprostorů. \square

Věta 1.10: Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je lebesgueovskiy měřitelná právě tehdy, když je l_n^* -měřitelná podle (Carathéodoryho), tj.

$$l_n^*(T) = l_n^*(T \cap A) + l_n^*(T \setminus A) \quad \forall T \subset \mathbb{R}^n.$$

Tedy $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}_n(l_n^*)$ a $\lambda_n = (l_n^*)^\circ$. (\mathfrak{M}_n je tak σ -algebra a λ_n je úplná míra).

Důkaz: Implikace "⇐" je triviální. Dokážeme opačnou implikaci. Necht' $A \in \mathfrak{M}_n$ a $T \subset \mathbb{R}^n$. Je-li $l_n^*(T) = \infty$, pak ze subaditivity l_n^* je $\infty = l_n^*(T) \leq l_n^*(T \cap A) + l_n^*(T \setminus A) \leq \infty$, tedy platí rovnost. Předpokládejme nyní, že $l_n^*(T) < \infty$. Mějme dáno $\varepsilon > 0$. K němu z definice $l_n^*(T)$ existuje $(Q_j)_{j=1}^\infty \subset \tilde{\mathcal{I}}_n$ tak, že $T \subset \bigcup_{j=1}^\infty Q_j$ a $\sum_{j=1}^\infty l_n(Q_j) < l_n^*(T) + \varepsilon$. Zřejmě $T \cap A \subset (\bigcup_{j=1}^\infty Q_j) \cap A = \bigcup_{j=1}^\infty (Q_j \cap A)$ a $T \setminus A \subset (\bigcup_{j=1}^\infty Q_j) \setminus A = \bigcup_{j=1}^\infty (Q_j \setminus A)$. Tedy

$$l_n^*(T \cap A) + l_n^*(T \setminus A) \stackrel{(VM2)}{\leq} l_n^*\left(\bigcup_{j=1}^\infty (Q_j \cap A)\right) + l_n^*\left(\bigcup_{j=1}^\infty (Q_j \setminus A)\right) \stackrel{(VM3)}{\leq} \sum_{j=1}^\infty l_n^*(Q_j \cap A) + \sum_{j=1}^\infty l_n^*(Q_j \setminus A).$$

Protože je l_n^* nezáporná (a tedy lze řady přerovnat), $A \in \mathcal{M}_n$ a $Q_j \in \tilde{\mathcal{I}}_n$, máme díky Důsledku 1.7

$$l_n^*(T \cap A) + l_n^*(T \setminus A) \leq \sum_{j=1}^\infty (l_n^*(Q_j \cap A) + l_n^*(Q_j \setminus A)) = \sum_{j=1}^\infty l_n^*(Q_j) = \sum_{j=1}^\infty l_n(Q_j) < l_n^*(T) + \varepsilon.$$

Odtud limitním přechodem pro $\varepsilon \rightarrow 0^+$ dostáváme $l_n^*(T \cap A) + l_n^*(T \setminus A) \leq l_n^*(T)$. Opačná nerovnost plyne ze subaditivity l_n^* . Tedy $l_n^*(T \cap A) + l_n^*(T \setminus A) = l_n^*(T)$ pro každé $T \subset \mathbb{R}^n$ a A je lebesgueovsky měřitelná. \square

Důsledek 1.11: Každý interval je lebesgueovsky měřitelný.

Důkaz: Označme \mathcal{I}_n^* množinu všech n -rozměrných intervalů (omezených i neomezených). Pak $\mathcal{I}_n^* \subset \sigma(\tilde{\mathcal{I}}_n)$. Máme totiž např. (značíme $d = \frac{b_1 - a_1}{2}$)

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) \times \langle a_2, b_2 \rangle &= \left(\bigcup_{m=1}^\infty \left(a_1, b_1 - \frac{d_1}{m} \right) \right) \times \langle a_2, b_2 \rangle = \bigcup_{m=1}^\infty \left(\left(a_1, b_1 - \frac{d_1}{m} \right) \times \langle a_2, b_2 \rangle \right) = \\ &= \bigcup_{m=1}^\infty \left(\left(a_1, b_1 - \frac{d_1}{m} \right) \times \bigcap_{k=1}^\infty \left(a_2 - \frac{1}{k}, b_2 \right) \right) = \bigcup_{m=1}^\infty \left(\bigcap_{k=1}^\infty \left(\left(a_1, b_1 - \frac{d_1}{m} \right) \times \left(a_2 - \frac{1}{k}, b_2 \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Protože σ -algebra je uzavřená na spočetná sjednocení a průniky, dostáváme odtud $(a_1, b_1) \times \langle a_2, b_2 \rangle \in \sigma(\tilde{\mathcal{I}}_n)$. Pro jiné intervaly a dimenze postupujeme podobně. Použijeme při tom např. přepisy $\langle a, b \rangle = \bigcup_{m=1}^\infty \left(\bigcap_{k=1}^\infty \left(a - \frac{1}{k}, b - \frac{d}{m} \right) \right)$, kde $d = \frac{b-a}{2}$, a $\langle a, \infty \rangle = \bigcup_{m=1}^\infty \left(\bigcap_{k=1}^\infty \left(a - \frac{1}{k}, a + m \right) \right)$. Dále podle Věty 1.10 je \mathfrak{M}_n σ -algebra a podle Tvrzení 1.9 je $\tilde{\mathcal{I}}_n \subset \mathfrak{M}_n$. Tedy $\sigma(\tilde{\mathcal{I}}_n) \subset \mathfrak{M}_n$. Celkem tak dostáváme $\mathcal{I}_n^* \subset \sigma(\tilde{\mathcal{I}}_n) \subset \mathfrak{M}_n$. \square

Věta 1.12: Existuje množina $B \subset (0, 1)$ taková, že $B \notin \mathfrak{M}_1$ (tj. B je neměřitelná).

Důkaz: Položme $x \sim y$, pokud $x - y \in \mathbb{Q}$. Relace \sim je zřejmě ekvivalence na \mathbb{R} . Označme \mathcal{V} systém tříd ekvivalence \sim . Máme: $V \in \mathcal{V}$ právě tehdy, když $V = x + \mathbb{Q}$ pro nějaké $x \in \mathbb{R}$ (x není určeno jednoznačně). Zřejmě $V \cap (0, 1) \neq \emptyset$ pro každé $V \in \mathcal{V}$. Položme $\tilde{\mathcal{V}} = \{\tilde{V} = V \cap (0, 1) \mid V \in \mathcal{V}\}$. Na $\tilde{\mathcal{V}}$ použijeme tzv. axiom výběru (Axiom of Choice; AC), který říká: Pro každý neprázdný soubor neprázdných množin existuje funkce, která z každé množiny tohoto souboru vybírá právě jeden prvek. Na základě axiomu výběru existuje množina $E \subset (0, 1)$ taková, že pro každé $\tilde{V} \in \tilde{\mathcal{V}}$ je $\tilde{V} \cap E$ jednoprvková množina. Naším cílem je nyní ukázat, že $E \notin \mathfrak{M}_1$. Množina $\mathbb{Q} \cap (-1, 1)$ je spočetná, tedy existuje prostá posloupnost $(q_n)_{n=1}^\infty$ taková, že $(q_n)_{n=1}^\infty = \mathbb{Q} \cap (-1, 1)$. Označme $E_n = E + q_n$. Pak $E_n \cap E_m = \emptyset$ pro $n \neq m$, protože jinak by existovaly $x, y \in E$, $x \neq y$ (neboť $q_n \neq q_m$) tak, že $x + q_n = y + q_m$, tj. $x - y \in \mathbb{Q}$, což by vedlo ke sporu. Dále, protože $q_n \in (-1, 1)$ a $E \subset (0, 1)$, máme $\bigcup_{n=1}^\infty E_n \subset (-1, 2)$. Ukážeme ještě, že $(0, 1) \subset \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Mějme $x \in (0, 1)$, pak existuje $z \in E$ ($\subset (0, 1)$) takové, že $z \sim x$, tj. $x - z \in \mathbb{Q}$. Protože $x - z \in (-1, 1) \cap \mathbb{Q}$, máme $x - z = q_n$ pro vhodné n , což ale znamená, že $x = z + q_n \in E_n$. Tedy skutečně $(0, 1) \subset \bigcup_{n=1}^\infty E_n$.

Zbytek důkazu provedeme sporem. Předpokládejme, že množina E je měřitelná. Pak je definována její míra $\lambda_1(E)$. Protože je λ_1 translačně invariantní, jsou měřitelné i všechny množiny E_n a pro každé n platí $\lambda_1(E_n) = \lambda_1(E)$. Tedy ze σ -aditivity λ_1 máme

$$\lambda_1\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_1(E_n) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_1(E).$$

Víme přitom, že jednak $1 = \lambda_1((0, 1)) \leq \lambda_1\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_1(E)$ (neboť $(0, 1) \subset \bigcup E_n$), tedy $\lambda_1(E) \neq 0$, jednak $3 = \lambda_1((-1, 2)) \geq \lambda_1\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_1(E)$ (protože $\bigcup E_n \subset (-1, 2)$), tedy $\lambda_1(E) \not\geq 0$. Tím jsme došli ke sporu s předpokladem existence $\lambda_1(E)$. To znamená, že množina $E \subset (0, 1)$ nemůže být měřitelná. \square

Poznámka: Množina E z důkazu Věty 1.12 je neměřitelná, tedy existuje $T \subset \mathbb{R}$ tak, že $l_1^*(T) \neq l_1^*(T \cap E) + l_1^*(T \setminus E)$. Přitom $T = (T \cap E) \cup (T \setminus E)$ a $(T \cap E) \cap (T \setminus E) = \emptyset$. Tedy Lebesgueova vnější míra l_1^* není aditivní. (Místo E můžeme samozřejmě použít jakoukoliv jinou lebesgueovskou neměřitelnou množinu.)

1.4 Borelovské množiny v \mathbb{R}^n

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \dots \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \quad - \quad \text{norma } x$

$r > 0, x \in \mathbb{R}^n \quad \dots \quad B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\} \quad - \quad \text{otevřená koule se středem } x \text{ a poloměrem } r \text{ (okolí bodu } x \text{ o poloměru } r)$

$(x_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, \|x_k - x\| \rightarrow 0 \text{ pro } k \rightarrow \infty \quad \dots \quad x_k \rightarrow x \text{ pro } k \rightarrow \infty,$

Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je **otevřená**, jestliže pro každé $x \in M$ existuje $r > 0$ tak, že $B_r(x) \subset M$.

Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je **uzavřená**, jestliže je množina $\mathbb{R}^n \setminus M$ otevřená. To nastává právě tehdy, když platí

kdykoliv $(x_k)_{k=1}^\infty \subset M, x \in \mathbb{R}^n$ a $x_k \rightarrow x$, pak $x \in M$.

Platí:

- \mathbb{R}^n, \emptyset jsou otevřené množiny.
- \mathbb{R}^n, \emptyset jsou uzavřené množiny.
- Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.
- Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina.

Důkaz:

$$\mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \underbrace{F_\alpha}_{\text{uzavř.}} \right) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus F_\alpha)}_{\text{otevř.}}$$

Jiný způsob: Necht' $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha, x_n \rightarrow x$. Pak pro každé α máme $(x_n)_{n=1}^\infty \subset F_\alpha$, a tedy $x \in F_\alpha$, protože F_α je uzavřená. \square

- Průnik **konečného** počtu otevřených množin je otevřená množina:

Důkaz: Necht' $x \in \bigcap_{k=1}^K G_k$, kde G_k jsou otevřené množiny. Pak existují $r_k > 0$ ($k = 1, \dots, K$) tak, že $B_{r_k}(x) \subset G_k$. Označme $r = \min\{r_1, \dots, r_K\}$. Protože množin máme konečný počet, je $r > 0$. Přitom pro každé k je $B_r(x) \subset B_{r_k}(x) \subset G_k$. Tedy $B_r(x) \subset \bigcap_{k=1}^K G_k$. \square

- Sjednocení **konečného** počtu uzavřených množin je uzavřená množina:

Důkaz: Jde o důsledek předchozí vlastnosti a vztahu mezi uzavřenými a otevřenými množinami. \square

Tvrzení 1.13: Každá otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^n$ je sjednocením spočetně mnoha usměrněných intervalů.

Důkaz: Uvedeme pouze myšlenku důkazu. Bodů s racionálními souřadnicemi je v \mathbb{R}^n spočetně mnoho. Pro libovolné $x \in G$ existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že „krychle“ o straně $\frac{2}{2^k}$ a středu s racionálními souřadnicemi s 2^k ve jmenovateli, ve které x leží, leží celá v okolí bodu x , které je obsaženo v G . Tedy každé $x \in G$ je prvkem některé z krychlí délky strany $\frac{2}{2^k}$ (možných délek je spočetně mnoho), přičemž pro každou délku strany uvažujeme jen krychle se spočetně mnoha různými středy. \square

Definice: Označme $\mathcal{G} = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ je otevřená}\}$. Pak definujeme

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{G}),$$

tedy $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ je nejmenší σ -algebra podmnožin \mathbb{R}^n , která obsahuje všechny otevřené množiny. Množiny ze σ -algebry $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ nazýváme **borelovské**.

Platí:

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ obsahuje také všechny uzavřené množiny.
- Je-li \mathcal{A} σ -algebra obsahující všechny usměrněné intervaly v \mathbb{R}^n , pak $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{A}$.
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{M}_n$. Tedy každá borelovská množina je lebesgueovsky měřitelná.

(Ne každá lebesgueovsky měřitelná množina je borelovská – více viz Věta 1.14)

Důkaz proveďte sami jako cvičení.

Věta 1.14 (charakterizace lebesgueovsky měřitelných množin): Buď $E \subset \mathbb{R}^n$. Pak jsou ekvivalentní tvrzení

(i) $E \in \mathfrak{M}_n$

(ii) Pro každé $\varepsilon > 0$ existují otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^n$ a uzavřená množina $F \subset \mathbb{R}^n$, takové že

$$F \subset E \subset G \quad \text{a} \quad \lambda_n(G \setminus F) < \varepsilon.$$

(iii) Existují borelovské množiny $P, Q \subset \mathbb{R}^n$ (přesněji P typu F_σ – spočetné sjednocení uzavřených množin, Q typu G_δ – spočetný průnik otevřených množin) takové, že

$$P \subset E \subset Q \quad \text{a} \quad \lambda_n(Q \setminus P) = 0.$$

(iv) Existují borelovské množiny M, N takové, že

$$\lambda_n(N) = 0 \quad \text{a} \quad (E \setminus M) \cup (M \setminus E) \subset N.$$

V důkazu věty použijeme následující lemma, které uvádíme bez důkazu. Vyskytuje se v něm pojem kompaktní množina. Říkáme, že množina K je **kompaktní**, jestliže z každého jejího otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí. Tj. pokud pro otevřené množiny G_α , $\alpha \in \Lambda$, platí $K \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$, pak existují $m \in \mathbb{N}$ a indexy $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tak, že $K \subset \bigcup_{i=1}^m G_{\alpha_i}$. V \mathbb{R}^n jsou kompaktní právě všechny omezené uzavřené množiny.

Lemma: Nechť $E \subset \mathbb{R}^n$, $E \in \mathfrak{M}_n$. Potom

- ke každému $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^n$ tak, že $E \subset G$ a $\lambda_n(G \setminus E) < \varepsilon$,
- $\lambda_n(E) = \sup\{\lambda_n(K) \mid K \text{ kompaktní}, K \subset E\}$.

Důkaz Věty 1.14: (i) \Rightarrow (ii) Podle lemmatu existují otevřená množina G a uzavřená množina F takové, že $F \subset E \subset G$ a $\lambda_n(G \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\lambda_n(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Díky tomu, že množiny $G \setminus E$ a $E \setminus F$ jsou disjunktní, máme

$$\lambda_n(G \setminus F) = \lambda_n((G \setminus E) \cup (E \setminus F)) = \lambda_n(G \setminus E) + \lambda_n(E \setminus F) < \varepsilon.$$

(ii) \Rightarrow (iii) Zvolme otevřené množiny $G_k \subset \mathbb{R}^n$ a uzavřené množiny $F_k \subset \mathbb{R}^n$ tak, že $F_k \subset E \subset G_k$, $\lambda_n(G_k \setminus F_k) < \frac{1}{k}$. Množiny G_k , F_k lze přitom zřejmě volit tak, že $G_{k+1} \subset G_k$, $F_k \subset F_{k+1}$. Pak $(G_{k+1} \setminus F_{k+1}) \subset (G_k \setminus F_k)$ a pro $Q = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, $P = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ máme podle Věty 1.1(4) $P \subset E \subset Q$ a pro každé $m \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \lambda_n(Q \setminus P) = \lambda_n\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus F_k)\right) \leq \lambda_n(G_m \setminus F_m) < \frac{1}{m}.$$

Rovnost $\lambda_n(Q \setminus P) = 0$ odtud dostaneme limitním přechodem pro $m \rightarrow \infty$.

(iii) \Rightarrow (iv) Položme $M = Q$, $N = Q \setminus P$, kde Q, P jsou borelovské množiny z (iii). Pak $\lambda_n(N) = 0$ a $M \setminus E = Q \setminus E$, $E \setminus M = \emptyset$, tedy $(M \setminus E) \cup (E \setminus M) = Q \setminus E \subset Q \setminus P = N$.

(iv) \Rightarrow (i) Nechť M, N jsou jako v (iv). Pak $M, N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathfrak{M}_n$ a $E \setminus M \subset N$, $M \setminus E \subset N$. Protože je Lebesgueova míra λ_n úplná, máme $E \setminus M, M \setminus E \in \mathfrak{M}_n$. Z toho dostáváme

$$E = (E \setminus M) \cup (M \cap E) = \underbrace{(E \setminus M)}_{\in \mathfrak{M}_n} \cup \underbrace{(M \setminus (M \setminus E))}_{\in \mathfrak{M}_n} \in \mathfrak{M}_n.$$

□

1.5 Měřitelné funkce

Definice: Necht' (X, \mathcal{S}) je měřitelný prostor, $D \in \mathcal{S}$. Pak $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ nazýváme **\mathcal{S} -měřitelná funkce na D** , jestliže pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\{x \in D \mid f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty)) \in \mathcal{S}.$$

Komplexní funkce na D je \mathcal{S} -měřitelná, jestliže jsou \mathcal{S} -měřitelné její reálná i imaginární část.

Poznámka: Uvažujme funkci $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ a množiny $A, A_1, A_2, \dots \subset \overline{\mathbb{R}}$. Pro vzory množin $\overline{\mathbb{R}} \setminus A$ a $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ zřejmě platí $f^{-1}(\overline{\mathbb{R}} \setminus A) = D \setminus f^{-1}(A)$ a $f^{-1}(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(A_j)$. Vezmeme-li tedy v úvahu, že σ -algebra \mathcal{S} je uzavřená na rozdíl a spočetná sjednocení a že

$$\begin{aligned} \langle -\infty, a \rangle &= \overline{\mathbb{R}} \setminus (a, \infty), & \langle a, \infty \rangle &= \overline{\mathbb{R}} \setminus \langle -\infty, a \rangle, \\ \langle -\infty, a \rangle &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \langle -\infty, a - \frac{1}{n} \rangle, & \langle a, \infty \rangle &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \langle a + \frac{1}{n}, \infty \rangle, \end{aligned}$$

vidíme, že v případě $D \in \mathcal{S}$ jsou ekvivalentní tvrzení

- f je \mathcal{S} -měřitelná na D , tj. pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\{x \in D \mid f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty)) \in \mathcal{S}$.
- Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\{x \in D \mid f(x) \leq \alpha\} = f^{-1}((-\infty, \alpha]) \in \mathcal{S}$.
- Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\{x \in D \mid f(x) < \alpha\} = f^{-1}((-\infty, \alpha)) \in \mathcal{S}$.
- Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\{x \in D \mid f(x) \geq \alpha\} = f^{-1}([\alpha, \infty)) \in \mathcal{S}$.

Není tedy podstatné, kterou z nerovností $>$, \leq , $<$, \geq v definici \mathcal{S} -měřitelné funkce použijeme.

Zřejmé: • Je-li f \mathcal{S} -měřitelná na $D \in \mathcal{S}$, $D' \in \mathcal{S}$, $D' \subset D$, pak je f \mathcal{S} -měřitelná i na D' .

- Je-li f \mathcal{S} -měřitelná na $D_1, D_2 \in \mathcal{S}$, pak je f \mathcal{S} -měřitelná i na $D_1 \cup D_2$.

Dokažte jako cvičení.

Definice: Necht' $A \subset X$. Funkci $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ takovou, že

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

nazýváme **charakteristická funkce množiny A v X** .

Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme zúžení funkce χ_A na množinu $D \in \mathcal{S}$ (tj. charakteristickou funkci množiny $A \cap D$ v D) značit také χ_A .

Zřejmé: χ_A je měřitelná, právě když je A měřitelná

Platí: • Každá funkce je \mathcal{S} -měřitelná, právě když $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$.

- \mathcal{S} -měřitelné jsou **jen** konstantní funkce, právě když $\mathcal{S} = \{\emptyset, X\}$.

Důkaz: • Pokud $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$, pak je zřejmě \mathcal{S} -měřitelná každá funkce, protože je měřitelná každá množina. Pokud existuje $B \subset X$, $B \notin \mathcal{S}$, pak charakteristická funkce χ_B této množiny není \mathcal{S} -měřitelná.

• Pokud existuje $A \in \mathcal{S}$, $A \neq \emptyset$, $A \neq X$, pak χ_A je \mathcal{S} -měřitelná, není ale konstantní. Pokud funkce f není konstantní, existují $a, b \in X$ takové, že $f(a) < f(b)$. Množina $M = \{x \in X \mid f(x) > f(a)\}$ je neprázdná (obsahuje b), není ale rovna celému X (neobsahuje a). Pokud je funkce f \mathcal{S} -měřitelná, je $M \in \mathcal{S}$. \square

Aritmetické operace v $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$:

- **nedefinujeme:** $\infty + (-\infty), \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{a}{0}$ ($a \in \overline{\mathbb{R}}$)
- **definujeme (zde):** $0 \cdot (\pm\infty) = 0$

Tvrzení 1.15: Nechtě f, g jsou \mathcal{S} -měřitelné funkce na X , $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

- a) $\{x \in X \mid f(x) < g(x)\} \in \mathcal{S}$ (zkráceně zde $\{f < g\} \in \mathcal{S}$ a analogicky jinde)
- b) $\{x \in X \mid f(x) = +\infty\} = f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{S}$
 $\{x \in X \mid f(x) = -\infty\} = f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{S}$
- c) $\{x \in X \mid f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\}) \in \mathcal{S}$

Důkaz: a) Jestliže $f(x) < g(x)$, pak existuje $q \in \mathbb{Q} \cap (f(x), g(x))$, tedy

$$\{x \in X \mid f(x) < g(x)\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{x \in X \mid f(x) < q\} \cap \{x \in X \mid g(x) > q\}).$$

Pro důkaz b) a c) použijeme přepisy

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((n, \infty)), \quad f^{-1}(\{-\infty\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((-\infty, -n]),$$

$$f^{-1}(\{a\}) = f^{-1}((a, \infty)) \setminus f^{-1}((a, \infty)) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((a - \frac{1}{n}, \infty)) \right) \setminus f^{-1}((a, \infty)).$$

□

Značení: Pro $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ označíme

$$f^+ = \max\{f, 0\} \quad (\text{kladná část } f), \quad f^- = \max\{-f, 0\} \quad (\text{záporná část } f).$$

Pak

$$|f| = f^+ + f^-, \quad f = f^+ - f^-.$$

Tvrzení 1.16: Nechtě f je \mathcal{S} -měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$, φ spojitá funkce na otevřené nebo uzavřené množině $G \subset \overline{\mathbb{R}}$. Pak množina

$$D' = \{x \in D \mid f(x) \in G\}$$

je měřitelná a funkce $\varphi \circ f$ je \mathcal{S} -měřitelná na D' .

Důkaz: Uzavřené a otevřené množiny jsou v σ -algebře generované usměrněnými intervaly v $\overline{\mathbb{R}}$, tedy vzory takových množin v \mathcal{S} -měřitelném zobrazení jsou měřitelné (jako v poznámce za definicí měřitelné funkce). Funkce φ je spojitá, tedy vzorem otevřené množiny je otevřená množina. Speciálně, protože interval (a, ∞) je otevřený v $\overline{\mathbb{R}}$, je $\varphi^{-1}((a, \infty)) \subset G$ také otevřená množina. Množina $(\varphi \circ f)^{-1}((a, \infty)) = f^{-1}(\varphi^{-1}((a, \infty)))$ je proto měřitelná. □

Věta 1.17: Nechtě f, g, f_1, f_2, \dots jsou \mathcal{S} -měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pak

- a) funkce $\lambda f, |f|, f^+, f^-, f^2$ jsou \mathcal{S} -měřitelné na D , funkce $\frac{1}{f}$ je \mathcal{S} -měřitelná na $\{x \in D \mid f(x) \neq 0\}$,
- b) funkce $f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ jsou \mathcal{S} -měřitelné na podmnožině množiny D , na které má daná operace smysl,
- c) funkce $\max\{f_1, \dots, f_n\}, \min\{f_1, \dots, f_n\}, \sup_{j \in \mathbb{N}} \{f_j\}, \inf_{j \in \mathbb{N}} \{f_j\}, \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\sup_{i \geq j} \{f_i\} \right),$
 $\liminf_{j \rightarrow \infty} f_j \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\inf_{i \geq j} \{f_i\} \right)$ jsou \mathcal{S} -měřitelné na D ,
- d) množina D' všech $x \in D$, kde existuje $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$ je \mathcal{S} -měřitelná a funkce $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j$ je \mathcal{S} -měřitelná na D' .

Důkaz: Dokážeme jen tvrzení a) a b). Měřitelností zde budeme myslet \mathcal{S} -měřitelnost.

a) Jde o důsledek Tvrzení 1.16 a toho, že funkce $\varphi_0(y) = \lambda y$, $\varphi_1(y) = |y|$, $\varphi_2(y) = \max\{0, y\}$, $\varphi_3(y) = \max\{0, -y\}$, $\varphi_4(y) = y^2$, jsou spojitě na \mathbb{R} a funkce $\varphi_5(y) = \frac{1}{y}$ je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Měřitelnost aritmetických operací ukážeme za předpokladu, že funkce f a g nabývají na D jen konečných hodnot. V obecném případě bychom pomocí Tvrzení 1.15,b+c) a poznámky za definicí měřitelné funkce nejdřív ukázali měřitelnost množin, na kterých jsou jednotlivé operace definované, a potom měřitelnost množin, na kterých výsledná funkce nabývá hodnoty větší než α , a přitom v každém jejich bodě alespoň jedna z funkcí f a g není konečná. Zkuste si to rozmyslet pro součet nebo součin jako cvičení. (Protože máme definováno $0 \cdot (\pm\infty) = 0$, je potřeba v případě součinu rozlišit případy $\alpha < 0$ a $\alpha \geq 0$).

Předpokládejme tedy, že pro každé $x \in D$ je $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$. Podíváme se nejdřív na měřitelnost součtu. Zřejmě $f(x) + g(x) > \alpha$, právě když $f(x) > \alpha - g(x)$, a to nastává právě tehdy, když existuje $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $f(x) > q > \alpha - g(x)$. Máme tak $\{x \mid f(x) + g(x) > \alpha\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{x \mid f(x) > q\} \cap \{x \mid g(x) > \alpha - q\})$. A to je měřitelná množina, protože funkce f a g jsou měřitelné a \mathcal{S} je σ -algebra. Podobně postupujeme v případě rozdílu. Měřitelnost součinu a podílu jsou důsledkem měřitelnosti součtu a rozdílu, druhé mocniny a násobku a rovností $f \cdot g = ((f + g)^2 - f^2 - g^2) \cdot \frac{1}{2}$ (příp. $f \cdot g = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2)$) a $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$. \square

Důsledek 1.18: Necht' f, g jsou \mathcal{S} -měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$. Pak $\{x \in D \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{S}$.

Důkaz proveďte jako cvičení. (Návod: Využijte Tvzení 1.15,c) nebo 1.15,a). \square

Definice: Systém $\{A_1, \dots, A_n\}$ podmnožin množiny D se nazývá **rozkladem** množiny D , jestliže $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$ a $\bigcup_{i=1}^n A_i = D$.

Definice: Funkce f se nazývá **jednoduchá**, pokud je lineární kombinací charakteristických funkcí měřitelných množin, tj. existují množiny $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S}$ a čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ taková, že

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}.$$

Poznámky: 1) Jednoduchá funkce nabývá konečně mnoha hodnot a je měřitelná (a každá měřitelná funkce nabývající konečně mnoha hodnot je jednoduchá).

2) Vyjádření jednoduché funkce ve tvaru $\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ není určeno jednoznačně, vždy ale existuje právě jedno vyjádření takové, že množiny A_1, \dots, A_n tvoří rozklad množiny X a $\alpha_i \neq \alpha_j$ pro $i \neq j$.

Věta 1.19: Necht' (X, \mathcal{S}) je měřitelný prostor a f je nezáporná měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$. Pak existují jednoduché nezáporné funkce $f_k \nearrow f$ (tj. $f_{k+1} \geq f_k$ pro každé k a $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ pro každé x). Navíc f lze vyjádřit ve tvaru

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^j \chi_{E_j} \quad \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n 2^j \chi_{E_j} \right),$$

kde $E_j \in \mathcal{S}$.

Důkaz: Označme $P_j = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} ((2k+1)2^j, (2k+2)2^j)$ (tedy P_j obsahuje čísla, která mají na j -tém místě dvojkového zápisu jedničku) a $E_j = f^{-1}(P_j)$. Pak $f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^j \chi_{E_j}$, $f_n = \sum_{j=-n}^n 2^j \chi_{E_j} \nearrow f$. \square

Důsledek 1.20: Necht' f je \mathcal{S} -měřitelná na $D \in \mathcal{S}$. Pak existuje posloupnost jednoduchých funkcí $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ taková, že $|f_n| \leq |f|$ a $f_n \rightarrow f$ na D .

Důkaz: Funkce f^+, f^- jsou nezáporné měřitelné, tedy podle Věty 1.18 existují nezáporné jednoduché funkce $g_n, h_n, n \in \mathbb{N}$, takové, že $g_n \nearrow f^+, h_n \nearrow f^-$. Je-li $f(x) \leq 0$, pak $f^+(x) = 0$, a tedy $g_n(x) = 0$ pro každé n . Analogicky, je-li $f(x) \geq 0$, pak $f^-(x) = 0$ a $h_n(x) = 0$ pro každé n . To znamená, že když položíme $f_n = g_n - h_n$, budeme mít $g_n = f_n^+$ a $h_n = f_n^-$. Tedy $|f_n| = f_n^+ + f_n^- = g_n + h_n \leq f^+ + f^- = |f|$. Protože $g_n \rightarrow f^+, h_n \rightarrow f^-$ máme také $f_n = g_n - h_n \rightarrow f^+ - f^- = f$. \square

Funkce \mathcal{S} -měřitelná na $D \in \mathcal{S}$ musí být definovaná na celé množině D . To může být omezující. Proto pokud je na našem prostoru definovaná míra, hodilo by se upravit definici funkce měřitelné na D tak, aby na nějaké podmnožině míry nula funkce nemusela být definovaná. To nás vede k definici μ -měřitelné funkce:

Definice: Necht' (X, \mathcal{S}, μ) je prostor s mírou. Dále necht' $f : D' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ je \mathcal{S} -měřitelná funkce na $D' \in \mathcal{S}$, $D' \subset D$, $\mu(D \setminus D') = 0$. Pak funkci f nazveme **μ -měřitelnou na D** .

Poznámka: Samozřejmě každá funkce \mathcal{S} -měřitelná na D je i μ -měřitelná na D . Pokud v budoucnu použijeme bez dalšího upřesnění jen stručné označení "funkce měřitelná na D ", budeme mít na mysli funkci μ -měřitelnou na D .