

KAPITOLA 5: Operátory

Definice: Lineární zobrazení $T : X \rightarrow Y$ mezi normovanými prostory (nad stejným tělesem) se nazývá **operátor**.

$T(x)$, Tx – hodnota operátoru T v x

$D(T)$ – definiční obor operátoru T (podprostor prostoru X ; neřekneme-li jinak, předpokládáme $D(T) = X$)

Definice: Operátor $T : X \rightarrow Y$ je **omezený**, jestliže existuje $K \geq 0$ tak, že

$$\|Tx\| \leq K \quad \forall x \in B_X$$

(neboli $T(B_X) \subset K \cdot B_Y$). Prostor všech omezených operátorů z prostoru X do prostoru Y značíme $B(X, Y)$. Je-li $X = Y$, používáme zkrácené označení $B(X) := B(X, X)$. Pro $T \in B(X, Y)$ pokládáme

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\|.$$

Platí: 1) Pro omezený operátor $T : X \rightarrow Y$ je

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

2) Je-li $T : X \rightarrow Y$ omezený operátor, pak

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\| \quad \forall x \in X.$$

3) Nechť $T : X \rightarrow Y$ je omezený operátor, pak $\|T\|$ je nejmenší konstanta $c \geq 0$ taková, že

$$\|Tx\| \leq c \|x\| \quad \forall x \in X.$$

4) $(B(X, Y), \|\cdot\|)$ je normovaný prostor (tj. $\|\cdot\|$ je norma na $B(X, Y)$).

5) Nechť $T \in B(X, Y)$, $U \in B(Y, Z)$. Pak složené zobrazení $UT : X \rightarrow Z$ je omezené a platí

$$\|UT\| \leq \|U\| \|T\|.$$

Důkaz: 1) Nechť $x \in X$, $x \neq 0$. Pak $\|\frac{x}{\|x\|}\| = 1$, a tím $\frac{x}{\|x\|} \in B_X$. Tedy

$$\|T\| = \sup_{y \in B_X} \|Ty\| \geq \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} T(x) \right\| = \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Máme tak $\|T\| \geq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$. Pro opačnou nerovnost si uvědomíme, že pro $x \in B_X$, $x \neq 0$ platí

$$\|Tx\| = \|x\| \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ty\|}{\|y\|}.$$

Pro $x = 0$ je $\|Tx\| = \|0\| = 0$, tedy $\|Tx\|$ můžeme odhadnout shora jakýmkoli nezáporným číslem. Druhou rovnost dostáváme z přepisu $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|$, kde $\|\frac{x}{\|x\|}\| = 1$.

2) Pro $x = 0$ nerovnost platí zřejmě. Je-li $x \neq 0$, pak z předchozího

$$\|Tx\| = \|x\| \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|x\| \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ty\|}{\|y\|} = \|x\| \|T\|.$$

3) Dokažte jako cvičení.

4) Ověříme jen, že pro $\|T\|$ platí trojúhelníková nerovnost. Splnění ostatních vlastností normy je zřejmé. Mějme tedy dva operátory $T_1, T_2 \in B(X, Y)$. Protože supremum součtu je menší nebo rovno součtu suprem, máme

$$\|T_1 + T_2\| = \sup_{x \in B_X} \|T_1x + T_2x\| \leq \sup_{B_X} \|T_1x\| + \sup_{B_X} \|T_2x\| = \|T_1\| + \|T_2\|.$$

5) Dokažte jako cvičení. \square

Věta: Pro operátor $T : X \rightarrow Y$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (i) $T \in B(X, Y)$.
- (ii) T je spojité zobrazení z X do Y .
- (iii) T je spojité v nějakém bodě $x_0 \in X$.

Důkaz: (i) \Rightarrow (ii) Necht' $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Pak

$$0 \leq \|Tx_n - Tx\| \leq \|T\| \underbrace{\|x_n - x\|}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

tedy $Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Tx$.

(ii) \Rightarrow (iii) platí zřejmě.

(iii) \Rightarrow (i) Ať T je spojité v $x_0 \in X$. Pro $\varepsilon = 1$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $r \in X$, $\|r\| \leq \delta$, platí

$$\|T(x_0 + r) - Tx_0\| \leq 1.$$

To ale znamená, že

$$\|Tr\| = \|Tx_0 + Tr - Tx_0\| = \|T(x_0 + r) - Tx_0\| \leq 1,$$

kdykoliv $\|r\| \leq \delta$. Jak tedy vypadá $\|Tx\|$ na B_X ? Protože pro $x \in B_X$ je $\|\delta x\| = \delta\|x\| \leq \delta$, dostáváme z předchozího, že na B_X platí $1 \geq \|T(\delta x)\| = \delta\|Tx\|$, neboli $\frac{1}{\delta} \geq \|Tx\|$. Při označení $K = \frac{1}{\delta}$ tak máme $\|Tx\| \leq K$ pro každé $x \in B_X$, což znamená, že $T \in B(X, Y)$.

Poznámka: Potřebujeme-li tedy ukázat, že operátor T je omezený (nebo spojité), stačí ověřit jeho spojitost v nule, tj. že platí implikace

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \Rightarrow \quad Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Příklad: Necht' X, Y jsou normované prostory konečné dimenze, $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ je báze prostoru X a $\mathcal{U} = \{y_1, \dots, y_m\}$ je báze prostoru Y . Mějme lineární zobrazení $T : X \rightarrow Y$ takové, že

$$T(x_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \quad \text{pro } j = 1, \dots, n.$$

Necht' bod $x \in X$ má vzhledem k bázi \mathcal{B} souřadnice $\langle x \rangle_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^\top$ (tj. $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$). Pak

$$Tx = \alpha_1 Tx_1 + \dots + \alpha_n Tx_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j \right) y_i = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} \alpha_j \right) y_1 + \dots + \left(\sum_{j=1}^n a_{mj} \alpha_j \right) y_m$$

a Tx má vzhledem k bázi \mathcal{U} souřadnice

$$\langle Tx \rangle_{\mathcal{U}} = \mathbf{A} \cdot \langle x \rangle_{\mathcal{B}},$$

kde \mathbf{A} je matice typu $m \times n$ s prvky a_{ij} (tj. $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$). Rozepsáno po složkách pro $\langle Tx \rangle_{\mathcal{U}} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)^\top$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Poznámka: Všechny operátory mezi prostory konečné dimenze jsou tedy reprezenovány maticemi. Skládání operátorů přitom odpovídá násobení matic.

Tvrzení: Každý lineární operátor definovaný na prostoru konečné dimenze je omezený (a tedy i spojité).

Důkaz: Nechť $T : X \rightarrow Y$, kde $\dim X < \infty$, je lineární operátor a $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ je báze prostoru X . Mějme obecné $x \in X$, $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$. Pak

$$\|Tx\| = \|\alpha_1 Tx_1 + \dots + \alpha_n Tx_n\| \leq |\alpha_1| \|Tx_1\| + \dots + |\alpha_n| \|Tx_n\| \leq \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|\right) \underbrace{\max_{i=1, \dots, n} \|Tx_i\|}_{\stackrel{\text{ozn.}}{=} K}.$$

Podle důkazu ekvivalence norem na prostorech konečné dimenze existuje $C > 0$ nezávislé na x takové, že

$$\|x\| \geq C \sum_{i=1}^n |\alpha_i|.$$

Pak ale $\|Tx\| \leq \frac{K}{C} \|x\|$ pro každé $x \in X$ a speciálně

$$\|Tx\| \leq \frac{K}{C} \quad \forall x \in B_X.$$

Operátor T je tedy omezený. \square

Poznámka: Nechť $T : X \rightarrow Y$ je lineární operátor. Potom $T(X)$ je podprostor prostoru Y . Je-li $\dim X < \infty$, pak také $\dim T(X) < \infty$. Na operátor T se tedy v tomto případě můžeme dívat jako na operátor mezi prostory konečné dimenze X a $T(X)$.

Příklad: Už víme, že při pevně zvolené bázi v \mathbb{C}^n operátory z $B(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ vzájemně jednoznačně korespondují s maticemi z $M_n(\mathbb{C})$ (tj. $B(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n) \cong M_n(\mathbb{C})$). Uvažujme v \mathbb{C}^n standardní bázi $\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$.

1) Nechť operátor $A : (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$ je reprezentován maticí $A = (a_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$. (Protože operátor a matici můžeme ztotožnit, používáme pro ně stejné označení.) Ukážeme, že $\|A\|$ je maximální řádkový součet matice A , který jsme už dříve označili $\|A\|_r$. Máme

$$Ax = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ } i\text{-tý řádek ,}$$

tedy

$$\|Ax\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \left(\max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot \max_{j=1, \dots, n} \|x_j\| = \|A\|_r \|x\|_\infty.$$

Dostali jsme tak odhad

$$\|A\| \leq \|A\|_r.$$

Abychom dokázali opačnou nerovnost, zkusíme najít $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B_{\mathbb{C}^n}$, pro které platí $\|A\alpha\|_\infty \geq \|A\|_r$. Nechť největší řádkový součet matice A odpovídá řádku i_0 . Pro $j = 1, \dots, n$ položme

$$\alpha_j = \frac{|a_{i_0 j}|}{a_{i_0 j}},$$

je-li $a_{i_0 j} \neq 0$, jinak $\alpha_j = 1$. Pak $\alpha \in B_{\mathbb{C}^n}$ a na pozici i_0 v $A\alpha$ máme

$$\sum_{j=1}^n a_{i_0 j} \frac{|a_{i_0 j}|}{a_{i_0 j}} = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| = \|A\|_r.$$

Tedy

$$\|A\alpha\|_\infty \geq \|A\|_r$$

a $\|A\| \geq \|A\|_r$. Tím jsme dokázali, že $\|A\|$ je maximální řádkový součet matice A .

2) Pro operátor $A : (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ se dá ukázat (bude později), že $\|A\|$ je tzv. *spektrální norma* jemu odpovídající matice A . Např. pro hermitovské matice, tj. matice, pro které platí $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, je

$$\|A\| = \max\{|\lambda_i| \mid \lambda_i \text{ je vlastní číslo matice } A\}.$$

Příklad (důležité nespojitě lineární zobrazení): Uvažujme lineární prostor $X = C^1\langle 0, 1 \rangle$ všech funkcí spojitě diferencovatelných na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a na něm maximovou normu

$$\|f\| = \max_{t \in \langle 0, 1 \rangle} |f(t)|.$$

Nechť operátor $T : C^1\langle 0, 1 \rangle \rightarrow C\langle 0, 1 \rangle$ je definován předpisem $Tf = f'$. Pro funkce $x_n(t) = t^n$, $n = 1, 2, \dots$, platí $\|x_n\| = 1$ (tedy $x_n \in B_X$ pro každé n). Přitom $(Tx_n)(t) = nt^{n-1}$, tudíž $\|Tx_n\| = n$. To ale znamená, že

$$\sup_{x \in B_X} \|Tx\| = \infty.$$

Operátor T tak není omezený, a tím ani spojitý.

Příklad: Nechť $X = C\langle 0, 1 \rangle$ s maximovou normou a I je operátor definovaný předpisem

$$I(f) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Pak

$$\|I(f)\| = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)| dt \leq \|f\|.$$

Tedy $\|I\| \leq 1$. Protože pro funkci $\mathbf{1}$ identicky rovnou 1 na $\langle 0, 1 \rangle$ máme $I(\mathbf{1}) = 1$, platí $\|I\| = 1$.

Definice: Funkcionál na normovaném prostoru X je lineární zobrazení $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ (\mathbb{R}). (\mathbb{C} resp. \mathbb{R} je tu těleso skalárů prostoru X .)