Lineární algebra

Polynomy

1. Pomocí Hornerova schematu najděte všechny kořeny (včetně násobností) polynomu

$$P(x) = x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2.$$

Výsledek: $1, 2$ jednoduché kořeny, -1 trojnásobný kořen.

2. Rozložte polynom $Q(x)$ na součin ireducibilních (dále nerozložitelných) reálných polynomů.

$$Q(x) = x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 4x + 8$$

Výsledek: $Q(x) = (x+2)^3(x^2 - x + 1)$

3. Najděte všechny kořeny polynomu $R(x)$, víte-li, že jeho kořenem je komplexní číslo $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j)$.

$$R(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$

Výsledek: kořeny $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j)$, $(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j)$, 1, j a $-j$.

Matice

1. Vypočtěte všechny matice $\mathbb{X}$, pro které $\mathbb{A}\mathbb{X} + \mathbb{X} + \mathbb{A} = \mathbb{O}$.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledek:

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Spočtěte A^{-1} a pomocí ní řešte maticovou rovnici $\mathbb{X}\mathbb{A} = 3\mathbb{B}$.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Výsledek:

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 9 \\ -3 & 3 & 0 \\ 18 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Vypočtěte $\det \mathbb{A}$ a $\det \mathbb{B}$, kde $\mathbb{B} = (\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}^{-1})$.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

Výsledek: $\det \mathbb{A} = 2$, $\det \mathbb{B} = 1/4$.

4. Zjistěte, pro která $p \in \mathbb{R}$ je matice $\mathbb{A}$ singulární. Určete hodnost matice $\mathbb{A}$ v závislosti na parametru p.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & p & 0 & 1 \\ 2 & 1 & p & 0 \\ p & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledek: $\mathbb{A}$ je singulární pro $p = -1$ a $p = 2$, tehdy je $h(\mathbb{A}) = 3$. Jinak je $h(\mathbb{A}) = 4$.

Soustavy lineárních rovnic

1. Najděte bázi prostoru všech řešení homogenní soustavy

$$x + 2y + z - 3w = 0 \, .$$

   Výsledek: Báze je $\{(-2,1,0,0),(-1,0,1,0),(3,0,0,1)\}$.

2. Řešte soustavu lineárních rovnic a napište řešení ve tvaru součtu partikulárního řešení a prostoru všech řešení přidružené homogenní rovnice.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 33 \\ 5x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 18 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & + & 3x_4 & = & 16 \end{array}$$

   Výsledek: $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (16-2t-3r, t, -31+7t+8r, r)$, $t, r \in \mathbb{R}$. Báze $B = \{(-2,1,7,0),(-3,0,8,1)\}$.

3. Pro všechna $p \in R$ řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & pz & = & 1 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & py & - & z & = & 1 \end{array}$$

   Výsledek: Nemá řešení pro $p = -6$, má nekonečně řešení ve tvaru $(x,y,z) = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0) + t(-1,4,3)$ $(t \in \mathbb{R})$ pro $p = 1$, jediné řešení $(x,y,z) = (\frac{2p+7}{p+6}, \frac{-1}{p+6}, \frac{1}{p+6})$ jinak.

4. Určete $p \in R$ tak, aby měla soustava nekonečně mnoho řešení a řešení pak vypočtěte. Rozšířená matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & p & -3 & 5 \\ p & -3 & 1 & 10 \\ 1 & 9 & -10 & p+3 \end{array}\right).$$

   Výsledek: $p = 2$, $(x,y,z) = (5,0,0) + t(1,1,1)$, $t \in \mathbb{R}$.

5. Pro všechna $a \in R$ řešte soustavu lineárních rovnic s rozšířenou maticí soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & 0 \end{array}\right).$$

   Výsledek: $\det \mathbb{A} = a(a+1)$, pro $a \neq 0$, $a \neq -1$ je jediné řešení $(x,y,z,w) = (\frac{1}{a}, 0, 0, 0)$. Pro $a = 0$ soustava nemá řešení, pro $a = -1$ je nekonečně řešení $(x,y,z,w) = (-1-t, -2t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Lineární prostory

1. Jsou vektory $\vec{u} = (1,2,3,0), \vec{v} = (2,0,1,1), \vec{w} = (1,1,1,1)$ lineárně závislé či nezávislé? Zdůvodněte.

   Výsledek: lineárně nezávislé

2. Pro která $p \in \mathbb{R}$ je vektor $\vec{u} = (7,-2,p)$ prvkem lineárního obalu $M = \langle (2,3,5),(3,7,8),(1,-6,1) \rangle$? Nalezněte nějakou bázi prostoru M a určete jeho dimenzi.

   Výsledek: $p = 15$, $B = \{(2,3,5),(3,7,8)\}$, $\dim M = 2$.

3. Nalezněte bázi a určete dimenzi podprostorů $M \cap N$ a $M \vee N$, kde $M = \langle (1,2,1,0),(-1,1,1,1) \rangle$, $N = \langle (1,2,1,-2),(2,1,0,1) \rangle$.

   Výsledek: $\dim M \cap N = 1$, báze $B = \{(3,3,1,-1)\}$. $\dim M \vee N = 3$,
   báze např. $C = \{(1,2,1,0),(0,3,2,1),(0,0,0,2)\}$.

4. Ověřte, že množina
$$P = \{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \\ 0 & 0 & 3a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\}$$
tvoří podprostor v prostoru $Mat_{3\times 3}$ všech matic typu 3×3. Nalezněte bázi a určete dimenzi.

   Výsledek: P je neprázdná podmnožina uzavřená na sčítání a číselné násobení.
   $\dim P = 2$, báze $B = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \}$.

5. Ověřte, že
$$Q = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbb{A}\vec{x}^T = \vec{x}^T \quad pro \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \}$$
je podprostor v $\mathbb{R}^3$. Nalezněte bázi a určete dimenzi. Pozn: $\vec{x}^T$ je sloupcový vektor.

   Výsledek: Q je neprázdná podmnožina uzavřená na sčítání a číselné násobení.
   $\dim Q = 1$, báze $B = \{(1, -2, 1)\}$.

6. Ověřte, že polynomy
$$P_1 = (x-1)^4, \quad P_2 = (x-1)^3, \quad P_3 = (x-1)^2, \quad P_4 = x - 1, \quad P_5 = 1$$
tvoří bázi v prostou Pol_4 všech polynomů stupně nejvýše 4.
   Najděte souřadnice polynomu $Q = 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x + 1$ vůči uspořádané bázi $B = (P_1, P_2, P_3, P_4)$.

   Výsledek: Polynomy jsou lineárně nezávislé a je jich $5 = \dim Pol_4$, tedy tvoří bázi.
   $sou_B Q = (3, 11, 17, 8, 0)$.

7. Ověřte, že matice
$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
tvoří bázi v prostoru $Mat_{2\times 2}$ všech matic typu 2×2.
   Najděte souřadnice matice $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ vůči této uspořádané bázi $B = (\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_4)$. Nalezněte matici $\mathbb{D}$, která má vůči této bázi B souřadnice $(2, 1, 0, 1)$.

   Výsledek: Matice jsou lineárně nezávislé a jsou $4 = \dim Mat_{2\times 2}$, tedy tvoří bázi.
   $sou_B \mathbb{C} = (1, -1, 2, 0)$, $\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Vektor $\vec{v}$ má souřadnice $(2, 1)$ vůči bázi $B = ((1, 3), (2, 2))$. Jaké jsou jeho souřadnice vůči bázi $C = ((1, -1), (0, 4))$?
   Výsledek: $sou_C \vec{v} = (4, 3)$.

Skalární součin

1. Rozhodněte, zda zobrazení $s\colon R^2 \to \mathbb{R}^2$ s předpisem
$$s(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + 2x_2 y_1 + 2x_1 y_2 + 5x_2 y_2$$
tvoří skalární součin v prostoru $\mathbb{R}^2$. Pozn: $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$.

   Výsledek: Ano, zobrazení splňuje všechny čtyři podmínky z definice skalárního součinu.

2. V prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem jsou dány vektory $\vec{u} = (2, -1, -2)$ a $\vec{v} = (1, 1, -4)$. Určete velikosti vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$, úhel ϕ mezi vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ a ortogonální doplněk k podprostoru $P = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.
   Výsledek: $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 3\sqrt{2}$, $\phi = 45^\circ$, $P^\perp = \langle (2, 2, 1) \rangle$.

Lineární zobrazení

1. Ověřte, že zobrazení $f\colon Mat_{2\times 2} \to R^2$ dané předpisem $f(\mathbb{A}) = (a+b, c+d)$ pro $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je lineární. Najděte jádro daného zobrazení, bázi jádra a dimenzi jádra (tj. defekt zobrazení f).

   Výsledek: Je třeba ověřit, že $f(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = f(\mathbb{A}) + f(\mathbb{B})$ a $f(r\mathbb{A}) = rf(\mathbb{A})$.
   $\operatorname{Ker} f =< \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} >$, $def(f) = 2$.

2. Zobrazení $f\colon R^2 \to R^3$ je lineární a známe obrazy $f(2,1) = (2,2,0)$, $f(0,2) = (4,0,4)$. Najděte obecný předpis $f(x,y)$ pro dané zobrazení. Napište matici zobrazení f vzhledem ke standardním bázím.

   Výsledek: Je třeba najít $f(1,0)$ a $f(0,1)$. Předpis $f(x,y) = (2y, x, 2y - x)$, matice $\mathbb{A}_f = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Lineární zobrazení $f\colon R^3 \to R^3$ má $f(1,1,1) = (2,1,-3)$ a jádro $\operatorname{Ker} f =< (0,1,2), (0,2,-1) >$. Určete $f(3,2,4)$. Nalezněte všechny vektory $\vec{v}$, pro něž je $f(\vec{v}) = (4,2,-6)$.

   Výsledek: $f(3,2,4) = (6,3,-9)$, $\vec{v} = (2, 2+t+2r, 2+2t-r)$, $t, r \in R$.

4. Lineární zobrazení $f\colon Pol_2 \to Pol_2$ je dáno obrazy báze

   $$f(x^2) = -x^2 + 2x + 1,\ f(x) = x^2 - 4x - 1,\ f(1) = x^2 + x + 1.$$

   Ověřte, že f je prosté. Nalezněte matici inverzního zobrazení f^{-1} vzhledem ke standardním bázím a předpis pro f^{-1}. (Pozn. Pol_2 je lineární prostor všech polynomů stupně nejvýše 2 a má standardní bázi $S = (x^2, x, 1)$).

   Výsledek: Matice zobrazení f je regulární, tedy f je prosté, dokonce izomorfismus.
   Inverzní zobrazení má matici $\mathbb{A}_{f^{-1}} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
   a předpis $f(x,y,z) = (-\frac{3x}{4} - \frac{y}{2} + \frac{5z}{4}, -\frac{x}{4} - \frac{y}{2} + \frac{3z}{4}, \frac{x}{2} + \frac{z}{2})$.

5. Jsou dána lineární zobrazení

   $$\begin{aligned} f\colon R^3 \to R^3\colon f(x_1,x_2,x_3) &= (x_1+x_2, x_1-x_3, 2x_3), \\ g\colon R^3 \to R^3\colon g(x_1,x_2,x_3) &= (x_1+x_2, 2x_1+x_2+x_3, x_1+x_3). \end{aligned}$$

   Najděte předpis pro zobrazení $h = g \circ f\colon R^3 \to R^3$, kde $(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x}))$. Ověřte, že zobrazení h není izomorfismus a najděte bázi jeho jádra $\operatorname{Ker} h$.

   Výsledek: Předpis $h(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, 3x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3)$, matice zobrazení h vzhledem ke standardním bázím $\mathbb{A}_h = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ není regulární, proto h není izomorfismus.
   $\operatorname{Ker} h =< (3,-5,1) >$.

Vlastní čísla a vlastní vektory

1. Najděte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory matice

   $$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Má matice $\mathbb{A}$ diagonální tvar?

   Výsledek: Pro $\lambda_1 = 0$ je $\vec{v} = t(4,4,1)$, $t \in \mathbb{R} - \{0\}$. Pro $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ je $\vec{v} = t(1,-2,1)$, $t \in \mathbb{R} - \{0\}$. Matice $\mathbb{A}$ nemá diagonální tvar (v $\mathbb{R}^3$ neex. báze vlastních vektorů).

2. Lineární zobrazení $f\colon R^3 \to R^3$ má předpis

   $$f(x_1,x_2,x_3) = (3x_1 - x_3, -x_1 + x_2 + 2x_3, 4x_3).$$

   Nalezněte bázi B, vůči níž má zobrazení f diagonální matici (pokud vůbec existuje), a napište matici zobrazení f vůči bázi B.

   Výsledek: $B = \{(0,1,0), (-2,1,0), (-1,1,1)\}$, $\mathbb{A}_f(B,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Které vektory při zobrazení f nezmění směr ani orientaci? Kolikrát se změní jejich délka?

$$f \colon R^4 \to R^4 \colon f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_1 + 3x_2, 2x_1 + 3x_2, x_4, x_3)$$

Výsledek: $\vec{v} = (0, 0, t, t)$, kde $t \in \mathbb{R}$, nezmění ani délku (tvoří vlastní podprostor příslušný vlastnímu číslu $\lambda = 1$). $\vec{u} = (t, 2t, 0, 0)$, kde $t \in \mathbb{R}$, se prodlouží čtyřikrát (tvoří vlastní podprostor příslušný vlastnímu číslu $\lambda = 4$). Zbylá vlastní čísla jsou záporná, příslušné vlastní vektory tedy změní orientaci.