Subexponenciální algoritmus pro faktorizaci

24. a 25. přednáška z kryptografie

Obsah

Algoritmus SEF

Používaná fakta

Subexponenciální algoritmus pro faktorizaci SEF používá (podobně jako SEDL) $y-$hladkost a lineární algebru nad tělesem.

Časová náročnost pro faktorizaci n bude $O(2^{c\sqrt{\mathrm{len}(n)\,\mathrm{len}(\mathrm{len}(n))}})$.

Tvrzení

Známe-li netriviální druhou odmocninu z 1 v $\mathbb{Z}_n$, tj. $c \neq \pm 1$ takové, že $c^2 = 1$ v $\mathbb{Z}_n$, pak umíme faktorizovat n, konkrétně $\gcd(c \pm 1, n) \neq 1$ je faktor n.

Algoritmus SEF

Subexponenciální algoritmus pro faktorizaci (SEF)

Vstup: přirozené číslo n, které není prvočíslo, ani mocnina prvočísla, ani není dělitelné žádným prvočíslem $p \leq y$, kde y je parametr hladkosti (mimo jiné je n liché);

Výstup: netriviální faktor čísla n, anebo hláška "neúspěch";

Algoritmus najde druhou odmocninu z 1 v $\mathbb{Z}_n$, pokud je tato netriviální, spočte z ní faktor čísla n.

Poznámka

Grupa $\mathbb{Z}^*_{p^e}$ je pro $p > 2$ cyklická, nejsou v ní tedy netriviální druhé odmocniny z 1. Nebude-li n dělitelné žádným prvočíslem $p \leq y$, tak všechna y-hladná čísla v $\mathbb{Z}_n$ budou invertibilní.

Algoritmus SEF

Subexponenciální algoritmus pro faktorizaci (SEF)

Předpoklady pro n zajistíme předvýpočty, které budou časově méně náročné než vlastní algoritmus.

- n není prvočíslo:
  Millerův-Rabinův test $MR(-, \tilde{k})$ vyžaduje čas $O(\tilde{k}\,\mathrm{len}(n)^3)$.
- n není dokonalá mocnina, $n \neq m^e$ pro $m, e \in N$:
  Pomocí algoritmu na hledání celočíselných odmocnin lze najít m, e v čase $O(\mathrm{len}(n)^3\,\mathrm{len}(\mathrm{len}(n)))$.
- n není dělitelné žádným prvočíslem $p_1, \ldots, p_k \leq y$,
  kde y je parametr hladkosti:
  Prosté dělení trvá $O(k\,\mathrm{len}(n)^2)$, kde $k < y \doteq e^{\sqrt{\ln(n)}}$.

Algoritmus SEF

1. fáze algoritmu SEF

Nechť $p_1, \ldots, p_k$ jsou všechna prvočísla do y, je jich tedy k.

Náhodnou volbou nalezneme $(k+1)$ $y-$hladkých čtverců ze $\mathbb{Z}_n^*$.
Provedeme to pro každé $1 \leq i \leq k+1$ takto:

- zvol náhodně $a_i \in \mathbb{Z}_n^*$
- ověř prostým dělením, zda $a_i^2 = m_i$ v $\mathbb{Z}_n$ je $y-$hladké,
  tj. zda $m_i = p_1^{e_{i_1}} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_{i_k}}$ v $\mathbb{Z}$, kde $0 \leq m_i < n$;
  pak $a_i^2 = p_1^{e_{i_1}} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_{i_k}}$ v $\mathbb{Z}_n^*$
- dokud ne, tak opakuj náhodnou volbu

Algoritmus SEF

2. fáze algoritmu SEF

Pro $1 \leq i \leq k+1$ uvažujme $k-$tice exponentů $\bar{v}_i = (e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$ jakožto vektory nad $\mathbb{Z}_2$.

$\mathbb{Z}_2$ je těleso, $k-$tice $\mathbb{Z}_2^{\times k}$ tvoří vektorový prostor dimenze k, našich $(k+1)$ vektorů tedy musí být lineárně závislých.
Existují koeficienty $c_1, \ldots, c_{k+1} \in \mathbb{Z}_2$, ne všechny nulové, tak, že
$c_1\bar{v}_1 + \ldots + c_{k+1}\bar{v}_{k+1} = (0, \ldots, 0)$ v $\mathbb{Z}_2^{\times k}$.
Podíváme-li se na tuto kombinaci nad $\mathbb{Z}$, pak všechny složky výsledného vektoru jsou sudé:
$c_1\bar{v}_1 + \ldots + c_{k+1}\bar{v}_{k+1} = (e_1, \ldots, e_{k+1})$ v $\mathbb{Z}^{\times k}$, $2 \mid e_i$ pro každé i.
Koeficienty $c_1, \ldots, c_{k+1}$ nalezneme pomocí Gaussovy eliminace, která nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ funguje.

Algoritmus SEF

2. fáze algoritmu SEF

Uvažujme všech $(k+1)$ rovností tvaru $a_i^2 = p_1^{e_{i_1}} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_{i_k}}$ v $\mathbb{Z}_n^*$.
Pokud každou $i-$tou rovnost umocníme na příslušné c_i a všechny rovnosti navzájem vynásobíme, získáme rovnost:

$$a^2 = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k} \text{ v } \mathbb{Z}_n^*,$$

kde $a = \prod_{i=1}^{k+1} a_i^{c_i}$ a všechna e_i jsou sudá.

Poznámka: $c_i \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, tudíž jsme vynásobili navzájem jen ty rovnosti, pro něž je $c_i = 1$. Rovnosti, pro něž je $c_i = 0$, umocněním degenerují na rovnost $1 = 1$.

Algoritmus SEF

2. fáze algoritmu SEF

Položme $b = p_1^{\frac{e_1}{2}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\frac{e_k}{2}}$ v $\mathbb{Z}_n^*$, přičemž $\frac{e_i}{2} \in \mathbb{N}$.

Z rovnosti:

$$a^2 = b^2 \text{ v } \mathbb{Z}_n^*$$

dostáváme rovnost:

$$(ab^{-1})^2 = 1 \text{ v } \mathbb{Z}_n^*$$

Našli jsme druhou odmocninu z jedné v $\mathbb{Z}_n^*$, a to $c = ab^{-1}$.

Pokud je $c \neq \pm 1$, najdeme faktor $\gcd(c-1, n)$ čísla n.
Pokud je $c = \pm 1$, ohlásíme neúspěch.

Algoritmus SEF

- for $i \leftarrow 1$ to $k+1$ do
  - repeat
    - choose $a_i \overset{\mathcal{U}}{\leftarrow} \mathbb{Z}_n^*$ at random
    - $m_i \leftarrow a_i^2$ in $\mathbb{Z}_n$
    - test if m_i is $y-$smooth (trial division)
  - until $m_i = p_1^{e_{i_1}} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_{i_k}}$ for some $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k} \in \mathbb{Z}$
  - $\bar{v}_i \leftarrow (e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$ in $\mathbb{Z}^{\times k}$ enddo
- apply Gaussian elimination over $\mathbb{Z}_2$ to find $c_1, \ldots, c_{k+1} \in \mathbb{Z}_2$, not all zero, such that $c_1\bar{v}_1 + \ldots + c_{k+1}\bar{v}_{k+1} = (0, \ldots, 0)$ in $\mathbb{Z}_2^{\times k}$
- for $j \leftarrow 1$ to k do $e_j \leftarrow \sum_{i=1}^{k+1} c_i e_{i_j}$ in $\mathbb{Z}$ enddo
- $a \leftarrow \prod_{i=1}^{k+1} a_i^{c_i}$, $b \leftarrow p_1^{\frac{e_1}{2}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\frac{e_k}{2}}$, $c \leftarrow ab^{-1}$ in $\mathbb{Z}_n$
- if $c = \pm 1$ then output "failure"
  else output $\gcd(c-1, n)$ endif

Algoritmus SEF

Příklad

Faktorizujte $n = 77$ a zvolte parametr hladkosti $y = 5$.
(77 není mocnina prvočísla, ani není dělitelné prvočísly $2, 3, 5 \leq y$.)

- 1.fáze - počítáme v $\mathbb{Z}_{77}^*$, náhodnou volbou získáme rovnosti:
  R_1: $59^2 = 16 = 2^4$, odtud $\bar{v}_1 = (4, 0, 0)$.
  R_2: $3^2 = 9 = 3^2$, odtud $\bar{v}_2 = (0, 2, 0)$.
  R_3: $37^2 = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, odtud $\bar{v}_3 = (2, 1, 1)$.
  R_4: $13^2 = 15 = 3 \cdot 5$, odtud $\bar{v}_4 = (0, 1, 1)$.
- 2.fáze - počítáme nad $\mathbb{Z}_2$, kde $c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + c_3\bar{v}_3 + c_4\bar{v}_4 = \bar{o}$ dává:
  $c_1(0,0,0) + c_2(0,0,0) + c_3(0,1,1) + c_4(0,1,1) = (0,0,0)$
  Netriviální řešení je např. $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = c_4 = 1$.

Algoritmus SEF

Příklad - pokračování

- kompletování výpočtů - počítáme v $\mathbb{Z}_{77}^*$,
  $R_1^0 \cdot R_2^0 \cdot R_3^1 \cdot R_4^1 = R_3 \cdot R_4$ dává rovnost:
  $(37 \cdot 13)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, tj. $19^2 = 30^2$ v $\mathbb{Z}_{77}^*$,
  $c = 19 \cdot 30^{-1} = 34$ je netriviální druhá odmocnina z 1.
  Odtud $\gcd(c-1, n) = \gcd(33, 77) = 11$ je faktor čísla $n = 77$.

Poznámka:

- Netriviální řešení $c_1 = c_3 = c_4 = 0$, $c_2 = 1$ by vedlo k rovnosti
  R_2: $3^2 = 3^2$ v $\mathbb{Z}_{77}^*$,
  $c = 3 \cdot 3^{-1} = 1$ je triviální druhá odmocnina z 1.
  Algoritmus by ohlásil neúspěch.

Analýza algoritmu SEF

Tvrzení

Pravděpodobnost, že algoritmus SEF ohlásí neúspěch, je nejvýše $\frac{1}{2}$.

Důkaz

Rovnice $x^2 = 1$ má v $\mathbb{Z}_n$, pro liché $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$, právě 2^r řešení.
Lze dokázat, že každé řešení může být nalezeno algoritmem SEF se stejnou pravděpodobností.
Pak $P[\text{neúspěch}] = \frac{2}{2^r} = \frac{1}{2^{r-1}} \leq \frac{1}{2}$ díky předpokladu, že $r \geq 2$.

Analýza algoritmu SEF

Očekávaný čas algoritmu SEF

- 1. fáze SEF: Označme σ pravděpodobnost, že náhodný čtverec ze $\mathbb{Z}_n^*$ je $y-$hladký. Pak očekávaný počet cyklů pro nalezení jednoho $y-$hladkého čtverce je $\frac{1}{\sigma}$.
  V každém cyklu dělíme všemi k prvočísly do y ($y < n$).
  Těchto $y-$hladkých čtverců potřebujeme najít $(k+1)$.
  $E(TIME1) = O(\frac{k^2}{\sigma} \operatorname{len}(n)^2)$
- 2. fáze SEF: Gaussova eliminace na matici typu $(k, k+1)$ vyžaduje zhruba k^3 operací v $\mathbb{Z}_2$ a její čas bude dominantní pro druhou fázi. $TIME2 = O(k^3 \operatorname{len}(n)^2)$
- Očekávaný čas pro SEF: $E(TIME) = O((\frac{k^2}{\sigma} + k^3) \operatorname{len}(n)^2)$

Analýza algoritmu SEF

Očekávaný čas algoritmu SEF

Odhadneme k a σ pomocí y jako u algoritmu SEDL s následujícím doplněním:

Umíme odhadnou počet $y-$hladkých čísel do n. Díky předpokladu, že žádné $p_i \leq y$ nedělí n, jsou všechna tato $y-$hladká čísla v $\mathbb{Z}_n^*$.

Problém: V SEF hledáme náhodně $y-$hladké čtverce.
Kolik je ale $y-$hladkých čísel mezi čtverci v $\mathbb{Z}_n^*$?
Odpověď: Zhruba stejně "husto". Lze dokázat, že pravděpodobnost trefy do $y-$hladkého čtverce v $\mathbb{Z}_n$ je stejná jako pravděpodobnost trefy do $y-$hladkého čísla v $\mathbb{Z}_n$.

Analýza algoritmu SEF

Očekávaný čas algoritmu SEF

Předpokládejme, že $y = e^{\ln(n)^{\lambda + o(1)}}$, kde $0 < \lambda < 1$.

- $\sigma = \frac{\Psi(y,n)}{|\mathbb{Z}_n^*|} \geq \frac{\Psi(y,n)}{n} \geq e^{(-1+o(1))\frac{\ln(n)}{\ln(y)} \ln(\ln(n))}$
- Dle Čebyševovy věty je $k = \pi(y) = \Theta(\frac{y}{\ln(y)})$, odtud $k = e^{(1+o(1))\ln(y)}$.
- $\operatorname{len}(n)^2 = e^{o(1)\ln(y)}$ díky našemu předpokladu pro y.

Analýza algoritmu SEF

Očekávaný čas algoritmu SEF

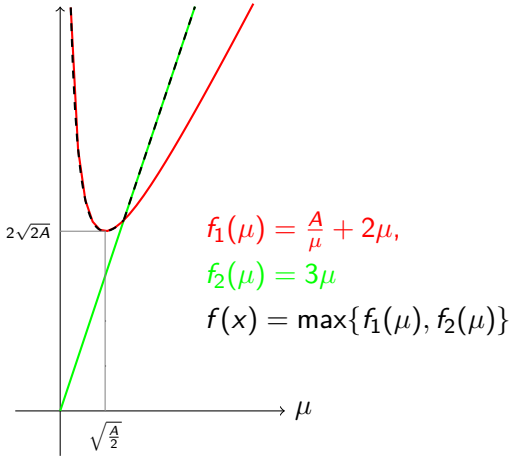
Dosadíme do $E(TIME) = O((\frac{k^2}{\sigma} + k^3)\,\mathrm{len}(n)^2)$ a získáme odhad:

$$E(TIME) \leq e^{(1+o(1))\max\{\frac{\ln(n)}{\ln(y)}\ \ln(\ln(n))+2\ln(y);3\ln(y)\}}$$

Nyní chceme zvolit parametr hladkosti y tak, aby byl odhad očekávaného času minimální.
Označme $\mu = \ln(y)$, $A = \ln(n)\ln(\ln(n))$.
Minimim funkce $f(\mu) = \max\{\frac{A}{\mu} + 2\mu; 3\mu\}$ v exponentu nastane v bodě $\mu = \sqrt{\frac{A}{2}}$, hodnota minima je $2\sqrt{2A}$ (výpočet viz SEDL).

Analýza algoritmu SEF

Očekávaný čas algoritmu SEF



Analýza algoritmu SEF

Očekávaný čas algoritmu SEF

Odhad času bude minimální pro $y = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln(n)\ln(\ln(n))}}$.
Při tomto y bude očekávaný čas algoritmu SEF

$$E(TIME) \leq e^{(2\sqrt{2}+o(1))\sqrt{\ln(n)\ln(\ln(n))}},$$

tedy subexponenciální s konstantou $2\sqrt{2} \doteq 2,828$ v exponentu.

Poznámka

Konstantu v exponentu je možné zmenšit na $2,0$, použijeme-li přesnější odhad počtu $y-$hladných čísel (viz věta 2).
Pro $y = e^{\frac{1}{2}\sqrt{\ln(n)\ln(\ln(n))}}$ bude $E(TIME) \leq e^{(2+o(1))\sqrt{\ln(n)\ln(\ln(n))}}$.

Kvadratické síto (QSF)

Algoritmus SEF s použitím kvadratického síta

Zrychlení algoritmu SEF získáme, když $y-$hladké čtverce v 1. fázi algoritmu nebudeme hledat náhodně, ale pomocí kvadratického síta. Konstanta v exponentu klesne na $1,0$.

Budeme potřebovat dva parametry:

- parametr hladkosti y
- parametr síta z

Budeme předpokládat, že pro oba platí:

$$y, z = e^{\ln(n)^{\frac{1}{2}+o(1)}} \doteq e^{\sqrt{\ln(n)}}$$

Kvadratické síto (QSF)

Algoritmus SEF s použitím kvadratického síta

Chceme faktorizovat n, které je liché, není to prvočíslo, ani mocnina prvočísla, není dělitelné žádným prvočíslem $p_i \leq y$, kterých je celkem k.

Kdybychom v 1. fázi algoritmu SEF volili všechna $a_i < \sqrt{n}$, pak bychom z $y-$hladkých čtverců $a_i^2 < n$ získali v závěru rovnost $a^2 = a^2$ v $\mathbb{Z}_n$ (počítání modulo by se neprojevilo).
Našli bychom druhou odmocninu z jedné $c = 1$ a algoritmus by ohlásil neúspěch. Aby měl algoritmus šanci na úspěch, musí volit aspoň některá a_i větší než $\sqrt{n}$.

Kvadratické síto (QSF)

Hledání $y-$hladkých čtverců

Položme $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, tedy $m \in \mathbb{N}$ je takové, že $m^2 \leq n < (m+1)^2$.
Uvažujme celočíselný polynom:

$$F(x) = (x+m)^2 - n$$

Pro $1 \leq s \leq z$ platí (díky předpokladu $z \doteq e^{\sqrt{\ln(n)}}$):

$$1 \leq F(s) \leq z^2 + 2z\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}+o(1)}$$

Aneb $n < (s+m)^2 \leq n + n^{\frac{1}{2}+o(1)}$, $F(s)$ je zbytek po vydělení čísla $(s+m)^2$ číslem n, tedy $F(s)$ je čtverec v $\mathbb{Z}_n$.

Kvadratické síto (QSF)

Hledání $y-$hladkých čtverců

Spočteme hodnoty $F(s)$ pro všechna $s = 1, \ldots, \lfloor z \rfloor$.

Pokud je nějaké $F(s)$ $y-$hladké číslo, pak jsme našli $y-$hladký čtverec v $\mathbb{Z}_n^*$.

Když $F(s) = (s+m)^2 - n = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ v $\mathbb{Z}$,
pak $(s+m)^2 = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ v $\mathbb{Z}_n^*$.

Faktorizace tohoto čtverce odpovídá jeho zbytku modulo n a díky předpokladu, že $p_i \nmid n$ pro každé i, je čtverec invertibilní.

Zbývá otázka, jak volit z, abychom mohli mezi hodnotami $F(s)$ najít dostatečný počet $y-$hladkých čtverců.

Kvadratické síto (QSF)

Hledání $y-$hladkých čtverců

Hustota y-hladkých čísel kolem $\sqrt{n}$ je větší než kolem n.
Pravděpodobnost, že některá z hodnot $F(s)$ je $y-$hladká je větší než pravděpodobnost, že náhodný čtverec ze $\mathbb{Z}_n^*$ je $y-$hladký.

Nechť $\tilde{\sigma}$ je pravděpodobnost, že náhodné číslo do $\sqrt{n}$ je $y-$hladké, σ je pravděpodobnost, že náhodné číslo do n je $y-$hladké.

$$\tilde{\sigma} = \frac{\Psi(y,\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = e^{(-1+o(1))\frac{\ln(\sqrt{n})}{\ln(y)}\ln(\frac{\ln(\sqrt{n})}{\ln(y)})} =$$
$$= e^{(-\frac{1}{4}+o(1))\frac{\ln(n)}{\ln(y)}\ln(\ln(n))} > \sigma = e^{(-1+o(1))\frac{\ln(n)}{\ln(y)}\ln(\ln(n))}$$

Použili jsme přesnější odhad pro $\Psi(y,\sqrt{n})$ a předpoklad $y \doteq e^{\sqrt{\ln(n)}}$. Už toto zaručí zrychlení 1. fáze algoritmu.

Kvadratické síto (QSF)

Určení parametru z

Parametr z stanovíme tak, abychom měli šanci najít mezi hodnotami $F(1), \ldots, F(\lfloor z \rfloor)$ celkem $k+1$ $y-$hladkých čtverců.

Je-li $\tilde{\sigma}$ pravděpodobnost, že náhodné číslo do $\sqrt{n}$ je $y-$hladké, ($\tilde{\sigma}$ také odhaduje pravděpodobnost, že náhodný čtverec kolem $\sqrt{n}$ je $y-$hladký), pak k nalezení jednoho $y-$hladkého čtverce potřebujeme prozkoumat průměrně $\frac{1}{\tilde{\sigma}}$ čísel tvaru $F(s)$. Položíme tedy $z = \frac{k}{\tilde{\sigma}}$.

Pokud bychom nenašli dostatek $y-$hladkých čtverců, tak parametr z zdvojnásobíme a budeme pokračovat v hledání.

Kvadratické síto (QSF)

Určení parametru z

Poznámka: V našem odhadu parametru z je "podfuk". My přece nevolíme čísla náhodně!!!

Ve skutečnosti nevíme, kolik je $y-$hladkých čísel mezi hodnotami našeho polynomu $F(x)$ (neexistuje rigorózní důkaz). Algoritmus faktorizace pomocí kvadratického síta tedy může ohlásit neúspěch už během 1. fáze, protože nenajde dostatek $y-$hladkých čtverců.

Zkušenost přesto ukazuje, že algoritmus QSF funguje a dokonce v očekávaném čase (heuristické ověření).

Kvadratické síto (QSF)

Sítovací procedura

Další zrychlení 1. fáze algoritmu zajistí sítovací procedura. Ověřování, zda je $F(s)$ $y-$hladké, nebudeme dělat pro každé $F(s)$ zvlášť, ale uděláme je pro všechna $F(1), \ldots, F(\lfloor z \rfloor)$ najednou.

Vytvoříme pole V délky $\lfloor z \rfloor$, které inicializujeme:
$V[s] \leftarrow F(s)$ pro všechna $s = 1, \ldots, \lfloor z \rfloor$
(Aneb bude zde subexponenciální prostorová složitost.)

Pokud vydělíme každé $V[s]$ všemi prvočísly $p_1, \ldots, p_k \leq y$ tolikrát, kolikrát to půjde beze zbytku, tak nám $y-$hladká čísla propadnou sítem:
$F(s)$ je $y-$hladké, právě když po dělení vš. $p_i \leq y$ je $V[s] = 1$.

Kvadratické síto (QSF)

Sítovací procedura

Urychlení spočívá v tom, že libovolným prvočíslem $p \leq y$ budeme dělit jen ta $F(s)$ (resp. V[s]), která jimi dělitelná jsou:

$p \mid F(s)$, právě když $F(s) = 0$ v $\mathbb{Z}_p$, což nastane, právě když s (resp. $[s]_p \in \mathbb{Z}_p$) je kořenem $F(x)$, který chápeme jako polynom nad $\mathbb{Z}_p$.

Kvadratický polynom $F(x) = (x+m)^2 - n$ může mít v tělese $\mathbb{Z}_p$ nejvýše dva kořeny, označme je s_1, s_2.

Prvočíslem p jsou dělitelná právě ta $F(s)$, pro něž $s = s_j + lp$, kde $s_j \in \{s_1, s_2\}$ a $l \in \mathbb{N}$ libovolné takové, aby vyšlo $s \leq \lfloor z \rfloor$. (Zapamatujeme si též "kolikrát" lze $F(s)$ dělit tímto p, kvůli prvočíselnému rozkladu.)

Kvadratické síto (QSF)

Kořeny kvadrátu nad $\mathbb{Z}_p$

Chceme najít kořeny polynomu $F(x) = (x+m)^2 - n$ v tělese $\mathbb{Z}_p$.

- Nad $\mathbb{Z}_2$ je $F(x) = x^2 + m^2 - n$, kde n je liché (předpoklad).
  Pro m sudé je $F(x) = x^2 - 1$ a má dvojnásobný kořen $1 \in \mathbb{Z}_2$.
  Pro m liché je $F(x) = x^2$ a má dvojnásobný kořen $0 \in \mathbb{Z}_2$.
- Nad $\mathbb{Z}_p$ pro $p > 2$ je $F(x) = 0$, právě když $(x+m)^2 = n$ v $\mathbb{Z}_p$.
  Není-li n čtverec v $\mathbb{Z}_p^*$, pak $F(x)$ nemá kořen v $\mathbb{Z}_p$.
  Je-li $n = (\pm d)^2$ čtverec v $\mathbb{Z}_p^*$, pak $F(x)$ má dva kořeny v $\mathbb{Z}_p$, a to $-m \pm d$. (Přitom $n \in \mathbb{Z}_p^*$ díky předpokladu $p \nmid n$.)

Kvadratické síto (QSF)

Kořeny kvadrátu nad $\mathbb{Z}_p$

Pro hledání kořenů v $\mathbb{Z}_p$, kde $p > 2$ je prvočíslo, potřebujeme:

1. Umět poznat čtverce v $\mathbb{Z}_p^*$:
   Eulerovo kritérium: $a \in \mathbb{Z}_p^*$ je čtverec, jen když $a^{\frac{p-1}{2}} = 1$ v $\mathbb{Z}_p$.
2. Umět počítat druhé odmocniny v $\mathbb{Z}_p^*$:
   • Je-li $p \equiv 3 \pmod 4$, pak čtverec $a \in \mathbb{Z}_p^*$ má druhé odmocniny $\pm b = \pm a^{\frac{p+1}{4}}$ v $\mathbb{Z}_p^*$.
   • Pro libovolné p existuje algoritmus na hledání druhých odmocnin v $\mathbb{Z}_p^*$, který pracuje v čase $O(\mathrm{len}(p)^3 + h\,\mathrm{len}(h)\,\mathrm{len}(p)^2) \subseteq O(\mathrm{len}(p)^3\,\mathrm{len}(\mathrm{len}(p)))$, kde $p - 1 = 2^h \tilde{m}$, $\tilde{m}$ je liché.

Sítovací procedura

Let $p_1, \ldots, p_k$ are all primes upto y.

- for $s \leftarrow 1$ to $\lfloor z \rfloor$ do $V[s] \leftarrow F(s)$ enddo
- for $i \leftarrow 1$ to k do
  - find roots of $F(x)$ in $\mathbb{Z}_{p_i}$ (there are at most two of them)
  - for every root s_j do
    - $s \leftarrow s_j$
    - while $s \leq \lfloor z \rfloor$ do
      - $e \leftarrow 0$
      - repeat $V[s] \leftarrow \frac{V[s]}{p_i}$, $e \leftarrow e + 1$
      - until $p_i \nmid V[s]$
      - put in list of divisors $D[s]$ for s prime power p_i^e
      - $s \leftarrow s + p_i$ enddo
    - enddo, enddo
- $F(s)$ is $y-$smooth iff $V[s] = 1$

Kvadratické síto (QSF)

Čas běhu sítovací procedury

Předpokládáme, že $y, z = e^{\ln(n)^{\frac{1}{2}+o(1)}} \doteq e^{\sqrt{\ln(n)}}$.
Odtud $\mathrm{len}(y) \doteq \mathrm{len}(n)^{\frac{1}{2}}$.

- Inicializace pole V trvá $O(z\,\mathrm{len}(n)^2)$.
- Výpočet kořenů polynomů $F(x)$ nad všemi $\mathbb{Z}_{p_i}$ (všech prvočísel $p_i \leq y$ je k, tedy $k < y \doteq z$) trvá zhruba $O(k\,\mathrm{len}(y)^4) = O(k\,\mathrm{len}(n)^2)$.
- Vlastní sítování trvá $O(\sum_{p \leq y} \frac{z}{p}\,\mathrm{len}(p)\,\mathrm{len}(n)^2)$, což je zhruba $O(z\,\mathrm{len}(n)^3)$. To je čas dominantní nad předchozími časy.

Kvadratické síto (QSF)

Čas běhu sítovací procedury

Podívejme se podrobněji na odhad času pro sítování.

- Pro každé prvočíslo $p_i \leq y$ najdeme nejvýše dva kořeny s_1, s_2 a každý kořen dá $\frac{z}{p_i}$ hodnot $F(s)$ dělitelných p_i.
  Přitom jedno $F(s)$ lze dělit číslem p_i nejvýše $\log_{p_i}(F(s))-$krát, což je $O(\mathrm{len}(n))$ dělení. Pro p_i potřebujeme čas
  $O(\frac{z}{p_i}\,\mathrm{len}(p_i)\,\mathrm{len}(n)^2) = O(\frac{z}{p_i}\,\mathrm{len}(n)^{2,5})$.
- Sečteme časy pro všechna p_i:
  $O(\sum_{i=1}^{k} \frac{z}{p_i}\,\mathrm{len}(n)^{2,5}) = O(z\,\mathrm{len}(n)^3)$.
  Odhadli jsme sumu integrálem:

$$\sum_{p_i \leq y} \frac{1}{p_i} \leq \int_1^y \frac{1}{\tilde{y}} d\tilde{y} = [\ln \tilde{y}]_1^y = \ln y \in O(\mathrm{len}(n)^{\frac{1}{2}})$$

Algoritmus QSF - 1'st stage

- $m \leftarrow \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, $F(x) = (x+m)^2 - n$
- repeat
  - use the sieving procedure with parameter z (it creates fields V and D of length $\lfloor z \rfloor$)
  - $z \leftarrow 2z$
- until $V[s] = 1$ for at least $k+1$ different values of s
- for the first $k+1$ values of s such that $V[s] = 1$ do
  - $a_i \leftarrow s + m$
  - find in $D[s]$ the factorization of $a_i^2 = p_1^{e_{i_1}} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_{i_k}}$ in $\mathbb{Z}_n$
  - $\bar{v}_i \leftarrow (e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$ in $\mathbb{Z}^{\times k}$ enddo

2. fáze je stejná jako v SEF - Gaussova eliminace nad $\mathbb{Z}_2$ a dopočítání druhé odmocniny z 1. Pokud je tato různá od ± 1, najdeme faktor n.

Analýza algoritmu QSF

Očekávaný čas algoritmu QSF

- 1. fáze QSF: $E(TIME1) = O(z\,\mathrm{len}(n)^3) = O(\frac{k}{\tilde{\sigma}}\,\mathrm{len}(n)^3)$
- 2. fáze QSF: $TIME2 = O(k^3\,\mathrm{len}(n)^2)$
- Očekávaný čas pro QSF: $E(TIME) = O((\frac{k}{\tilde{\sigma}} + k^3)\,\mathrm{len}(n)^3)$

Dosadíme-li za k a $\tilde{\sigma}$ (podobně jako v SEF), získáme odhad:

$$E(TIME) \leq e^{(1+o(1))\max\{\frac{1}{4}\frac{\ln(n)}{\ln(y)}\ \ln(\ln(n))+\ln(y);3\ln(y)\}}$$

Analýza algoritmu QSF

Volba parametru y

Chceme zvolit parametr hladkosti y tak, aby byl odhad minimální.
Označme $\mu = \ln(y)$, $A = \ln(n)\ln(\ln(n))$.
Chceme najít minimim pro funkci $f(\mu) = \max\{\frac{1}{4}\frac{A}{\mu} + \mu; 3\mu\}$.

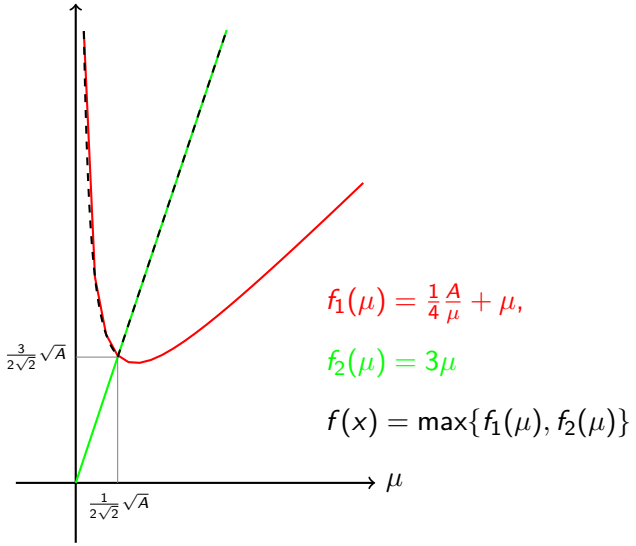
Funkce $f_1(\mu) = \frac{1}{4}\frac{A}{\mu} + \mu$ nabývá minima v bodě $\mu = \frac{\sqrt{A}}{2}$,
hodnota minima je $\sqrt{A}$.
Funkce $f_2(\mu) = 3\mu$ nabývá v tomto bobě hodnoty $\frac{3}{2}\sqrt{A} > \sqrt{A}$.

Protože je funkce $f_2(\mu)$ rostoucí, bude bod minima funkce $f(\mu) = \max\{f_1(\mu); f_2(\mu)\}$ před bodem minima funkce $f_1(\mu)$, bude to bod, v němž se grafy těchto funkcí protínají:

$$f_1(\mu) = f_2(\mu) \text{ pro } \mu = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{A}$$

Hodnota minima funkce $f(\mu)$ je $\frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{A}$.

Volba parametru y



Analýza algoritmu QSF

Očekávaný čas algoritmu QSF

Při určování parametru y nás vlastně zdržela Gaussova eliminace.
Matice, kterou eliminujeme, je řídká - obsahuje exponenty prvočísel ve faktorizaci nalezených $y-$hladkých čtverců.
Použijeme-li speciální algoritmy pro řešení soustavy k rovnic o $(k+1)$ neznámých s řídkou maticí, půjde to v čase $O(k^{2+o(1)})$.

Potom bude funkce $f_2(\mu) = 2\mu$ a nalezený bod minima $\mu = \frac{\sqrt{A}}{2}$ funkce $f_1(\mu)$ je zároveň bodem minima funkce $f(\mu)$.
Hodnota minima bude $\sqrt{A}$.

V tomto případě pro parametr hladkosti $y = e^{\frac{1}{2}\sqrt{\ln(n)\ln(\ln(n))}}$ bude $z = e^{(1+o(1))\sqrt{\ln(n)\ln(\ln(n))}}$ a očekávaný čas algoritmu QSF

$$E(TIME) \leq e^{(1+o(1))\sqrt{\ln(n)\ln(\ln(n))}}.$$

Analýza algoritmu QSF

Očekávaný čas algoritmu QSF

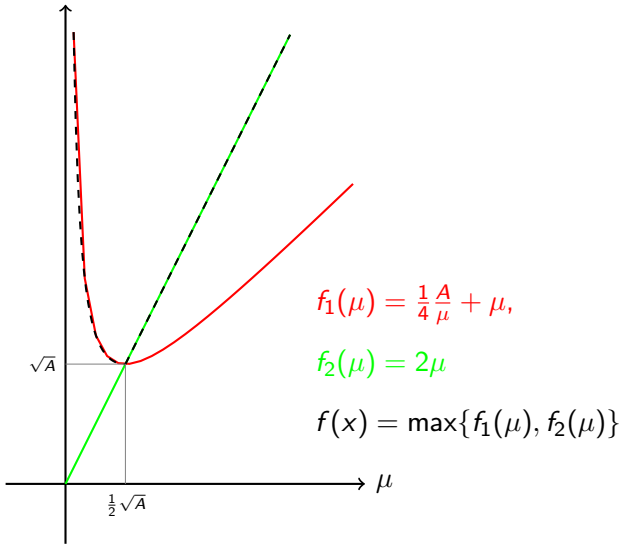
Volíme parametr hladkosti: $y = e^{\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{A}} = e^{\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\ln(n)\ln(\ln(n))}}$
Potom bude parametr síta: $z = \frac{k}{\tilde{\sigma}} = e^{(\frac{3}{2\sqrt{2}}+o(1))\sqrt{\ln(n)\ln(\ln(n))}}$
(Všimněme si, že y i z splňují předpoklady našeho výpočtu.)

Při těchto y a z bude očekávaný čas algoritmu QSF

$$E(TIME) \leq e^{(\frac{3}{2\sqrt{2}}+o(1))\sqrt{\ln(n)\ln(\ln(n))}},$$

tedy subexponenciální s konstantou $\frac{3}{2\sqrt{2}} \doteq 1,061$ v exponentu.

Volba parametru y



Dodatek

Další subexponenciální algoritmy na faktorizaci

- Algoritmus používající síto nad číselným tělesem pracuje v očekávaném čase

$$E(TIME) \leq e^{(c+o(1))\ln(n)^{\frac{1}{3}}\ln(\ln(n))^{\frac{2}{3}}},$$

kde zatím známá nejmenší konstanta $c = 1,902$ (heuristicky ověřeno).

- Faktorizace přes eliptické křivky má očekávaný čas

$$E(TIME) \leq e^{(\sqrt{2}+o(1))\sqrt{\ln(p)\ln(\ln(p))}}\ln(n)^{O(1)},$$

kde p je nejmenší prvočíslo, které dělí n (heuristicky ověřeno). Tento algoritmus má, na rozdíl od ostatních, polynomiální prostorovou náročnost.

Algoritmus SEF a QSF

Literatura

- Shoup: A Computational Introduction to Number Theory and Algebra. Kapitola 15.
- Lineární prostory nad tělesem najdete tamtéž v kapitole 13. http://shoup.net/ntb/