

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ  
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ  
KATEDRA MATEMATIKY



**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

**Základy waveletové analýzy**

Praha, 2007

Autor: Váňa Zdeněk

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, internetové stránky atd.) uvedené v příloženém seznamu.

Souhlasím s užitím tohoto školního díla ve smyslu § 60 zákona č.121/2000 Sb. , o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon).

V Praze dne \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
podpis

## Poděkování

Rád bych všude poděkoval Prof. RNDr. Janu Hamhalterovi, CSc., vedoucímu mé bakalářské práce, který byl vždy ochotný konzultovat vzniklé problémy, a který vytvořil dokonalé podmínky pro zpracování této práce.

Musím také vyjádřit, jak jsem velmi vděčný svým rodičům, mé přítelkyni, mým příbuzným a kamarádům, kteří mě při práci plně podporovali, a kteří mě mnohdy inspirovali nejen při tvorbě této práce, ale i během celého studia.

Těm všem patří mé „DĚKUJI“.

## **Anotace**

Tato práce popisuje matematický princip waveletové (vlnkové) transformace, její možné užití v praxi a ukázky jednoduchých aplikací, které vystihují její výhody oproti klasickým analýzám signálů, jako je například Fourierova transformace.

Práce ze začátku popisuje základní matematické pojmy, bez kterých se při popisu waveletové transformace neobejdeme. Na jejich základě je vybudována waveletová teorie na obecné úrovni analýzy. Dále práce obsahuje základní využití waveletové transformace v praktických aplikacích.

U čtenáře této práce se předpokládá alespoň základní znalost lineární algebry v rozsahu standardního jednosemestrálního kurzu.

## **Abstract**

This bachelor thesis describes mathematical principle of wavelet transform and demonstrations of simple applications, which highlight its advantages in comparison with classical signal analysis like Fourier transform.

The thesis starts with description of basic mathematical concepts which are indispensable for further exposition. Based on that the wavelet transform is built. At the end my bachelor thesis contains basic usage of wavelet transform in practical applications.

# Obsah

Seznam obrázků	vi
Deklarace	viii
<b>1 ÚVOD</b>	<b>1</b>
1.1 Stručný obsah jednotlivých kapitol . . . . .	3
<b>2 ZÁKLADNÍ POJMY</b>	<b>4</b>
2.1 Skalární součin . . . . .	4
2.1.1 Vlastnosti skalárního součinu . . . . .	5
2.2 Ortonormální báze (ONB) . . . . .	7
<b>3 HILBERTOVY PROSTORY</b>	<b>8</b>
3.1 Ortonormální báze Hilbertova prostoru . . . . .	12
3.1.1 Základní ortonormální báze . . . . .	13
<b>4 DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE (DFT)</b>	<b>15</b>
4.1 Vlastnosti DFT a IDFT . . . . .	16
4.2 Operátor translace, rotace a konjungované reflexe . . . . .	17
4.3 Rychlá Fourierova transformace (FFT) . . . . .	18
<b>5 DISKRÉTNÍ WAVELETOVÁ BÁZE</b>	<b>20</b>
5.1 Základní princip . . . . .	20
5.2 Wavelety na první úrovni . . . . .	22
5.3 Wavelety na p-té úrovni . . . . .	26
5.4 Speciální wavelety na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . . . . .	29
5.4.1 Haarova báze . . . . .	29
5.4.2 Shannonova báze . . . . .	32

5.4.3	Daubechiesové wavelety $D2P$ . . . . .	33
<b>6</b>	<b>VYUŽITÍ WAVELETOVÉ TRANSFORMACE</b>	<b>38</b>
6.1	Detekce nespojitosti a přerušení signálu . . . . .	39
6.1.1	Diskuze . . . . .	41
6.2	Detekce trendu signálu . . . . .	46
6.3	Detekce soběpodobnosti . . . . .	47
6.4	Identifikace čisté frekvence . . . . .	48
6.4.1	Diskuze . . . . .	49
6.5	Potlačení signálu . . . . .	50
6.6	Filtrace šumu . . . . .	51
6.7	Komprese dat . . . . .	54
<b>7</b>	<b>ZÁVĚR</b>	<b>55</b>
	Seznam použité literatury	<b>56</b>
<b>A</b>	<b>Ukázky filtrů D2P</b>	<b>I</b>

# Seznam obrázků

1.1	Různé analýzy signálů. . . . .	2
3.1	Rozklad vektoru do kolmých prostorů . . . . .	10
5.1	Rozklad prostoru na prostory detailů a aproximací . . . . .	21
5.2	Princip analýzy a syntézy . . . . .	26
5.3	Haarovy wavelety, $N = 8$ . . . . .	31
5.4	Shannonovy wavelety na první úrovni, $N = 32$ . . . . .	33
5.5	Duabechiesové wavelet $D6$ , $N = 16$ . . . . .	37
6.1	Ostrý přechod dvou čistých frekvencí . . . . .	40
6.2	Spojité přechod frekvence v krátkém časovém okamžiku . . . . .	41
6.3	Nespojitá derivace . . . . .	42
6.4	Zvětšený detail z obrázku 6.3 . . . . .	42
6.5	Přerušovaný signál . . . . .	43
6.6	Zvětšený detail přerušení z obrázku 6.5 . . . . .	44
6.7	DFT přerušovaného signálu . . . . .	45
6.8	Vliv bílého šumu na detekci nespojitosti . . . . .	45
6.9	Detekce trendu signálu . . . . .	46
6.10	Detekce soběpodobnosti signálu . . . . .	47
6.11	Zvětšený detail z obrázku 6.10 . . . . .	48
6.12	Identifikace čisté frekvence . . . . .	49
6.13	Zvětšený detail z obrázku 6.12 . . . . .	50
6.14	Ukázka potlačení polynomiálního signálu . . . . .	51
6.15	Analýza doplerovského signálu . . . . .	52
6.16	Odstranění šumu ze signálu . . . . .	53
6.17	Porovnání výsledku s původním signálem . . . . .	54
A.1	Waveletové filtry $D2P$ na první úrovni . . . . .	I

A.2 Waveletové filtry $D2P$ na šesté úrovni . . . . .	II
---	----

# Deklarace

Značka	Vysvětlivka
$\mathbb{N}$	prostor přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	prostor celých čísel
$\mathbb{R}$	prostor reálných čísel
$\mathbb{C}$	prostor komplexních čísel
$j$	imaginární jednotka
$\ell^2(\mathbb{N})$	prostor komplexních sumarizovatelných posloupností: $\ell^2(\mathbb{N}) = \left\langle (x_n)_{n=1}^{\infty} \mid \sum_{n=1}^{\infty}  x_n ^2 < \infty \right\rangle$
$\ell^1(\mathbb{Z})$	prostor komplexních sumarizovatelných posloupností: $\ell^1(\mathbb{Z}) = \left\langle (x_n)_{n=-\infty}^{\infty} \mid \sum_{n=-\infty}^{\infty}  x_n  < \infty \right\rangle$
$\ell^2(\mathbb{Z})$	prostor komplexních posloupností sumarizovatelných s druhou mocninou: $\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\langle (x_n)_{n=-\infty}^{\infty} \mid \sum_{n=-\infty}^{\infty}  x_n ^2 < \infty \right\rangle$
$\ell^1(\mathbb{Z}_N), \ell^2(\mathbb{Z}_N)$	prostory posloupností N-rozměrných vektorů
$L^1(\mathbb{R})$	prostor komplexních integrovatelných funkcí: $L^1(\mathbb{R}) = \left\langle f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty}  f(t)  dt < \infty \right\rangle$
$L^2(\mathbb{R})$	prostor komplexních funkcí integrovatelných s druhou mocninou: $L^2(\mathbb{R}) = \left\langle f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty}  f(t) ^2 dt < \infty \right\rangle$
FT	Fourierova transformace
DFT	diskrétní Fourierova transformace
IDFT	inverzní diskrétní Fourierova transformace
FFT	rychlá Fourierova transformace
ONB	ortonormální báze
■	značka konce důkazu

# Kapitola 1

## ÚVOD

Od počátku lidského bádání a poznávání všeho, co se děje kolem nás, je komunikace stejně důležitá jako veškeré objevy a poznání. Vzájemná komunikace koexistuje s životem a společně s ním také zanikne.

V přírodě je komunikace realizována několika způsoby. Nejčastější způsoby jsou komunikace zvuková (např. lidská řeč, zvuky zvířat), komunikace pohybem (např. dorozumívání včel, znaková řeč), komunikace elektrickými impulsy (např. mozek) či komunikace prostřednictvím elektromagnetických vln (např. netopýři tak hledají potravu a orientují se v prostoru).

Všechny tyto způsoby komunikace jsou ve svém fyzikálním principu založeny na vysílání a přijímání elektromagnetických vln s různými parametry. Řekněme tedy, že komunikace (neboli přenos informace) je realizována vysláním a následným příjmem časově proměnného signálu, který je přenášen elektromagnetickým vlněním. Je zřejmé, že samotným vysláním informace nemůže komunikace proběhnout, a že je tedy nutné signál nesoucí informaci také přijmout. Ale ani toto nestačí! Rovněž je nutné informaci ze signálu správně vyčíst. A právě z důvodu extrahování maximální možné informace se lidé snaží co možná nejpřesněji signál analyzovat.

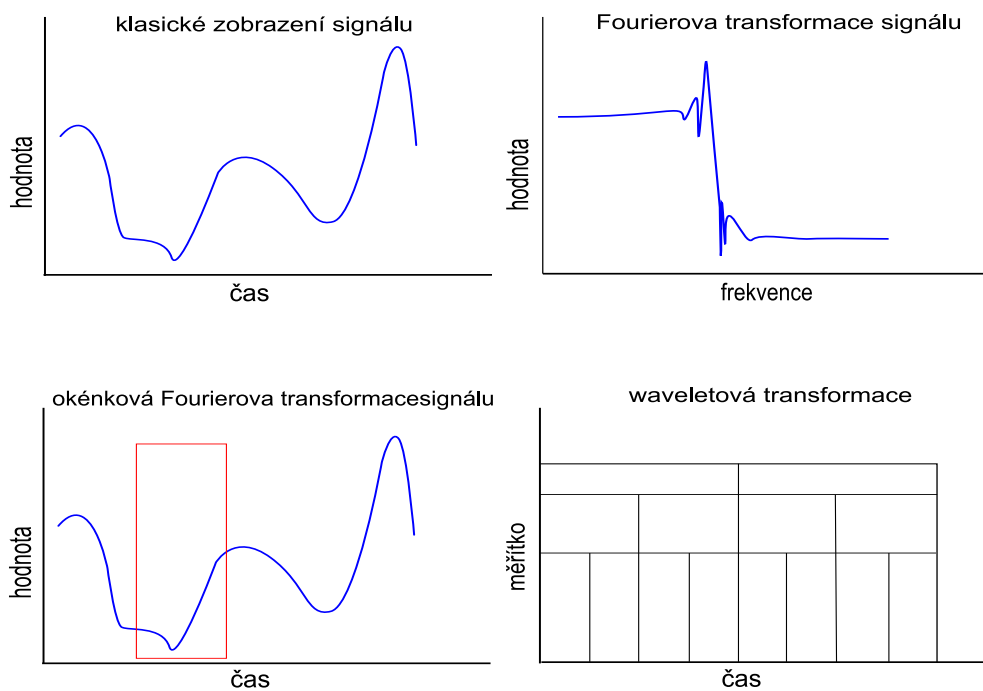
Jednu z nejpoužívanějších analýz signálu představil světu francouzský matematik a fyzik Jean Baptiste Joseph Fourier (\* 1768; † 1830) a na jeho počest byla pojmenována jako Fourierova transformace (analýza). Tato analýza transformuje signál z časové oblasti do frekvenční oblasti a jejím výsledkem je frekvenční spektrum časově proměnného signálu. Nevýhodou této transformace je ta skutečnost, že z frekvenčního spektra dobře nevyčteme časové okamžiky, ve kterých došlo k významným změnám signálu.

Důsledkem toho byl vznik tzv. Okénkové Fourierovy transformace. Pod ní je podepsaný maďarský fyzik Denis Gabor (\* 1900; † 1979), který k ní dospěl úpravou Fourierovy

transformace. Zde se signál rozdělí na stejně trvající části, z nichž každá se analyzuje Fourierovou transformací. Výsledná transformace však určuje frekvenci signálu v závislosti na poloze časového okna, ve kterém byl signál analyzován. Zde je sice výhodou to, že dostaneme frekvenční spektra jednotlivých časových okének, avšak zase nejsme schopni přizpůsobit velikost oken charakteru signálu. Je to tedy jakýsi kompromis mezi časovým a frekvenčním popisem signálu.

Dalším logickým krokem byl vznik analýzy, která zachovává časovou, frekvenční i amplitudovou informaci signálu - waveletové analýzy. Principiálně se jedná o okénkovou Fourierovu transformaci s tím rozdílem, že zde je velikost okénka proměnlivá. Velikost okénka (měřítko) určuje frekvenci, pomocí které signál analyzujeme a výsledek analýzy je funkce dvou proměnných - času a měřítka.

Všechny zmiňované analýzy signálu jsou znázorněny na obrázku 1.1.



Obrázek 1.1: Různé analýzy signálů.

Cílem mé bakalářské práce je shrnout a vysvětlit základní princip waveletové transformace takovým způsobem, aby z ní mohl čerpat poznatky kdokoliv, kdo o toto téma projeví zájem.

## 1.1 Stručný obsah jednotlivých kapitol

**Kapitola 2 : Základní pojmy** - Tato kapitola seznámí čtenáře s pojmy skalární součin a ortonormální báze. U skalárního součinu uvede i jeho vlastnosti, jichž budeme využívat v dalších kapitolách.

**Kapitola 3 : Hilbertovy prostory** - V této kapitole uvedeme, co je a jaké má vlastnosti Hilbertův prostor. Na jejich základě zformulujeme větu o nejlepší aproximaci a projekční větu. Dále zde definujeme základní ortonormální báze Hilbertových prostorů.

**Kapitola 4 : Diskrétní Fourierova transformace** - Zde se čtenář dozví, co je DFT a IDFT a jaké mají tyto transformace vlastnosti. Také se seznámí s operátory translace, rotace a konjungované reflexe, které jsou využívány v následující kapitole. Na konci této kapitoly je vysvětlen princip FFT.

**Kapitola 5 : Diskrétní waveletová báze** - Stěžejní část této bakalářské práce obsahuje popis základního principu waveletové transformace a dále detailní popis této transformace na první a na  $p$ -té úrovni. Také ukazuje, že věta o nejlepší aproximaci a projekční věta (viz. kapitola 3) jsou ve waveletové teorii velmi důležité, a že celá teorie je postavena právě na nich. Jsou zde ukázány i speciální typy waveletových filtrů.

**Kapitola 6 : Využití waveletové transformace** - Poslední kapitola seznamuje čtenáře se základním využitím waveletové transformace v praktických aplikacích a vystihuje rozdíly mezi touto a Fourierovou analýzou signálu.

# Kapitola 2

## ZÁKLADNÍ POJMY

### 2.1 Skalární součin

**Definice 2.1:** Necht  $V$  je komplexní lineární prostor. Zobrazení  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  se nazývá skalární součin, jestliže pro všechna  $u, v, w \in V$  a všechna  $\alpha \in \mathbb{C}$  platí následující podmínky:

1.  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
2.  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
3.  $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$
4.  $\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u$
5.  $\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$

**Definice 2.2:** Necht  $V$  je komplexní lineární prostor se skalárním součinem. Velikost vektoru  $u \in V$  je na něm definována takto:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Nyní řekněme, co je **periodické rozšíření vektoru**:

Vektor  $z = (z(0), z(1), \dots, z(N-1))$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , periodicky rozšířme po složkách:

$$z(j+N) = z(j) \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

na  $N$ -periodický vektor definovaný na  $\mathbb{Z}$ .

Jelikož budeme mluvit o prostoru  $l^2(\mathbb{Z}_N)$ , je potřeba specifikovat jeho skalární součin. Prostor  $l^2(\mathbb{Z}_N)$  je prostor  $N$ -rozměrných vektorů, na němž je definován skalární součin:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} u_i \bar{v}_i = u_0 \bar{v}_0 + u_1 \bar{v}_1 + \cdots + u_{N-1} \bar{v}_{N-1}.$$

**Příklad 2.1:** Skalární součin dvou vektorů  $u, v \in \ell^2(\mathbb{N})$  je definován následovně: Nechť  $u = (u_1, u_2, \dots)$ ,  $v = (v_1, v_2, \dots)$ . Pak:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \bar{v}_i = u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2 + \cdots .$$

**Poznámka:** Nekonečná řada  $\sum_{i=1}^{\infty} u_i \bar{v}_i$  je absolutně konvergentní díky předpokladu

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |v_i|^2 < \infty.$$

### 2.1.1 Vlastnosti skalárního součinu

Nechť  $u, v, w$  jsou vektory z komplexního lineárního prostoru  $V$ .

#### 1. kolmost

Vektory  $u, v$  nazveme kolmé, jestliže  $\langle u, v \rangle = 0$ . S tímto je možné zapsat Pythagorovu větu ve tvaru  $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$ , tedy pro každé dva navzájem kolmé vektory  $u, v$  platí:

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \tag{2.1}$$

#### 2. geometrická vlastnost prostoru $V$

Pro každé  $u, v \in V$ ,  $v \neq 0$ , existuje právě jedna dvojice  $(w, \lambda)$ ,  $w \in V, \lambda \in \mathbb{C}$ , taková, že:

$$u = w + \lambda v \quad a \quad w \perp v. \tag{2.2}$$

$\lambda v$  je kolmý průmět vektoru  $u$  do „paprsku“ vektoru  $v$ .

**Důkaz:** Budeme zkoumat, zda existuje jednoznačně určená dvojice  $(w, \lambda)$ ,  $w \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  s uvedenými vlastnostmi pro zadanou dvojici vektorů  $u, v$ :

Předpokládejme, že platí  $u = w + \lambda v$ , kde  $w$  a  $\lambda$  mají uvedené vlastnosti. Vztah vynásobíme skalárně vektorem  $v$ , čímž dostaneme:

$$\langle u, v \rangle = \langle w, v \rangle + \lambda \|v\|^2$$

Jelikož platí  $\langle w, v \rangle = 0$ , můžeme vypočítat  $\lambda = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}$ . Tím jsme ukázali, že existuje nejvýše jedno  $\lambda$  s uvedenými vlastnostmi a tedy i jedno  $w = u - \lambda v$ .

Nyní potřebujeme ověřit existenci rozkladu vektoru  $u$  a tedy i kolmost vektorů  $v, w$ . Položme  $\lambda = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}$  a  $w = u - \lambda v$ . S využitím  $\langle u, v \rangle = \lambda \|v\|^2$  dostaneme:

$$\langle u, v \rangle - \lambda \|v\|^2 = \langle u, v \rangle - \langle u, v \rangle = 0.$$

Kolmost je tedy splněna.

■

### 3. Cauchy-Schwarzova nerovnost

Mějme dva vektory  $u, v$ . Již víme, že  $u$  můžeme zapsat ve tvaru  $u = w + \lambda v$ , kde  $w \perp v$  a  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Porovnáme-li velikosti vektorů na obou stranách rovnice, získáme

$$\|u\|^2 = \|w\|^2 + \|\lambda v\|^2 \geq |\lambda|^2 \|v\|^2.$$

Je-li  $v \neq 0$ , musí platit  $\lambda = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}$ . Tím po úpravě dostaneme:

$$\|u\|^2 \geq \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|^2}.$$

A tedy platí:

$$\|u\| \cdot \|v\| \geq |\langle u, v \rangle|. \quad (2.3)$$

Tato nerovnost se nazývá Cauchy-Schwarzova nerovnost. Rovnost zřejmě nastává pro lineárně závislé vektory, což je právě tehdy, když  $w = 0$ . Jak vidno, v případě  $v = 0$  nastává rovnost také.

#### 4. trojúhelníková nerovnost

Pro všechna  $u, v$  platí  $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle$ .

Cauchy-Schwarzova nerovnost říká  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$  a  $|\langle v, u \rangle| \leq \|v\| \cdot \|u\|$ ,

podle čehož můžeme psát  $\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\|$  a po odmocnění:

$$\|u + v\| \leq \|v\| + \|u\| \quad (2.4)$$

#### 5. rovnoběžníkové pravidlo

$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle + \langle u - v, u - v \rangle$ , což můžeme upravovat dál:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle u, u \rangle + \langle u, -v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, -v \rangle$$

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \|v\|^2 + \|u\|^2 - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \|v\|^2$$

A konečně dostaneme tzv. rovnoběžníkové pravidlo:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \quad (2.5)$$

## 2.2 Ortonormální báze (ONB)

**Definice 2.3:** Necht'  $V$  je prostor konečné dimenze  $n$ . Systém vektorů  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$  se nazývá ortonormální báze (ONB), jestliže  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$  jsou jednotkové a navzájem kolmé vektory.

**Věta 2.1:** Každý prostor konečné dimenze má ortonormální bázi.

ONB je speciální případ báze lineární, a proto každý vektor v prostoru dimenze  $n$  lze napsat jako lineární kombinaci vektorů ONB:

$$u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Po skalárním roznásobení vektorem  $e_1$  dostáváme:

$$\langle u, e_1 \rangle = \alpha_1 \langle e_1, e_1 \rangle + \alpha_2 \langle e_2, e_1 \rangle + \dots + \alpha_n \langle e_n, e_1 \rangle,$$

kde jsou ale všechny členy až na první nulové. Upravíme :  $\langle u, e_1 \rangle = \alpha_1 \langle e_1, e_1 \rangle = \alpha_1$ , což je první souřadnice vektoru  $u$ . Bez újmy na obecnosti můžeme psát  $\langle u, e_m \rangle = \alpha_m$  a rozvoj do vektorů ONB můžeme zapsat ve tvaru:

$$u = \langle u, e_1 \rangle e_1 + \langle u, e_2 \rangle e_2 + \dots + \langle u, e_n \rangle e_n = \sum_{m=1}^n \langle u, e_m \rangle e_m \quad (2.6)$$

# Kapitola 3

## HILBERTOVY PROSTORY

Mějme prostor  $V$  se skalárním součinem a na něm definujme vzdálenost dvou bodů  $x$  a  $y$ :

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

Definujme také limitu posloupnosti: Posloupnost  $(x_n) \subset V$  má limitu  $x \in V$  právě tehdy, když  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0$ .

**Definice 3.1:** Necht'  $f$  je zobrazení  $f : V_1 \rightarrow V_2$ , kde  $V_1, V_2$  jsou prostory se skalárním součinem. Toto zobrazení nazveme spojité, jestliže platí:

$$\text{Jestliže } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ na } V_1, \text{ pak } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) \text{ na } V_2.$$

Skalární součin i norma (velikost) vektoru jsou spojité. Kdykoliv  $x_n \rightarrow x$  a  $y_n \rightarrow y$ , pak platí:

$$\begin{aligned} \langle x_n, y_n \rangle &\rightarrow \langle x, y \rangle, \\ \|x_n\| &\rightarrow \|x\|. \end{aligned}$$

**Definice 3.2:** Posloupnost  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq V$  se nazývá cauchyovská, jestliže platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n, m \geq n_0 \quad : \quad \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

**Poznámka:** Pokud má posloupnost limitu, pak je cauchyovská. Opačně to však platit nemusí! (viz. příklad 3.1)

**Definice 3.3:** Prostor se skalárním součinem se nazývá Hilbertův (úplný) prostor, jestliže každá cauchyovská posloupnost v něm má limitu.

**Příklad 3.1:** Mějme prostor  $V \subset \ell^2(\mathbb{N})$  vektorů s konečně mnoha nenulovými složkami. Ukážeme, že tento prostor není Hilbertův.

Uvažujme posloupnost

$$\begin{aligned} x_1 &= (a_1, 0, 0, 0, \dots) \\ x_2 &= (a_1, a_2, 0, 0, \dots) \\ x_3 &= (a_1, a_2, a_3, 0, \dots) \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

takovou, že  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$  a  $a_n > 0$ ,  $\forall n$ . Ověříme, že  $(x_n)$  je cauchyovská posloupnost. Vezměme prvky  $x_n, x_m$ ,  $m \geq n$ . Druhá mocnina velikosti jejich rozdílu je  $a_n^2 + a_{n+1}^2 + \dots + a_m^2$ . Pro tento součet platí:  $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=n}^m a_i^2 \right) = 0$ , čili pro každé  $\epsilon > 0$  existuje  $n_0$  takové, že  $\|x_m - x_n\| < \epsilon$  pro všechna  $m, n \geq n_0$ . Posloupnost  $(x_n)$  je tedy cauchyovská.

Kdyby  $(x_n)$  měla limitu  $x$ , pak musí platit, že  $x = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots)$  (Jelikož kdyby  $x_n \rightarrow x$ , pak  $\langle x_n, e_j \rangle \rightarrow \langle x, e_j \rangle$ , kde  $\langle x_n, e_j \rangle = a_j$  pro  $n$  dostatečně velké.). Tento vektor ale nemá konečně mnoho nenulových složek, což znamená, že neleží v prostoru  $V$ . Prostor  $V$  není Hilbertův.

**Definice 3.4:** Prostor  $M$  v prostoru  $V$  je uzavřený, jestliže platí:

$$\text{kdykoliv } x_n \rightarrow x \text{ a } (x_n) \subseteq M, \text{ tak } x \in M.$$

Zavedme takovéto označení:

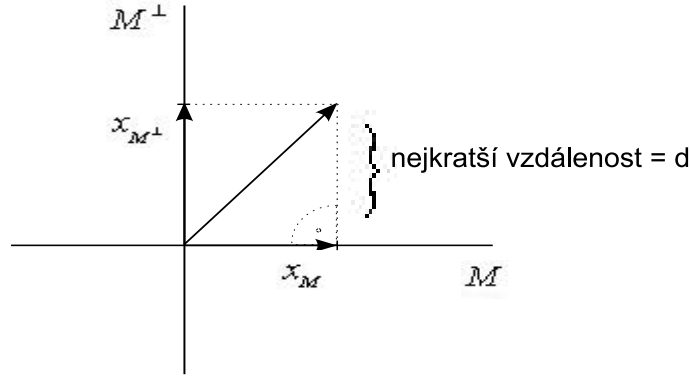
$H$  - Hilbertův prostor

$M \subset H$  - uzavřený podprostor

$M^\perp$  - prostor kolmých prvků:  $M^\perp = \{x \in H \mid \langle x, y \rangle = 0 \forall y \in M\}$

Zformulujeme větu o nejlepší aproximaci, která se v teorii waveletů ukáže jako zásadní.

**Věta 3.1:** (Věta o nejlepší aproximaci) Nechť  $M$  je uzavřený podprostor prostoru  $H$ . Pak pro každé  $x \in H$  existuje právě jeden prvek  $x_M \in M$  takový, že  $\|x - x_M\| \leq \|x - y\|$  pro všechna  $y \in M$ .



Obrázek 3.1: Rozklad vektoru do kolmých prostorů

**Důkaz:** Zaved'me  $d = \inf\{\|x - y\|, y \in M\}$ . To existuje, jelikož daná množina je omezená zdola. Existuje tedy posloupnost  $(y_n) \subseteq M$  taková, že  $\|x - y_n\| \rightarrow d$  pro  $n \rightarrow \infty$ . Vezměme vektory  $x - y_n, x - y_m$  a aplikujme na ně rovnoběžníkové pravidlo:

$$\begin{aligned} \|2x - y_n - y_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 &= 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2, \\ \|y_n - y_m\|^2 &= 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - \|2x - y_n - y_m\|^2. \end{aligned}$$

Jelikož  $\frac{y_n + y_m}{2} \in M$ , platí nerovnost:

$$\|2x - y_n - y_m\|^2 = 4\|x - \frac{1}{2}y_n - \frac{1}{2}y_m\|^2 = 4\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\|^2 \geq 4d^2.$$

Na základě toho:

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4d^2.$$

A jelikož:  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} (2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4d^2) = 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$ ,

dostaneme limitním přechodem z předchozí nerovnosti:

$$0 \leq \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|y_n - y_m\|^2 \leq 0 \Rightarrow \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|y_n - y_m\|^2 = 0.$$

Tím jsme dokázali, že prvek  $x_M$  existuje. Musíme ale ještě dokázat, že existuje právě jeden. Předpokládejme, že  $x_{1M}, x_{2M} \in M$  jsou nejlepší aproximace  $x$ . Aplikujme na ně také rovnoběžníkové pravidlo:

$$\|x_{1M} - x_{2M}\|^2 = 2\|x - x_{1M}\|^2 + 2\|x - x_{2M}\|^2 - \|2x - x_{1M} - x_{2M}\|^2.$$

Jelikož jsou oba prvky nejlepšími aproximacemi, platí:

$$\|x_{1M} - x_{2M}\|^2 \leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0$$

Nutně tedy platí  $\|x_{1M} - x_{2M}\|^2 = 0$ . To ale znamená, že prvky  $x_{1M}, x_{2M}$  jsou totožné a tedy prvek  $x_M$  existuje právě jeden.

■

**Věta 3.2:** *Nechť  $M$  je uzavřený podprostor prostoru  $H$  a  $x \in H$ . Potom  $x_M \in M$  je nejbližší bod k bodu  $x$  z prostoru  $H$  právě tehdy, když  $(x - x_M) \perp M$ .*

**Důkaz:** Volme  $a \in M$ . Podle (2.2) víme, že platí  $x - x_M = \lambda a + z$ ,  $z \perp a$ . Snažíme se ukázat, že  $\lambda a = 0$ . Využijeme zde Pythagorovy věty:

$$\|x - x_M\|^2 = \|\lambda a\|^2 + \|z\|^2$$

Odtud: 
$$\|x - x_M\|^2 \leq \|x - (x_M + \lambda a)\|^2 = \|z\|^2 \leq \|x - x_M\|^2$$

První nerovnost platí, jelikož  $x_M + \lambda a \in M$  a protože dle vlastnosti nejlepší aproximace je  $\|x - x_M\| \leq \|x - x_M - \lambda a\|$ . Druhá nerovnost platí díky Pythagorově větě. Dostali jsme nerovnost, kde jsou obě strany stejné, tudíž všechny členy, přes které jsme v nerovnosti prošli, jsou stejné a tedy můžeme psát rovnost  $\|z\|^2 = \|x - x_M\|^2$ , z čehož vyplývá  $\lambda a = 0$  a  $z = x - x_M$ . Vzhledem k tomu, že  $(x - x_M) \perp a$  a  $a \in M$  můžeme zvolit libovolně, dostáváme  $(x - x_M) \perp M$ .

■

**Věta 3.3:** *(Projekční věta)  $H = M \oplus M^\perp$ , neboli: každý prvek  $x$  prostoru  $H$  se dá jednoznačně vyjádřit jako  $x = x_M + x_{M^\perp}$ .*

Ortogonální projekce prostoru  $H$  na uzavřený podprostor  $M$  je zobrazení  $P : x \rightarrow x_M$ . Pro každé  $x \in M$  platí:

1.  $P$  je lineární
2.  $P^2 = P$
3.  $\|P(x)\| \leq \|x\|$

Důkazy všech bodů jsou zřejmé.

**Důsledky projekční věty:**

1. Jestliže  $M \subset H$ , kde  $M$  je uzavřený podprostor prostoru  $H$  a  $M \neq H$ , pak platí:  $M^\perp \neq \{0\}$ .

**Důkaz:** Jelikož  $M \neq H$ , pak  $\exists x \notin M$ . Dle věty 3.3 platí  $x = x_M + x_{M^\perp}$ , kde  $x_{M^\perp} \neq 0$ . Potom ale nutně musí platit  $x_{M^\perp} \in M^\perp \neq \{0\}$ .

■

2. Zvolme  $A \subset H$  podmnožinu prostoru  $H$  a označme  $[A]$  nejmenší uzavřený podprostor obsahující  $A$ . Potom platí:  $[A] = (A^\perp)^\perp = A^{\perp\perp}$  (pozn.  $A$  nemusí být uzavřená množina, ale  $A^{\perp\perp}$  už je.  $A^{\perp\perp}$  je dokonce i uzavřený prostor.).

**Důkaz:**  $A \subset A^{\perp\perp}$ , z čehož  $[A] \subseteq A^{\perp\perp}$ . Jestliže by  $[A] \not\subseteq A^{\perp\perp}$ , pak  $\exists x \in A^{\perp\perp} \neq \{0\}$  takové, že  $x \perp [A]$ . To by ale znamenalo, že  $x \perp A$  a současně  $x \in A^{\perp\perp}$ . Tedy  $x \in A^\perp \cap A^{\perp\perp} = \{0\}$ , což je ale spor s nenulovostí prvku  $x$ .

■

### 3.1 Ortonormání báze Hilbertova prostoru

Ortonormální množina je množina jednotkových, navzájem kolmých vektorů.

**Definice 3.5:** Ortonormální množina  $A \subset H$  se nazývá ortonormální báze (dále jen ONB) prostoru  $H$ , jestliže  $[A] = H$ . Tento systém se nedá rozšířit, a proto platí, že kdykoliv je  $x \perp A$ , pak nutně  $x = 0$ .

**Věta 3.4:** Každý Hilbertův prostor má ONB. Všechny ONB daného prostoru mají stejnou mohutnost. Každá ortonormální množina se dá rozšířit na ONB.

**Definice 3.6:** Hilbertův prostor je separabilní, má-li spočetnou ONB. Jsou to například prostory  $\ell^2$  a  $L^2$ .

**Věta 3.5:** Mějme  $H$  separabilní Hilbertův prostor, jehož ONB je  $(x_n)_{n=1}^\infty$ . Pak pro každé  $x \in H$  platí: 
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$$

**Důkaz:** Pro každý vektor  $x \in H$  platí:

$$\sum_{n=1}^N |\langle x, x_n \rangle|^2 = \|x_{\text{lin}(x_1, \dots, x_N)}\|^2 \leq \|x\|^2.$$

Index prostředního členu říká, že se jedná o projekci vektoru  $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$  na lineární obal množiny  $\{x_1, \dots, x_N\}$ .

Tedy částečný součet řady tvoří rostoucí posloupnost zhora omezenou  $\|x\|^2$ . Tato posloupnost má vlastní limitu a tedy platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 < \infty.$$

Uvažujme nyní posloupnost  $(x_N)_{N=1}^{\infty}$ , kde  $x_N = \sum_{n=1}^N \langle x, x_n \rangle x_n$ . Pro  $N \leq M$  platí:

$$\|x_N - x_M\|^2 = \sum_{n=N+1}^M |\langle x, x_n \rangle|^2.$$

Díky konvergenci číselné řady  $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$  tedy vidíme, že pro  $N, M \rightarrow \infty$  platí:

$$\|x_N - x_M\|^2 = \sum_{n=N+1}^M |\langle x, x_n \rangle|^2 \rightarrow 0.$$

Posloupnost  $(x_N)_{N=1}^{\infty}$  je tedy cauchyovská a má limitu  $x'$ , pro kterou platí:

$$x' = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n.$$

Nyní platí:

$$\langle x' - x, x_n \rangle = 0 \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad (x' - x) \perp H \quad \Rightarrow \quad x' = x.$$

■

**Věta 3.6:** (Parsevalova rovnost) Je-li  $(x_n)$  ONB, pak platí:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2, \quad \text{pro všechna } x \in H.$$

### 3.1.1 Základní ortonormální báze

#### 1. Standardní (Euklidova) báze.

Zavedme funkci  $\delta_{k,j}$ :

$$\delta_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{pro } k = j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Pak standardní báze komplexního prostoru  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  je množina vektorů  $\varepsilon = \{e_0, e_1, \dots, e_{N-1}\}$ ,  $e_k \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , definovaná předpisem:

$$e_k(j) = \delta_{k,j}, \quad k, j = 0, \dots, N-1.$$

2. **Exponenciální báze** je ortonormální báze  $E = \{E_0, \dots, E_{N-1}\}$ ,  $E_m \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , definovaná předpisem:

$$E_m(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi jmn/N}, \quad m, n = 0, \dots, N-1$$

Každou souřadnici vektoru  $z$  vůči bázi  $\{E_m\}$  lze vyjádřit dle věty 3.5. Platí:

$$\langle z, E_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi jmn/N}, \quad m = 0, \dots, N-1$$

3. **Fourierova báze** je ortogonální báze  $F = \{F_0, \dots, F_{N-1}\}$ ,  $F_m \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , definovaná předpisem:

$$F_m(n) = \frac{1}{N} e^{2\pi jmn/N}, \quad m, n = 0, \dots, N-1$$

**Poznámka:** Ortogonální báze je lineární báze složená z ortogonálních vektorů. Ortogonální vektory jsou na sebe navzájem kolmé, ale nemusí mít velikost 1 jako vektory ortonormální.

Vektor  $z$  zapsaný v exponenciální bázi přepíšeme do Fourierovy báze:

$$z = \sum_m \langle z, E_m \rangle E_m = \sum_m \langle z, \sqrt{N} F_m \rangle \sqrt{N} F_m = N \sum_m \langle z, F_m \rangle F_m$$

Pro koeficienty  $(\alpha_m)$  vektoru  $z$  ve Fourierově bázi platí:

$$\alpha_m = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi jmn/N}, \quad m = 0, \dots, N-1.$$

# Kapitola 4

## DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE (DFT)

V této kapitole uvedeme základní pojmy, označení a vlastnosti DFT, její inverze IDFT a základní princip rychlé Fourierovy transformace FFT v prostorech  $l^2(\mathbb{Z}_N)$  a  $l^2(\mathbb{Z})$ .

Jelikož jsou DFT na obou těchto prostorech velice podobné až analogické, uvedu zde pouze DFT pro prostor  $l^2(\mathbb{Z}_N)$ .

**Definice 4.1:** Diskrétní Fourierova transformace vektoru  $z = (z(0), z(1), \dots, z(N-1))$ ,  $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$  je vektor  $\hat{z} \in l^2(\mathbb{Z}_N)$  daný vztahem:

$$\hat{z}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(n) e^{-2\pi jmn/N}, \quad m = 0, \dots, N-1. \quad (4.1)$$

**Věta 4.1:** Pro libovolné  $z, w \in l^2(\mathbb{Z}_N)$  platí:

1. *Fourierova inverzní formule*

$$z = \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) F_m = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{z}(m) e^{2\pi jmn/N},$$

kde  $\{F_m\}$  je Fourierova báze.

2. *Parsevalova rovnost*

$$\langle z, w \rangle = \frac{1}{N} \langle \hat{z}, \hat{w} \rangle.$$

3. *Plancherelova formule*

$$\|z\|^2 = \frac{1}{N} \|\hat{z}\|^2.$$

**Definice 4.2:** Inverzní diskretní Fourierova transformace (IDFT) vektoru  $w \in l^2(\mathbb{Z}_N)$  je vektor  $\check{w} \in l^2(\mathbb{Z}_N)$  definovaný po složkách předpisem:

$$\check{w}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} w(m) e^{2\pi jmn/N}, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (4.2)$$

## 4.1 Vlastnosti DFT a IDFT

1. Fourierova transformace je lineární zobrazení.
2. Zobrazení DFT a IDFT jsou vzájemně jednoznačná zobrazení prostoru  $l^2(\mathbb{Z}_N)$  na sebe a také navzájem inverzní. Symbolicky tedy můžeme napsat:  $DFT^{-1} = IDFT$  a naopak.
3. Obraz funkce posunutý o  $d$ :

$$z(n-d) \cong e^{-jmd} \cdot \hat{z}(m).$$

4. Obraz funkce se změněným měřítkem:

$$z(a \cdot n) \cong \frac{1}{|a|} \cdot \hat{z}\left(\frac{m}{a}\right), \quad a \neq 0.$$

5. Obraz konjugované reflexe (viz. definice 4.5):

$$\overline{z(-n)} \cong \overline{\hat{z}(m)}.$$

6. Funkce, pro kterou dojde k posunu obrazu:

$$e^{jnd} z(n) \cong \hat{z}(m-d).$$

7. Pro každé periodické rozšíření vektoru  $z \in l^2(\mathbb{Z}_N)$  je  $\check{z}(n) = \frac{1}{N} \hat{z}(-n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

8. Pro každé  $z, w \in l^2(\mathbb{Z}_N)$  platí  $\langle \check{z}, \check{w} \rangle = \frac{1}{N} \langle z, w \rangle$ .

## 4.2 Operátor translace, rotace a konjugované reflexe

V DFT patří translace (posunutí) a konvoluce k základním operacím. Mějme vektor  $(z(n))$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , který vznikl periodickým rozšířením vektoru  $(z(n))$ ,  $n = 0, \dots, N - 1$ .

**Definice 4.3:** Necht'  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Definujme operátor **translace**  $R_k : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  předpisem:

$$(R_k z)(n) = z(n - k) \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4.3)$$

Translace je lineární zobrazení.

**Definice 4.4:** Necht'  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Definujme operaci **konvoluce**  $*$  předpisem:

$$(z * w)(m) = \sum_{n=0}^{N-1} z(m - n)w(n) \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (4.4)$$

**Definice 4.5:** Necht'  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Definujme operátor **konjugované reflexe** předpisem:

$$\tilde{z}(m) = \overline{z(-m)} = \overline{z(N - m)} \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (4.5)$$

Následující věta shrnuje základní vlastnosti konvoluce:

**Věta 4.2:**

1. konvoluce je zobrazení do  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ :  $z * w \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$
2. konvoluce je komutativní:  $z * w = w * z$
3. konvoluce je asociativní:  $(x * z) * w = x * (z * w)$
4.  $w * \delta = w$ , kde  $\delta = \delta_{0,m}$ , viz. vztah (3.1)
5.  $z * w(k) = \langle z, R_k \tilde{w} \rangle$
6.  $z * \tilde{w}(k) = \langle z, R_k w \rangle$

Vlastností 5 a 6 využijeme při vyjádření vektoru ve waveletové bázi v kapitole 5.

### 4.3 Rychlá Fourierova transformace (FFT)

Počítáme-li, nebo přesněji, počítá-li počítač DFT nějaké dlouhé posloupnosti nasnímaných hodnot, např. signálu, je kvůli komplexním násobením potřeba velká operační paměť. Lidská snaha zmenšit paměťovou i časovou náročnost výpočtu DFT vedla ke zkoumání DFT a výsledkem je rychlá Fourierova transformace (FFT). Ta dosahuje stejného výsledku, přičemž snižuje počet komplexních násobení během výpočtu, což má za následek razantní zkrácení výpočetního procesu (odtud název rychlá).

Základním principem FFT je rozdělení posloupnosti vzorků na dvě posloupnosti, z nichž jedna obsahuje všechny liché prvky a druhá všechny sudé. Aby posloupnosti měly stejnou velikost, musí být počet všech prvků sudý, tedy  $N = 2M_1$ . Aby ovšem mohl být proces použit iteračně, musí být i  $M_1 = 2M_2$ , což ve výsledku znamená, že se snažíme mít  $N = 2^p, p \in \mathbb{N}$  prvků.

$$\begin{aligned}\hat{z}(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n)e^{-2\pi jmn/N} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} z(2n)e^{-2\pi j(2n)m/N} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} z(2n+1)e^{-2\pi j(2n+1)m/N} = \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} z(2n)e^{-2\pi jnm/\frac{N}{2}} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} z(2n+1)e^{-2\pi jnm/\frac{N}{2}} e^{-2\pi jm/N}.\end{aligned}$$

Označme  $u(n)$  posloupnost všech sudých prvků a  $v(n)$  posloupnost všech lichých prvků. Platí tedy  $u(n) = z(2n)$  a  $v(n) = z(2n+1)$  pro  $n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$ . Jelikož velikosti obou posloupností jsou stejné a jsou rovny  $\frac{N}{2}$ , sumy ve vztahu jsou DFT jednotlivých posloupností  $u, v$ .

$$\hat{z}(m) = \hat{u}(m) + e^{-2\pi jm/N} \hat{v}(m), \quad m = 0, \dots, N-1. \quad (4.6)$$

Podívejme se, co se stane, když za  $m$  dosadíme  $m = \frac{N}{2} + l$ ,  $l = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$ . Dosazením do vztahu pro DFT a podobnými úpravami jako výše dostaneme:

$$\hat{z}\left(l + \frac{N}{2}\right) = \hat{u}(l) - e^{-2\pi jl/N} \hat{v}(l). \quad (4.7)$$

Zde je vidět, že u komplexní exponenciály není potřeba počítat všechny hodnoty, ale jen polovinu a pro druhou polovinu stačí pouze změnit znaménko druhého sčítance. Tím se výpočet ještě zrychlí.

Kdybychom používali pouze DFT, potřebovali bychom na výpočet obrazu funkce délky  $N$  nejvýše  $N^2$  komplexních násobení. Při iterativním použití FFT je ale potřeba nejvýše  $\frac{N}{2} \cdot \log_2 N$  komplexních násobení (odůvodnění v literatuře [3]). Pro  $N = 4$  je u DFT potřeba 16 komplexních násobení a u FFT jen 4. U počtu  $N = 16$  už je rozdíl markantnější. Pro DFT 256 a pro FFT pouze 32 komplexních násobení. V dnešní době počítačů a snímání tisíců vzorků signálu za sekundu znamená FFT obrovskou úsporu času.

# Kapitola 5

## DISKRÉTNÍ WAVELETOVÁ BÁZE

V této kapitole nejprve vysvětlíme základní myšlenku waveletové transformace a následně ukážeme konstrukci obecné waveletové báze na první a na  $p$ -té úrovni.

### 5.1 Základní princip

Waveletová transformace vektoru  $z$  se skládá ze dvou fází: první fází je analýza (rozklad) a druhou fází je syntéza (rekonstrukce). Analýzou vektoru  $z$  rozumíme výpočet aproximací a detailů vektoru  $z$  pomocí waveletových filtrů. Generování původního vektoru  $z$  těchto hodnot budeme nazývat syntézou. Kompresi dat spočívá v tom, že se zanedbají malé hodnoty detailů a položí se rovny nule.

Základní myšlenka waveletové transformace je reprezentace vektoru  $z$  dvěma vektory: vektorem aproximací a vektorem detailů (např. aritmetické průměry a difference dvou sousedních složek vektoru  $z$ , jak to využívá Haar, viz. podkapitola 5.4.1). Analýza vektoru je vlastně jeho projekcí do dvou navzájem kolmých prostorů, prostoru aproximací a prostoru detailů.

Nahradíme-li vektor  $z$  vektorem aproximací a vektorem detailů, oba s poloviční délkou vektoru  $z$ , mluvíme o waveletové transformaci první úrovně. Budeme-li stejným způsobem iterativně reprezentovat vektory aproximací, mluvíme o waveletové transformaci na  $p$ -té úrovni. Jestliže vektor  $z$  má délku  $N$ , dostaneme na konci takovéto analýzy několik vektorů detailů o délkách  $\frac{N}{2}, \frac{N}{4}, \dots, \frac{N}{2^p}$ , kde  $p$  je úroveň waveletové analýzy, a jediný

vektor aproximací o délce  $\frac{N}{2^p}$ .

Nechť  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ :

- Označme prostor aproximací  $k$ -té úrovně  $V_k$  a prostor detailů  $k$ -té úrovně  $W_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ .
- Označme  $u, v$  takové vektory, jejichž sudé posuny tvoří báze systémů prostorů  $V_1, W_1$ .

Vektor  $u$  se nazývá **otcovský wavelet** (zkráceně filtr) a vektor  $v$  se nazývá **mateřský wavelet** (zkráceně wavelet).

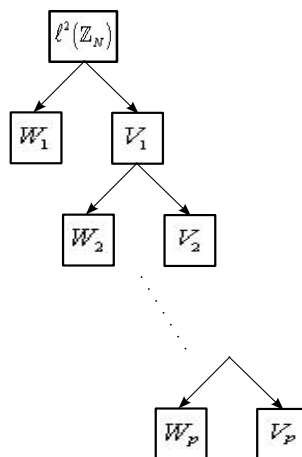
Uvažovanou reprezentaci vektoru aproximacemi a detaily a použitím reprezentace na vektory aproximací můžeme psát:

$$\ell^2(\mathbb{Z}_N) = V_1 \oplus W_1 \quad - \text{reprezentace vektoru } z$$

$$V_1 = V_2 \oplus W_2 \quad - \text{reprezentace vektoru aproximací}$$

Iterativním sloučením těchto dvou vztahů (viz. obrázek 5.1) vyjádříme  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  jako direktivní součet:

$$\ell^2(\mathbb{Z}_N) = V_p \oplus W_p \oplus W_{p-1} \oplus \dots \oplus W_1.$$



Obrázek 5.1: Rozklad prostoru na prostory detailů a aproximací

## 5.2 Wavelety na první úrovni

**Definice 5.1:** Necht'  $N = 2M$ ,  $M \in \mathbb{N}$ ,  $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Necht' množina  $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$  je ONB v  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Takovou množinu nazveme waveletovou bází na první úrovni pro  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Vektory  $u, v$  jsou jejími generátory.

Následující věta dává nutnou a postačující podmínku k tomu, aby vektory  $u, v$  generovaly waveletovou bází.

**Věta 5.1:** Necht'  $N = 2M$ ,  $M \in \mathbb{N}$ ,  $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Pak  $B = \{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$  je ortonormální báze pro  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  právě tehdy, když matice  $A(n)$ :

$$A(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \hat{u}(n) & \hat{v}(n) \\ \hat{u}(n+M) & \hat{v}(n+M) \end{bmatrix}$$

je unitární pro každé  $n = 0, \dots, M-1$ , tzn. pro všechna  $n = 0, \dots, M-1$  platí:

$$|\hat{u}(n)|^2 + |\hat{u}(n+M)|^2 = 2, \quad (5.1)$$

$$|\hat{v}(n)|^2 + |\hat{v}(n+M)|^2 = 2, \quad (5.2)$$

$$\hat{u}(n)\overline{\hat{v}(n)} + \hat{u}(n+M)\overline{\hat{v}(n+M)} = 0. \quad (5.3)$$

**Důkaz:** Nejprve uved' me skutečnost, že  $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1}$  je ortonormální množina právě tehdy, když  $\langle u, R_{2k}u \rangle = \delta_{k,0}$ .

Parsevalova rovnost říká  $\langle u, R_{2k}u \rangle = \frac{1}{N} \langle \hat{u}, \hat{R}_{2k}u \rangle$ . Připomeňme, že platí:

$$\hat{R}_{2k}u(m) = e^{-2\pi j \frac{mk}{N/2}} \hat{u}(m).$$

Postupnými úpravami dostaneme:

$$\langle u, R_{2k}u \rangle = \frac{1}{N} \langle \hat{u}, \hat{R}_{2k}u \rangle = \frac{1}{N} \langle \hat{u}, e^{-2\pi j \frac{mk}{N/2}} \hat{u} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |\hat{u}(m)|^2 e^{2\pi j \frac{mk}{M}}.$$

Sumu rozdělíme podle indexů na poloviny a využijeme periodičnosti exponenciální funkce:

$$\langle u, R_{2k}u \rangle = \frac{1}{2M} \sum_{m=0}^{M-1} (|\hat{u}(m)|^2 + |\hat{u}(m+M)|^2) e^{2\pi j \frac{mk}{M}} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{|\hat{u}(m)|^2 + |\hat{u}(m+M)|^2}{2} e^{2\pi j \frac{mk}{M}}.$$

Pravou stranu můžeme chápat jako inverzní Fourierovu transformaci  $M$ -rozměrného vektoru

$$\left( \frac{|\hat{u}(m)|^2 + |\hat{u}(m+M)|^2}{2} \right)_{m=0}^{M-1}$$

vyčíslenou v bodě  $k$ . To znamená, že vektor  $\left(\frac{|\hat{u}(m)|^2 + |\hat{u}(m+M)|^2}{2}\right)_{m=0}^{M-1}$  je DFT vektoru  $(\langle u, R_{2k}u \rangle)_{m=0}^{M-1}$ .

Vidíme tedy, že  $\langle u, R_{2k}u \rangle = \delta_{k,0}$ ,  $k = 0, \dots, M-1$  právě tehdy, když je vektor  $\left(\frac{|\hat{u}(m)|^2 + |\hat{u}(m+M)|^2}{2}\right)_{m=0}^{M-1}$  DFT obrazem posloupnosti  $(1, 0, 0, \dots, 0)$ .

Jelikož DFT obrazem posloupnosti  $(1, 0, 0, \dots, 0)$  je vektor  $(1, 1, 1, \dots, 1)$ , platí

$$\frac{|\hat{u}(m)|^2 + |\hat{u}(m+M)|^2}{2} = 1$$

pro každé  $m = 0, \dots, M-1$ . Pro vektor  $v$  je výsledek analogický a tedy je dokázáno, že (5.1) a (5.2) platí právě tehdy, když sudé posuny vektorů  $u, v$  jsou ortogonální a jednotkové.

Všimněme si dále, že:

$$\langle R_{2l}u, R_{2k}v \rangle = 0, \quad \forall l, k \text{ právě tehdy, když } 0 = \langle u, R_{2k}v \rangle \quad \forall k.$$

Podobně jako výše platí:

$$0 = \langle u, R_{2k}v \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{u}(m) \overline{\hat{v}(m)} e^{2\pi j \frac{mk}{N/2}} = \frac{1}{2M} \sum_{m=0}^{M-1} (\hat{u}(m) \overline{\hat{v}(m)} + \hat{u}(m+M) \overline{\hat{v}(m+M)}) e^{2\pi j \frac{mk}{M}}$$

pro každé  $k = 0, \dots, M-1$  a tedy vektor  $\left(\frac{\hat{u}(m) \overline{\hat{v}(m)} + \hat{u}(m+M) \overline{\hat{v}(m+M)}}{2}\right)_{m=0}^{M-1}$  je DFT vektoru  $(\langle u, R_{2k}v \rangle)_{m=0}^{M-1}$ .

Vidíme tedy, že

$$\langle u, R_{2k}v \rangle = 0 \quad \forall k \Leftrightarrow \hat{u}(m) \overline{\hat{v}(m)} + \hat{u}(m+M) \overline{\hat{v}(m+M)} = 0.$$

■

Další větou se zaměříme na konstrukci waveletové báze na první úrovni na základě znalosti vektoru  $u \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ .

**Věta 5.2:** *Nechť  $u \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  je takový vektor, že množina  $\{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1}$ ,  $N = 2M$  je ortonormální. Sestrojme vektor  $v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  :  $v(k) = (-1)^k \overline{u(1-k)}$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ . Pak  $B = \{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$  je waveletová báze  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  na první úrovni.*

**Důkaz:** Důkaz provedeme tak, že ověříme unitárnost matice  $A(n)$ .

Vektor  $v(n) = (-1)^n \overline{u(1-n)}$  dosadíme do Fourierovy transformace vektoru  $v$ :

$$\hat{v}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} v(n) e^{-2\pi j mn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \overline{u(1-n)} e^{-2\pi j mn/N} =$$

Provedeme substituci  $k = 1 - n$ :

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \overline{u(k)} (-1)^{1-k} e^{-2\pi j m (1-k)/N} =$$

Část nezávislou na  $k$  dáme před součet a využijeme rovnosti  $e^{-j\pi} = -1$ :

$$= -e^{-2\pi j m/N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{u(k)} e^{jk\pi} e^{2\pi j m k/N} = -e^{-2\pi j m/N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{u(k)} e^{-2\pi j (m+M)k/N}.$$

Po úpravě tedy:

$$\hat{v}(m) = -e^{-2\pi j m/N} \overline{\hat{u}(m+M)}.$$

Analogicky s tímto dostaneme vztah:

$$\hat{v}(m+M) = -e^{-2\pi j (m+M)/N} \overline{\hat{u}(m+2M)} = e^{-2\pi j m/N} \overline{\hat{u}(m)}$$

Zbývá už jen ověřit (5.2) a (5.3) na základě (5.1). Jelikož komplexní exponenciála leží na jednotkovém kruhu, je to komplexní jednotka a tedy nemá na velikost žádný vliv. Vektor  $u$  je tedy jednotkový a platí:

$$|\hat{v}(m)|^2 + |\hat{v}(m+M)|^2 = |\hat{u}(m+M)|^2 + |\hat{u}(m)|^2 = 2,$$

$$\hat{u}(m) \overline{\hat{v}(m)} + \hat{u}(m+M) \overline{\hat{v}(m+M)} = -\hat{u}(m) e^{-2\pi j m/N} \hat{u}(m+M) + \hat{u}(m+M) e^{-2\pi j m/N} \hat{u}(m) = 0.$$

Tím je důkaz hotov.

■

Mějme tedy  $B = \{R_{2k}u\}_{k=0}^{M-1} \cup \{R_{2k}v\}_{k=0}^{M-1}$  waveletovou bázi na první úrovni. Koeficienty rozvoje vektoru  $z$  vůči bázi  $B$  jsou dány skalárními součiny s bázeovými prvky. Využitím vlastnosti konvoluce  $\langle z, R_{2k}u \rangle = z * \tilde{u}(2k)$  dostaneme vektor  $z$  v bázi  $B$ :

$$[z]_B = [z * \tilde{u}(0), z * \tilde{u}(2), \dots, z * \tilde{u}(N-2), z * \tilde{v}(0), z * \tilde{v}(2), \dots, z * \tilde{v}(N-2)].$$

Definujme operátory filtrace  $D$  (downsampling) a rozšíření  $U$  (upsampling), pomocí nichž vyjádříme vektor  $[z]_B$ .

**Definice 5.2:** Nechtě  $N = 2M$ .

Definujme operátor  $D : \ell^2(\mathbb{Z}_N) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_M)$ ,  $D(z)(n) = z(2n)$  pro  $n = 0, \dots, M-1$ ,  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  a operátor  $U : \ell^2(\mathbb{Z}_M) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ ,  $U(w)(n) = w(n/2)$  pro  $n$  sudé a 0 pro  $n$  liché,  $w \in \ell^2(\mathbb{Z}_M)$ .

Pro operátory  $D, U$  a vektor  $z(n) \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  platí:

$$\begin{aligned} D(U(z)) &= z \\ U(D(z)) &= \frac{1}{2}(z + z^*), \end{aligned}$$

kde  $z^*(n) = (-1)^n z(n)$ .

Zavedme  $x_1 = D(z * \tilde{u})$ ,  $y_1 = D(z * \tilde{v})$ . Nutně  $x_1, y_1 \in \ell^2(\mathbb{Z}_M)$ . Pak můžeme psát:

$$[z]_B = [D(z * \tilde{u}), D(z * \tilde{v})] = [x_1, y_1].$$

Zde je patrná reprezentace původního vektoru  $z$  pomocí vektoru aproximací  $u$  a vektoru detailů  $v$ , jak jsme zmiňovali na začátku kapitoly.

Až doteď jsme se zabývali analýzou vektoru  $z$  pomocí waveletových filtrů  $u, v$  na první úrovni. Nyní budeme původní vektor  $z$  rekonstruovat pomocí vektorů  $x_1, y_1$ .

**Věta 5.3:** *Nechť  $M \in \mathbb{N}$ ,  $N = 2M$  a  $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  jsou generátory waveletové báze prostoru  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Nechť  $D(z * \tilde{u}) = x_1 \in \ell^2(\mathbb{Z}_M)$ ,  $D(z * \tilde{v}) = y_1 \in \ell^2(\mathbb{Z}_M)$ . Pak platí:*

$$u * U(x_1) + v * U(y_1) = z, \quad \forall z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N). \quad (5.4)$$

**Důkaz:** Důkaz provedeme dosazením a rozepsáním konvoluce. Rozepíšeme zde pouze první sčítanec vztahu (5.4), protože druhá polovina je analogická.

$$u * U(x_1) = (u(0), u(1), \dots, u(N-1)) * ((z * \tilde{u})(0), 0, (z * \tilde{u})(2), 0, \dots, (z * \tilde{u})(N-2), 0) =$$

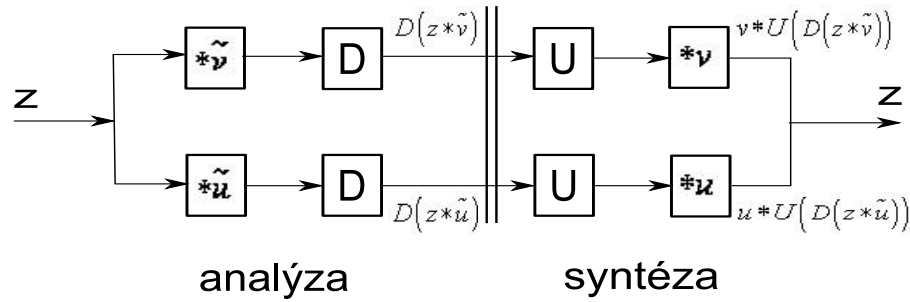
Vyčíslíme konvoluci v bodě  $k = 0, \dots, N-1$ :

$$= \sum_{m=0}^{M-1} u(k-2m)(z * \tilde{u})(2m).$$

Platí, že  $(u(k-2m))_k = R_{2m}u$  a  $(z * \tilde{u})(2m)$  jsou koeficienty vektoru vůči části waveletové báze. Je tedy zřejmé, že součet této sumy (projekce vektoru  $z$  na  $\{u, R_2u, R_4u, \dots\}$ ) a sumy vzniklé analogicky pro vektor  $v$  dává původní vektor  $z$ .

■

Celý princip analýzy a syntézy je zobrazen na obrázku 5.2. Dvojitá svíslá čára odděluje analýzu vektoru  $z$  od jeho syntézy.



Obrázek 5.2: Princip analýzy a syntézy

### 5.3 Wavelety na $p$ -té úrovni

Abychom mohli analyzovat vektor do  $p$ -té úrovně, je potřeba, aby počet jeho koeficientů byl dělitelný  $2^p$ , kde  $p \in \mathbb{N}$ . Je-li to splněno, pak zvolme  $u_l, v_l \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^{l-1}})$ ,  $l = 0, \dots, p$  tak, aby generovala waveletovou bázi první úrovně prostoru  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^{l-1}})$  (viz. věta 5.1). Tyto vektory budeme nazývat waveletové filtry.

Nejprve provedeme analýzu vektoru  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  pomocí filtrů  $u_1, v_1$ . Tím dostaneme vektory  $x_1, y_1 \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2})$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= D(z * \tilde{u}), \\ y_1 &= D(z * \tilde{v}). \end{aligned}$$

Dále provedeme analýzu vektoru  $x_1$  s použitím filtrů  $u_2, v_2$ , čímž obdržíme vektory  $x_2, y_2 \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/4})$ . Postup stále opakujeme, až na  $p$ -té úrovni obdržíme  $x_p, y_p \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^p})$ . Nakonec dostaneme posloupnost dvojic vektorů  $x_l, y_l \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^l})$ ,  $l = 1, \dots, p$ .

**Definice 5.3:** Nechť  $N$  je dělitelné číslem  $2^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$  a nechť  $u_l, v_l \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^{l-1}})$  je dvojice generátorů waveletové báze prostoru  $\ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^{l-1}})$ ,  $l = 1, \dots, p$ . Pak vektor  $\{y_1, \dots, y_p, x_p\}$  získaný výše uvedeným způsobem budeme nazývat analýzou vektoru  $z \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  na  $p$ -té úrovni.

Takto jsme popsali analýzu a zbývá nám popsat syntézu. Podle věty 5.3 platí:

$$\begin{aligned} u_p * U(x_p) + v_p * U(y_p) &= x_{p-1}, \\ &\vdots \\ u_k * U(x_k) + v_k * U(y_k) &= x_{k-1}, \\ &\vdots \\ u_1 * U(x_1) + v_1 * U(y_1) &= z. \end{aligned}$$

Zde je vidět, že k perfektní rekonstrukci stačí znát pouze posloupnost vektorů  $\{y_1, \dots, y_p, x_p\}$ .

Waveletovou transformaci můžeme s výhodou zapsat i nerekurzivním způsobem.

Nechť  $N$  je dělitelné  $2^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$  a necht'  $u_l, v_l \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^{l-1}})$  pro každé  $l = 1, \dots, p$ . Sestrojme posloupnost dvojic  $\{f_l, g_l\}$ ,  $f_l, g_l \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ ,  $l = 1, \dots, p$  takto:

$$\begin{aligned} f_1 &= v_1 \\ g_1 &= u_1 \\ f_2 &= g_1 * U(v_2) \\ g_2 &= g_1 * U(u_2) \end{aligned}$$

a obecně pro  $l = 3, \dots, p$ :

$$\begin{aligned} f_l &= g_{l-1} * U^{l-1}(v_l) \\ g_l &= g_{l-1} * U^{l-1}(u_l). \end{aligned}$$

Za tohoto značení můžeme zformulovat větu, kterou je možno dokázat matematickou indukcí.

**Věta 5.4:** *Pro  $l = 1, \dots, p$  platí:*

$$\begin{aligned} x_l &= D^l(z * \tilde{g}_l), & y_l &= D^l(z * \tilde{f}_l), \\ x_l(k) &= \langle z, R_{2^l k} g_l \rangle, & y_l(k) &= \langle z, R_{2^l k} f_l \rangle, \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2^l} - 1. \end{aligned}$$

**Definice 5.4: (Waveletová báze.)** Necht'  $N$  je dělitelné  $2^p$ , kde  $p \in \mathbb{N}$  a necht'  $f_1, \dots, f_p, g_p \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  je taková posloupnost vektorů, že množina

$$B = \{R_{2^k} f_1\}_{k=0}^{N/2-1} \cup \{R_{4^k} f_2\}_{k=0}^{N/4-1} \cup \dots \cup \{R_{2^{p-k}} f_p\}_{k=0}^{N/2^p-1} \cup \{R_{2^{p-k}} g_p\}_{k=0}^{N/2^p-1}$$

je ortonormální báze prostoru  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Pak množinu  $B$  nazveme waveletovou bází prostoru  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  na  $p$ -té úrovni a její prvky wavelety na  $p$ -té úrovni.

**Věta 5.5:**  $f_1, \dots, f_p, g_p$  definované výše tvoří generátory waveletové báze.

Dá se ukázat, že  $\{f_1, \dots, f_p, g_p\}$  definovaná výše tvoří ONB.

Zavedme nyní standardní označení waveletů na  $j$ -té úrovni (Pozn.: Je zkonstruováno výše.):

$$\psi_{j,k} = R_{2^j k} f_j, \quad \varphi_{j,k} = R_{2^j k} g_j, \quad j = 1, \dots, p, \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2^j} - 1$$

a definujeme prostory  $V_j$  aproximací a  $W_j$  detailů takto:

$$V_j = \left[ \{\varphi_{j,k}\}_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1} \right], \quad W_j = \left[ \{\psi_{j,k}\}_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1} \right].$$

Je zřejmé, že pro ortogonální projekce vektoru  $z$  na tyto prostory platí:

$$P_j(z) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1} \langle z, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}, \quad Q_j(z) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2^j}-1} \langle z, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

Právě tyto projekce jsou počítány waveletovými algoritmy a jsou názorně ukázány v kapitole 6.

Waveletové filtry na  $p$ -té úrovni není vždy nutné volit. Poslední dobou se ukazuje, že důležité waveletové báze lze získat pouze na základě waveletových filtrů na první úrovni. Z nich se periodizací dají sestavit všechny ostatní filtry. Popíšeme tuto konstrukci následující větou:

**Věta 5.6:** *Nechť  $N$  je dělitelné  $2^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$  a necht'  $u_1, v_1 \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  je dvojice waveletových filtrů na první úrovni. Sestrojme posloupnost dvojic vektorů  $u_l, v_l$ ,  $l = 2, \dots, p$  takto:*

$$u_l(n) = \sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} u_1\left(n + \frac{kN}{2^{l-1}}\right), \quad v_l(n) = \sum_{k=0}^{2^{l-1}-1} v_1\left(n + \frac{kN}{2^{l-1}}\right), \quad n = 0, \dots, \frac{N}{2^{l-1}} - 1.$$

Pak  $\{u_l, v_l\}_{l=1}^p$  je posloupnost waveletových filtrů na  $p$ -té úrovni.

**Důkaz:** Důkaz naznačíme jen principiálně. Pro všechny úrovně waveletových filtrů  $l = 0, \dots, p$  lze dokázat, že platí  $\hat{u}_l(m) = \hat{u}_l(2^{l-1}m)$ . Potom pro přidruženou matici dostaneme vztah  $A_l(n) = A_1(2^{l-1}n)$  a jelikož  $A_1(n)$  je unitární, musí být unitární i  $A_l(n)$ , tedy  $u_l, v_l$ ,  $l = 1, \dots, p$  jsou vhodné waveletové filtry.

■

Až doposud jsme se zabývali wavelety na prostoru  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ . Jak ale vypadají wavelety na prostoru  $\ell^2(\mathbb{Z})$ ? Odpověď na položenou otázku je mnohem složitější než vybudování waveletové teorie na prostoru  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , a proto bych tuto část ponechal na pozdější a rozsáhlejší práci na podobné téma, kterou může být např. práce diplomová.

Nemůžeme však opomenout alespoň seznámení s rozšířením diskrétní waveletové teorie na prostor  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Zásadní rozdíl oproti transformaci na  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  je ten, že Fourierova transformace je zobrazení z prostoru  $\ell^2(\mathbb{Z})$  do prostoru  $L^2\langle -\pi, \pi \rangle$ , z čehož plynou následující rozdíly:

1. Úplnost ortonormální množiny prostoru  $\ell^2(\mathbb{Z})$  se musí dokázat. V případě prostoru  $\ell^2(\mathbb{Z}_{\mathbb{N}})$  plynula ihned z lineární nezávislosti a z její mohutnosti.
2. Fourierova transformace vektoru  $z \in \ell^2(\mathbb{Z})$  je funkce z prostoru  $L^2\langle -\pi, \pi \rangle$ .
3. Konvoluce  $z * v$  obecně pro  $z, v \in \ell^2(\mathbb{Z})$  nemusí být prvkem prostoru  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .
4. Pro praktické použití je podstatné, aby konvoluce vektoru a filtru šla spočítat jako konečný součet. To je možné jen tehdy, má-li filtr konečný počet nenulových složek (říkáme, že má konečný support).
5. Rozklad prostoru  $\ell^2(\mathbb{Z}) = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots$  obsahuje nekonečně mnoho členů.

## 5.4 Speciální wavelety na prostoru $\ell^2(\mathbb{Z}_{\mathbb{N}})$

V této podkapitole se seznámíme se dvěma základními typy waveletových bází, které jsou velmi často používány a mají široké praktické uplatnění. Jsou to Haarova waveletová báze a Shannonova waveletová báze. Dále řekneme, co jsou Daubechiesové wavelety  $D2P$  a zdůrazníme jejich hlavní vlastnost.

### 5.4.1 Haarova báze

Již při vysvětlení základního principu funkce waveletů jsme se zmínili o Haarově systému. Ten využívá aritmetický průměr dvou sousedních složek vektoru jako jejich aproximaci a jejich rozdíl od aritmetického průměru jako detail.

Nechť tedy  $N = 2^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$  a  $(z(k)) \in \ell^2(\mathbb{Z}_{\mathbb{N}})$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$ . Pak aritmetické průměry a difference vypadají takto:

$$s_1(j) = \frac{z(2j) + z(2j+1)}{2}, \quad d_1(j) = \frac{z(2j) - z(2j+1)}{2}, \quad j = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (5.5)$$

To je zřejmě analýza na první úrovni. Aplikujme iterativně předchozí postup na vektor  $s_1$ . Pro vektory aproximací a detailů na  $p$ -té úrovni platí vztahy:

$$s_k(j) = \frac{s_{k-1}(2j) + s_{k-1}(2j+1)}{2}, \quad d_k(j) = \frac{s_{k-1}(2j) - s_{k-1}(2j+1)}{2},$$

kde  $j = 0, 1, \dots, \frac{N}{2^k} - 1$  a  $k = 2, \dots, p$ . Odtud je vidět, že vektor  $z$  je jednoznačně určen aritmetickým průměrem svých složek a diferencemi na všech úrovních.

Z popisu waveletové transformace na prostoru  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$  víme, že vektory aproximací a detailů můžeme zapsat:

$$s_1(j) = \frac{\sqrt{2}}{2} \langle z, \varphi_{1,j} \rangle, \quad d_1(j) = \frac{\sqrt{2}}{2} \langle z, \psi_{1,j} \rangle, \quad j = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (5.6)$$

Jelikož vektor  $z$  je popsán vůči standardní bázi  $\varepsilon = \{e_k\}_{k=0}^{N-1}$ , musí pro Haarovy waveletové filtry  $\varphi, \psi$  platit:

$$\varphi_{1,j} = \frac{\sqrt{2}}{2} (e_{2j} + e_{2j+1}), \quad \psi_{1,j} = \frac{\sqrt{2}}{2} (e_{2j} - e_{2j+1}), \quad j = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (5.7)$$

Pro vyšší úrovně ( $k = 2, \dots, p$ ) analogicky platí:

$$\begin{aligned} \varphi_{k,j} &= 2^{\frac{-k}{2}} (e_{2^k j} + \dots + e_{2^k(j+1)-1}), \\ \psi_{k,j} &= 2^{\frac{-k}{2}} (e_{2^k j} + \dots + e_{2^k(j+\frac{1}{2})-1} - e_{2^k(j+\frac{1}{2})} - \dots - e_{2^k(j+1)-1}). \end{aligned}$$

**Poznámka:** Všimněme si, že vztah pro  $\varphi_{k,j}$  obsahuje  $2^k$  sčítanců a vztah pro  $\psi_{k,j}$  obsahuje  $2^k$  rozdílů sousedních složek vektoru  $z$ .

**Definice 5.5:** Necht'  $N = 2^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . Báze

$$\{\psi_{1,j}\}_{j=0}^{N/2-1} \cup \{\psi_{2,j}\}_{j=0}^{N/4-1} \cup \dots \cup \{\psi_{p,0}\} \cup \{\varphi_{p,0}\}$$

se nazývá Haarovou bází v prostoru  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ .

Ukažme si, jak Haarova báze vypadá číselně. Vezměme například  $N = 8$ . Pro první úroveň platí  $k = 1$  a tedy  $j = 0, \dots, 3$ . Pro druhou úroveň je  $k = 2$  a  $j = 0, 1$  a pro třetí úroveň dosazujeme  $k = 3$ ,  $j = 0$ . Třetí úroveň je nejvyšší, jelikož  $2^3 = 8 = N$ .

Dosadíme-li do vztahů pro wavelety na první úrovni, dostaneme :

$$\begin{aligned} \varphi_{1,0} &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right), & \psi_{1,0} &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right), \\ \varphi_{1,1} &= \left( 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, 0 \right), & \psi_{1,1} &= \left( 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0, 0 \right), \\ \varphi_{1,2} &= \left( 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right), & \psi_{1,2} &= \left( 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right), \\ \varphi_{1,3} &= \left( 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), & \psi_{1,3} &= \left( 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Analogicky dostaneme wavelety na druhé a třetí úrovni:

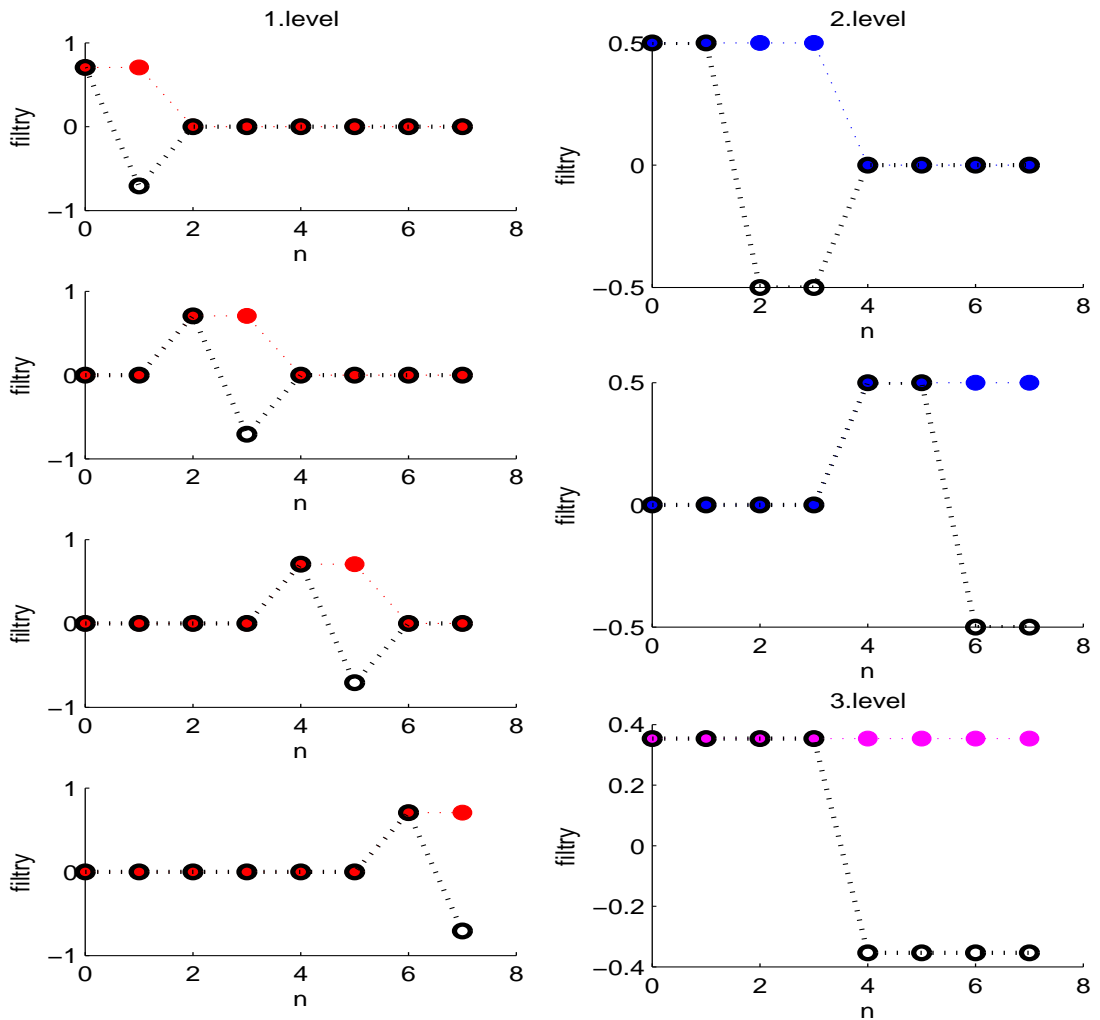
$$\begin{aligned} \varphi_{2,0} &= \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0 \right), & \psi_{2,0} &= \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0 \right), \\ \varphi_{2,1} &= \left( 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), & \psi_{2,1} &= \left( 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

$$\varphi_{3,0} = \left( \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right),$$

$$\psi_{3,0} = \left( \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right).$$

Tyto wavelety jsou zobrazeny na obrázku 5.3. Otcovské wavelety jsou označeny barvou, mateřské wavelety černým kroužkem. Dále jsou wavelety odlišeny barvou pro různé úrovně: první úroveň je červená, druhá úroveň je modrá a třetí úroveň je fialová.

Haarova báze se používá pro analýzu signálů, které jsou v čase po částech konstantní.



Obrázek 5.3: Haarovy wavelety,  $N = 8$

### 5.4.2 Shannonova báze

Shannonova báze je definována tak, aby její filtry filtrovaly nízké a vysoké frekvence. Připomeňme, že vysoké frekvence jsou zastoupeny vektory  $F_m$  Fourierovy báze pro  $m$  blízké polovině délky vektoru. Nízké frekvence jsou naopak ty vektory  $F_m$ , kde  $m$  je blízké 0 a nebo délce vektoru  $N$ . Zůstaneme-li v prostoru  $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , kde  $N = 2^p$ , jsou nejvyšší frekvence zastoupeny vektory  $F_{\frac{N}{2}-1}$  a  $F_{\frac{N}{2}}$  a nejnižší frekvence jsou zastoupeny vektory  $F_0$  a  $F_{N-1}$ .

**Definice 5.6:** Nechť  $N$  je dělitelné 4. Potom waveletové filtry první úrovně Shannonovy báze jsou definovány prostřednictvím DFT takto:

$$\hat{u}_1(n) = \begin{cases} \sqrt{2} & \dots n \in \{0, \dots, \frac{N}{4} - 1\} \cup \{\frac{3N}{4}, \dots, N - 1\}, \\ 0 & \dots n \in \{\frac{N}{4}, \dots, \frac{3N}{4} - 1\}, \end{cases}$$

$$\hat{v}_1(n) = \begin{cases} 0 & \dots n \in \{0, \dots, \frac{N}{4} - 1\} \cup \{\frac{3N}{4}, \dots, N - 1\}, \\ \sqrt{2} & \dots n \in \{\frac{N}{4}, \dots, \frac{3N}{4} - 1\}. \end{cases}$$

Dle věty 5.6 pro obecnou úroveň waveletových filtrů  $u_l, v_l$  platí:  $u_l, v_l \in \ell^2(\mathbb{Z}_{N/2^{l-1}})$ , kde  $l = 1, \dots, p$ . Jejich tvar je:

$$\hat{u}_l(n) = \begin{cases} \sqrt{2} & \dots n \in \{0, \dots, \frac{N}{2^{l+1}} - 1\} \cup \{\frac{3N}{2^{l+1}}, \dots, \frac{N}{2^{l-1}} - 1\}, \\ 0 & \dots n \in \{\frac{N}{2^{l+1}}, \dots, \frac{3N}{2^{l+1}} - 1\}, \end{cases}$$

$$\hat{v}_l(n) = \begin{cases} 0 & \dots n \in \{0, \dots, \frac{N}{2^{l+1}} - 1\} \cup \{\frac{3N}{2^{l+1}}, \dots, \frac{N}{2^{l-1}} - 1\}, \\ \sqrt{2} & \dots n \in \{\frac{N}{2^{l+1}}, \dots, \frac{3N}{2^{l+1}} - 1\}. \end{cases}$$

Shannonovy waveletové filtry  $u, v$  máme dané předpisem pro jejich DFT obrazy. Abychom získali hodnoty filtrů  $u, v$ , musíme spočítat IDFT těchto obrazů  $\hat{u}, \hat{v}$ , pro níž na první úrovni platí:

$$u_1(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{u}_1(m) e^{2\pi jmn/N}.$$

Pro vektor  $v_1(n)$  platí vztah analogicky. Dosazením do vztahů pro  $\hat{u}_1, \hat{v}_1$  dostaneme:

$$u(0) = v(0) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

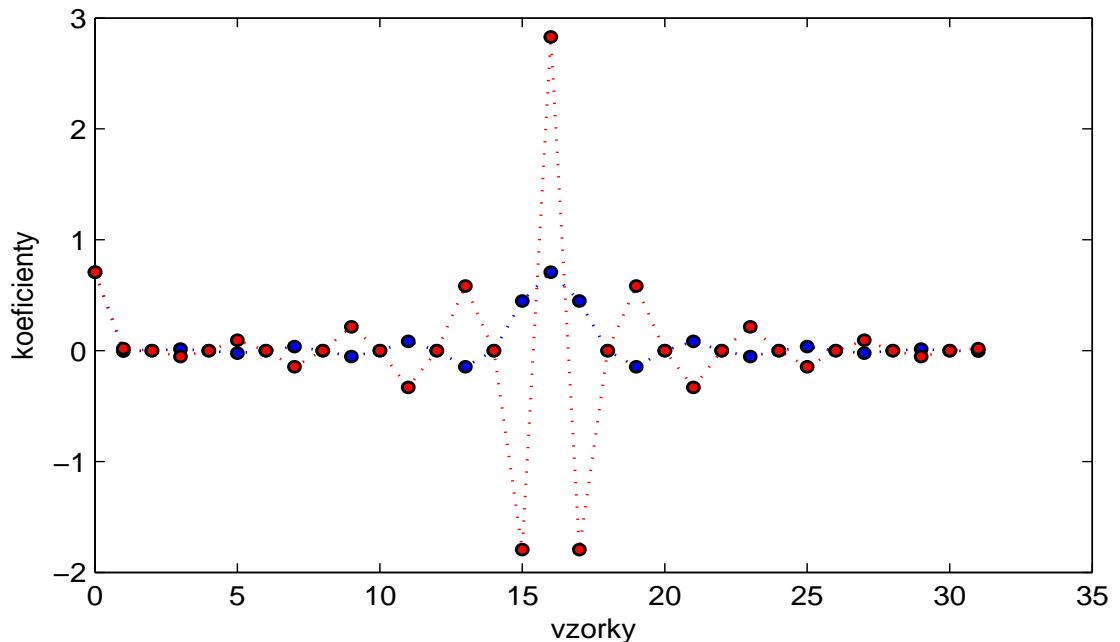
$$u(n) = \frac{\sqrt{2}}{N} \cdot e^{-j\pi n/N} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{\sin(\frac{\pi n}{N})},$$

$$v(n) = \frac{\sqrt{2}}{N} \cdot (-1)^n \cdot e^{-j\pi n/N} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{\sin(\frac{\pi n}{N})},$$

kde  $n = 1, \dots, N - 1$ . Na obrázku 5.4 je ukázána Shannonova báze pro  $N = 32$ . Modře je vyznačen otcovský wavelet a červeně mateřský.

Shannonovy wavelety jsou konstruovány tak, aby rozdělávaly frekvenční spektrum velice ostře. Pro malé  $N$  jsou wavelety široké, ale se zvětšujícím se  $N$  se vlnka zužuje, zhušťuje a zvětšuje svojí amplitudu.

Shannonova báze se používá pro analýzu signálů, které jsou ve frekvenci po částech konstantní.



Obrázek 5.4: Shannonovy wavelety na první úrovni,  $N = 32$

### 5.4.3 Daubechiesové wavelety $D2P$

Daubechiesové wavelety, označované zkráceně  $D2P$ , jsou na rozdíl od Shannonova systému definovány v čase. Tyto wavelety jsou specifické hlavně tím, že mají přesně  $2P$ ,  $P \in \mathbb{N}$  nenulových koeficientů (proto označení  $D2P$ ). Nyní ještě nemusíme vidět plný význam těchto waveletů. Napovězme však, že ve waveletové transformaci na prostoru  $\ell^2(\mathbb{Z})$  nebo  $L^2(\mathbb{R})$  mají význam zcela zásadní. Konečný počet nenulových koeficientů (v li-

teratuře též označováno jako konečný support) waveletových filtrů má v tomto případě za následek to, že konvoluce těchto filtrů a analyzovaného vektoru lze zapsat jako konečný součet. Tedy během transformace nevzniká chyba při aproximaci nekonečného součtu součtem konečným a tudíž jsme schopni vektor rekonstruovat přesně.

Zaměříme se nyní na sestavení waveletových filtrů  $D_{2P}$ . Abychom mohli analyzovat vektor  $z$  délky  $N$ , musí být  $N$  dělitelné  $2^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$  a navíc  $N/2^p > 2P$ ,  $P \in \mathbb{N}$ , kde  $p$  je největší úroveň waveletových filtrů. Naším cílem je zkonstruovat takový vektor  $u \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$ , který má pouze  $2P$  nenulových koeficientů a zároveň splňuje rovnici (5.1). Po nalezení takového vektoru  $u$  už vektor  $v$  umíme spočítat podle věty 5.2 a z této dvojice podle věty 5.6 spočítáme celou waveletovou bázi. Základní princip konstrukce vektoru  $u$  ukážeme na konkrétním případě. Zkonstruujeme filtr  $D_6$ .

Konstrukci vektoru  $u$  začneme identitou:

$$\left( \cos^2 \left( \frac{\pi n}{N} \right) + \sin^2 \left( \frac{\pi n}{N} \right) \right)^5 = 1, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

kde exponent je v obecném případě roven  $2P-1$ . Tento vztah rozepíšeme podle binomické věty:

$$\begin{aligned} & \cos^{10} \left( \frac{\pi n}{N} \right) + 5 \cos^8 \left( \frac{\pi n}{N} \right) \sin^2 \left( \frac{\pi n}{N} \right) + 10 \cos^6 \left( \frac{\pi n}{N} \right) \sin^4 \left( \frac{\pi n}{N} \right) + \\ & + 10 \cos^4 \left( \frac{\pi n}{N} \right) \sin^6 \left( \frac{\pi n}{N} \right) + 5 \cos^2 \left( \frac{\pi n}{N} \right) \sin^8 \left( \frac{\pi n}{N} \right) + \sin^{10} \left( \frac{\pi n}{N} \right) = 1. \end{aligned}$$

Poněvadž  $N$  je sudé, položíme  $N = 2M$  a zkoumejme vlastnosti funkcí sinus a kosinus při posunutí o  $M$ :

$$\cos \left( \frac{\pi(n+M)}{N} \right) = \cos \left( \frac{\pi n}{N} + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \left( \frac{\pi n}{N} \right) \quad (5.8)$$

$$\sin \left( \frac{\pi(n+M)}{N} \right) = \sin \left( \frac{\pi n}{N} + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi n}{N} \right). \quad (5.9)$$

Vraťme se nyní k identitě rozepsané dle binomické věty a položíme:

$$b(n) = \cos^{10} \left( \frac{\pi n}{N} \right) + 5 \cos^8 \left( \frac{\pi n}{N} \right) \sin^2 \left( \frac{\pi n}{N} \right) + 10 \cos^6 \left( \frac{\pi n}{N} \right) \sin^4 \left( \frac{\pi n}{N} \right).$$

Potom s využitím vztahů (5.8) a (5.9) spočítáme

$$b(n+M) = 10 \cos^4 \left( \frac{\pi n}{N} \right) \sin^6 \left( \frac{\pi n}{N} \right) + 5 \cos^2 \left( \frac{\pi n}{N} \right) \sin^8 \left( \frac{\pi n}{N} \right) + \sin^{10} \left( \frac{\pi n}{N} \right).$$

Zřejmě tedy platí:

$$b(n) + b(n+M) = 1, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Hledáme vektor  $u$ , který splňuje vztah (5.1). Víme, že:

$$2b(n) + 2b(n + M) = 2.$$

Zvolíme-li vektor  $u$  tak, že:

$$|\hat{u}(n)|^2 = 2b(n), \quad (5.10)$$

zřejmě pak vztah (5.1) platí:

$$2b(n) + 2b(n + M) = |\hat{u}(n)|^2 + |\hat{u}(n + M)|^2 = 2.$$

Tedy  $|\hat{u}| = \sqrt{2b} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{b}$ .

Pokračujeme:

$$\begin{aligned} b(n) &= \cos^{10}\left(\frac{\pi n}{N}\right) + 5\cos^8\left(\frac{\pi n}{N}\right)\sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) + 10\cos^6\left(\frac{\pi n}{N}\right)\sin^4\left(\frac{\pi n}{N}\right), \\ b(n) &= \cos^6\left(\frac{\pi n}{N}\right) \left[ \cos^4\left(\frac{\pi n}{N}\right) + 5\cos^2\left(\frac{\pi n}{N}\right)\sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) + 10\sin^4\left(\frac{\pi n}{N}\right) \right]. \end{aligned}$$

Upravme hranatou závorku:

$$b(n) = \cos^6\left(\frac{\pi n}{N}\right) \left[ \left( \cos^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) - \sqrt{10}\sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) \right)^2 + (5 + 2\sqrt{10})\cos^2\left(\frac{\pi n}{N}\right)\sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) \right].$$

Definujme vektor  $\hat{u} \in \ell^2(\mathbb{Z}_N)$  následovně:

$$\begin{aligned} \hat{u}(n) &= \sqrt{2}e^{-5\pi jn/N} \cdot \cos^3\left(\frac{\pi n}{N}\right) \left[ \cos^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) - \sqrt{10}\sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right) + \right. \\ &\quad \left. + j\sqrt{5 + 2\sqrt{10}} \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{N}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{N}\right) \right]. \end{aligned}$$

Takto definovaný vektor  $\hat{u}$  splňuje rovnici (5.10). Všimněme si, že jsme na hranatou závorku použili vzorec pro rozklad  $a^2 + b^2 = (a + jb)(a - jb)$  a přibyl posun ve tvaru komplexní exponenciály.

Využitím vztahů pro sinus a kosinus dvounásobného argumentu a využitím Eulerových vztahů pro přepis trigonometrických funkcí pomocí komplexních exponenciál dostaneme:

$$\begin{aligned} \hat{u}(n) &= \sqrt{2}e^{-2\pi j4n/N} e^{3\pi jn/N} \left( \frac{e^{j\pi n/N} + e^{-j\pi n/N}}{2} \right)^3 \\ &\quad \cdot \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right) - \frac{\sqrt{10}}{2} \left( 1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right) + j\frac{\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{2} \sin\left(\frac{\pi n}{N}\right) \right]. \end{aligned}$$

Uvnitř hranaté závorky roznásobíme a vytkneme trigonometrické funkce, které následně převedeme na komplexní exponenciály. Konstanty si pro snazší zápis nahradíme písmenky:

$$a = 1 - \sqrt{10}, \quad b = 1 + \sqrt{10}, \quad c = \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}$$

Exponenciály před hranatou závorkou upravíme a obdržíme rovnici:

$$\hat{u}(n) = \frac{\sqrt{2}}{8} e^{-2\pi j 4n/N} (e^{2\pi j n/N} + 1)^3 \left[ \frac{a}{2} + \frac{b}{4} (e^{2\pi j n/N} + e^{-2\pi j n/N}) + \frac{c}{4} (e^{2\pi j n/N} - e^{-2\pi j n/N}) \right].$$

Teď ze závorky vytkneme  $\frac{1}{4}$  a budeme dále upravovat jen pravou stranu:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}}{32} e^{2\pi j \frac{-4n}{N}} (e^{2\pi j \frac{n}{N}} + 1)^3 [2a + b(e^{2\pi j \frac{n}{N}} + e^{-2\pi j \frac{n}{N}}) + c(e^{2\pi j n/N} - e^{-2\pi j \frac{n}{N}})] = \\ = & \frac{\sqrt{2}}{32} e^{2\pi j \frac{-4n}{N}} \left( e^{2\pi j \frac{3n}{N}} + 3e^{2\pi j \frac{2n}{N}} + 3e^{2\pi j \frac{n}{N}} + 1 \right) [2a + e^{2\pi j \frac{n}{N}} (b + c) + e^{-2\pi j \frac{n}{N}} (b - c)] = \\ = & \frac{\sqrt{2}}{32} \left( e^{2\pi j \frac{-n}{N}} + 3e^{2\pi j \frac{-2n}{N}} + 3e^{2\pi j \frac{-3n}{N}} + e^{2\pi j \frac{-4n}{N}} \right) [2a + e^{2\pi j \frac{n}{N}} (b + c) + e^{-2\pi j \frac{n}{N}} (b - c)] = \end{aligned}$$

Roznásobíme závorky:

$$\begin{aligned} = & \frac{\sqrt{2}}{32} 2a \left( e^{2\pi j \frac{-n}{N}} + 3e^{2\pi j \frac{-2n}{N}} + 3e^{2\pi j \frac{-3n}{N}} + e^{2\pi j \frac{-4n}{N}} \right) + \\ & + \frac{\sqrt{2}}{32} (b + c) \left( 1 + 3e^{2\pi j \frac{-n}{N}} + 3e^{2\pi j \frac{-2n}{N}} + e^{2\pi j \frac{-3n}{N}} \right) + \\ & + \frac{\sqrt{2}}{32} (b - c) \left( e^{2\pi j \frac{-2n}{N}} + 3e^{2\pi j \frac{-3n}{N}} + 3e^{2\pi j \frac{-4n}{N}} + e^{2\pi j \frac{-5n}{N}} \right) = \end{aligned}$$

A povytýkáme stejné exponenciály:

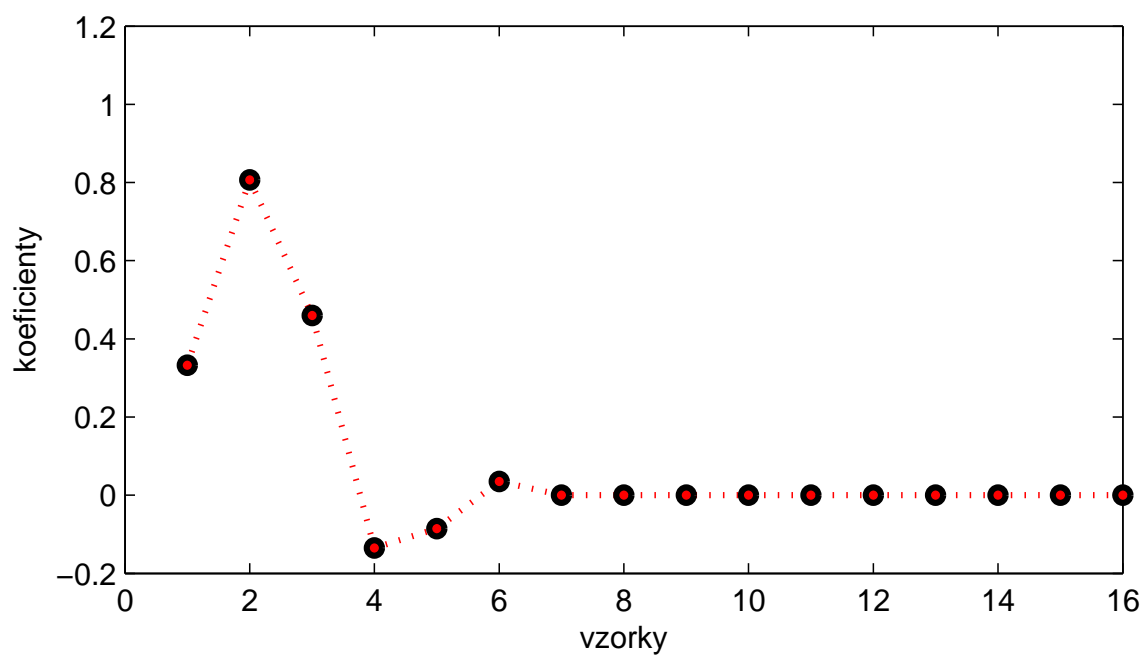
$$\begin{aligned} = & \frac{\sqrt{2}}{32} \left[ e^0 (b + c) + e^{2\pi j \frac{-n}{N}} (2a + 3b + 3c) + e^{2\pi j \frac{-2n}{N}} (6a + 4b + 2c) + \right. \\ & \left. + e^{2\pi j \frac{-3n}{N}} (6a + 4b - 2c) + e^{2\pi j \frac{-4n}{N}} (2a + 3b - 3c) + e^{2\pi j \frac{-5n}{N}} (b - c) \right]. \end{aligned}$$

Teď už je vidět, že  $\hat{u}(n)$  můžeme zapsat jako DFT vektoru  $u(k)$ :

$$\hat{u}(n) = \sum_{k=0}^5 u(k) e^{-2\pi j \frac{kn}{N}},$$

kde vektor  $u(k) = \frac{\sqrt{2}}{32} (b + c, 2a + 3b + 3c, 6a + 4b + 2c, 6a + 4b - 2c, 2a + 3b - 3c, b - c, 0, \dots)$ . Ostatní koeficienty vektoru  $u$  jsou nulové (koeficienty  $6, \dots, N - 1$ ). Je tedy patrné, že na délce analyzovaného vektoru (až na podmínku uvedenou na začátku této podkapitoly) nezáleží. Na obrázku 5.5 je znázorněn námi vypočtený wavelet  $D6$ .

Pro pořádek ještě zmiňme, že pro  $P = 1$  dostaneme wavelety  $D2$ , což jsou Haarovy wavelety. Ukázky jiných waveletů  $D2P$  jsou v příloze A.

Obrázek 5.5: Duabechiesové wavelet  $D_6$ ,  $N = 16$

## Kapitola 6

# VYUŽITÍ WAVELETOVÉ TRANSFORMACE

V této kapitole se zaměříme na praktické využití waveletové transformace. Jak jsme zmínili již v úvodu této práce, hlavními rysy a rozdíly waveletové transformace oproti Fourierově je ten fakt, že waveletová transformace analyzuje signál v čase i ve frekvenci zároveň, přičemž je možné zachovat informaci nesenou v amplitudě signálu.

Právě na tomto rozdílu je založena většina aplikací waveletové transformace. Nejběžnější a typické aplikace waveletové analýzy jsou následující:

1. Detekce nespojitostí a přerušení signálu
2. Detekce dlouhotrvajícího vývoje (trendu) signálu
3. Detekce soběpodobnosti signálu (např. fraktální signály)
4. Identifikace čisté frekvence
5. Potlačení signálu
6. Filtrace šumu (anglicky: de-noising)
7. Kompresce dat

**Poznámka:** Následující aplikace budou názorně ukázány na vektorech značné délky ( $N \in \{256; 512; 1024; \dots\}$ ), a proto na obrázcích budou vypadat signály jako spojité. Při počítačovém měření je signál také charakterizován posloupností naměřených hodnot v jednotlivých časech. Potom při dostatečně rychlém snímání (vzorkování) nedochází

k jevu zvaném aliasing a i nejvyšší frekvence obsažené v signálu jsou dobře patrné a nezkreslené.

Všechny následující úlohy byly zpracovány v programu MATLAB.

**Poznámka:** Budeme-li se v této kapitole bavit o nespojitosti, bude tím vždy myšlena nespojitost signálu před jeho navzorkováním, případně nespojitost FT spojitého signálu. Jinak by v diskrétním prostoru tento pojem neměl smysl.

## 6.1 Detekce nespojitosti a přerušení signálu

Účelem tohoto příkladu je ukázat, jak můžeme pomocí waveletové analýzy přesně určit okamžik nespojitosti (v čase i ve frekvenci) či přerušení signálu. Nespojitost FT signálu provedeme ostrým přechodem mezi dvěma čistými frekvencemi. Určitým druhem nespojitosti lze nazvat také spojitou změnu frekvence ve velmi malém časovém okamžiku a nebo nespojitost derivace signálu. Přerušení signálu (nespojitost v čase) charakterizujeme anulováním několika jeho nenulových hodnot.

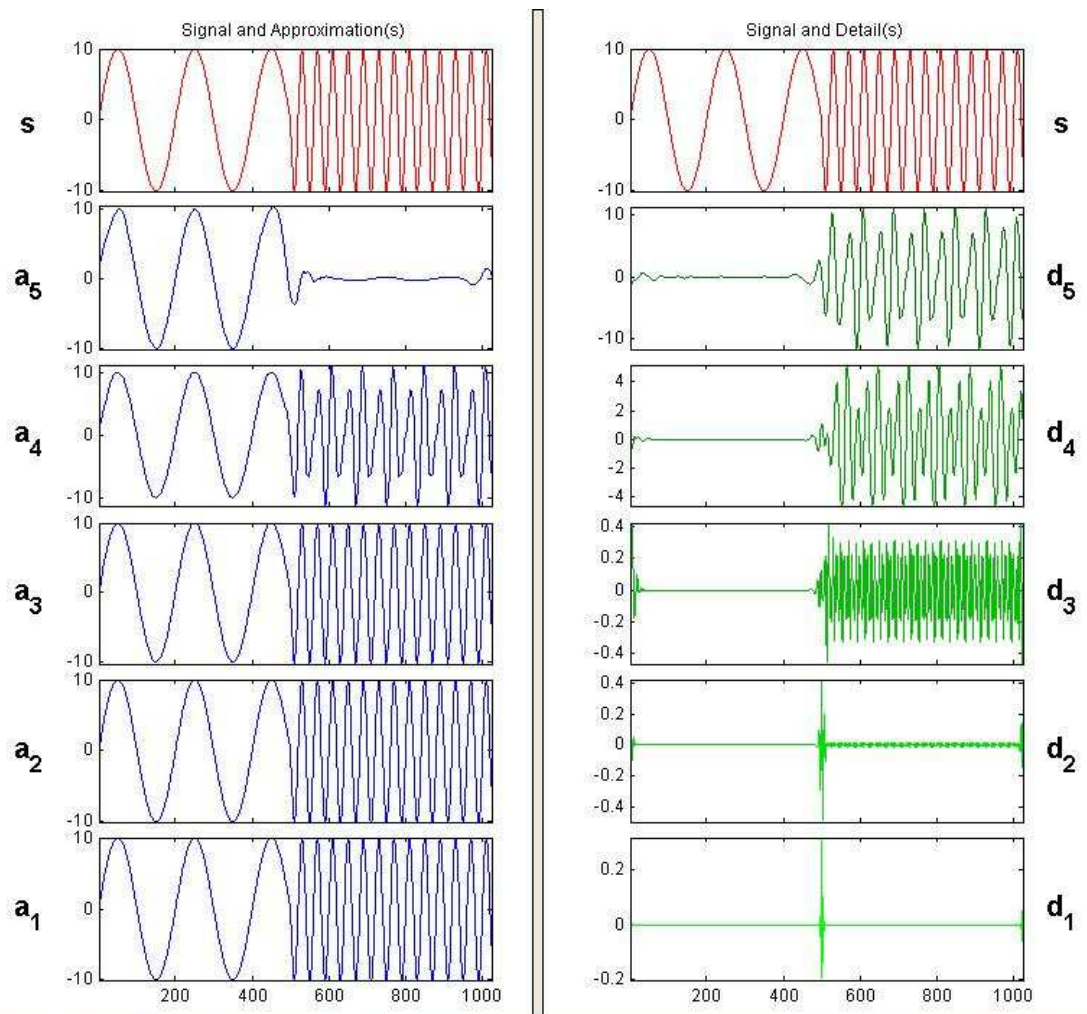
Konkrétní signály, ukázané na obrázku, jsou následující:

### Nespojitosti:

- **Ostrý přechod dvou čistých frekvencí:** Signál (vektor) je délky  $N = 1024$ . První část ( $n = 1, \dots, 500$ ) je sinusoida s periodou 200, druhou část ( $n = 501, \dots, 1024$ ) tvoří sinusoida s periodou 40. Analýza signálu je zobrazena na obrázku 6.1.
- **Spojitý přechod frekvence v krátkém časovém okamžiku:** Signál je délky  $N = 1024$ . Pro  $n = 1, \dots, 450$  je vzorkovaný signál sinusoida s periodou 200 (končí čtvrtperiodu před  $n = 500$ ) a pro  $n = 511, \dots, 1024$  je vzorkovaný signál sinusoida s periodou 40 (začíná čtvrtperiodu za  $n = 500$ ). Pro  $n = 451, \dots, 510$  se frekvence vzorkovaného signálu lineárně mění od  $\frac{1}{200}$  do  $\frac{1}{40}$ . Analýza signálu je zobrazena na obrázku 6.2.
- **Nespojitá derivace:** Signál je délky  $N = 512$ . První polovina ( $n = 1, \dots, 256$ ) je přímka se směrnici 0,104 a druhá polovina je přímka se směrnici 0,11. Obě poloviny jsou napojeny tak, že pro  $n = 256$  mají stejnou hodnotu. Analýza tohoto signálu je na obrázku 6.3.

## Přerušení:

- **Anulování nenulových hodnot:** Signál je délky  $N = 512$ . Pro všechna  $n$  je vzorkovaný signál sinusoida s periodou 128. Anulované jsou hodnoty pro  $n = 32 + 64i + k$ ,  $i = 0, \dots, 7$ ,  $k = \{-1, 0, +1\}$  (pro  $k = 0$  přísluší hodnoty  $n$  vrcholům sinusoidy) a pro  $n = 127, 128, 129, 383, 384, 385$  (přechod nulou na konci první a třetí periody). Analýza signálu je zobrazena na obrázku 6.5.



Obrázek 6.1: Ostrý přechod dvou čistých frekvencí

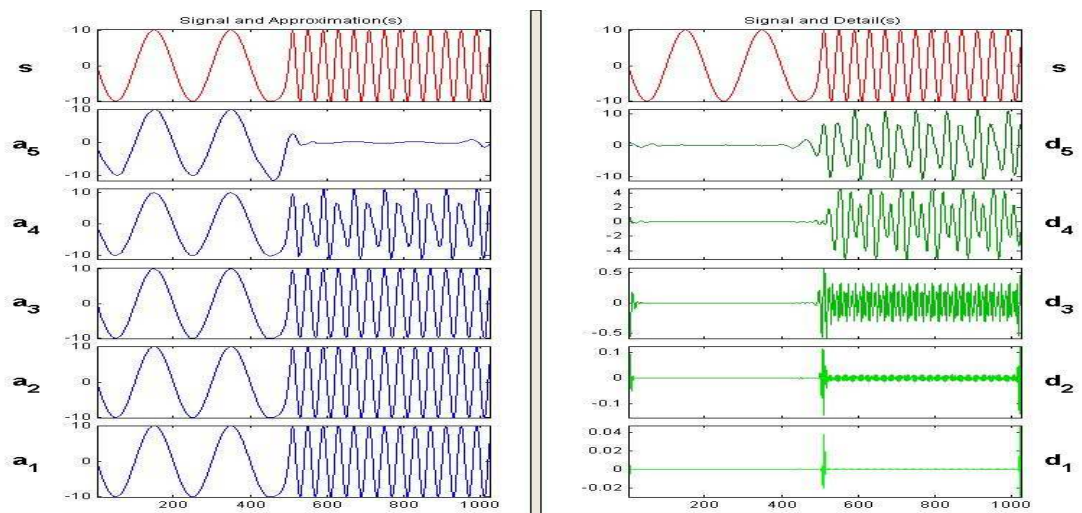
**Popis grafů:** Písmenem  $s$  se v grafech značí analyzovaný signál. Aproximace se značí písmenem  $a$  a detaily se značí písmenem  $d$ . Index jednotlivých aproximací a detailů určuje úroveň analýzy signálu, na které tyto projekce vznikly. Osy jsou značeny standardně. Výrazný červený obdélníček v grafu značí detail, který je zvětšený na jednom z následujících obrázků.

**Poznámka:** Součtem aproximací a detailů získaných na jedné úrovni získáme aproximaci na úrovni o jednu nižší. Tedy například  $a_5 + d_5 = a_4$  nebo  $a_1 + d_1 = s$ , celkově tedy  $a_5 + d_5 + \dots + d_1 = s$ . Také platí, že  $a_i$  jsou projekce (nejlepší aproximace) vektorů  $s$  a  $a_k$ ,  $k < i$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , na prostor  $V_i$  a  $d_i$  jsou (analogicky) projekce na prostor  $W_i$  pro všechny úrovně  $i$ , na kterých byl signál (vektor) analyzován.

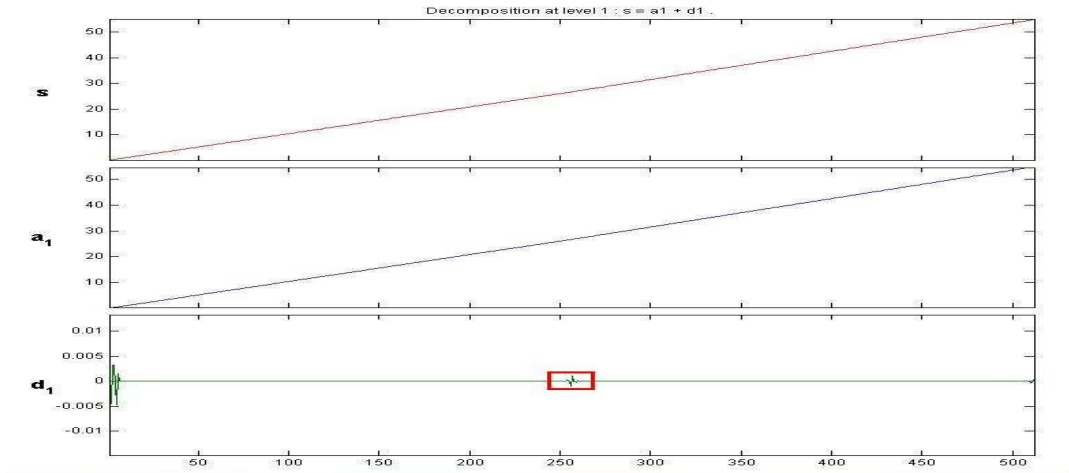
Dále platí, že projekce  $d_1, d_2$  jsou na sebe kolmé,  $a_1, d_1$  také, ale  $a_1, a_2$  ne! Nakonec ještě zmíníme, že chyba aproximace oproti původnímu signálu s rostoucí úrovní analýzy také roste:

$$\|z - a_1\| \leq \|z - a_2\| \leq \dots$$

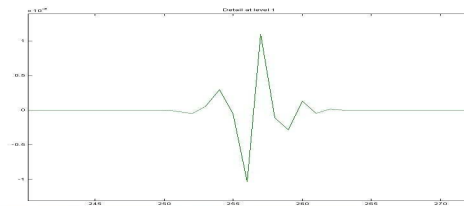
### 6.1.1 Diskuze



Obrázek 6.2: Spojitý přechod frekvence v krátkém časovém okamžiku



Obrázek 6.3: Nespojité derivace

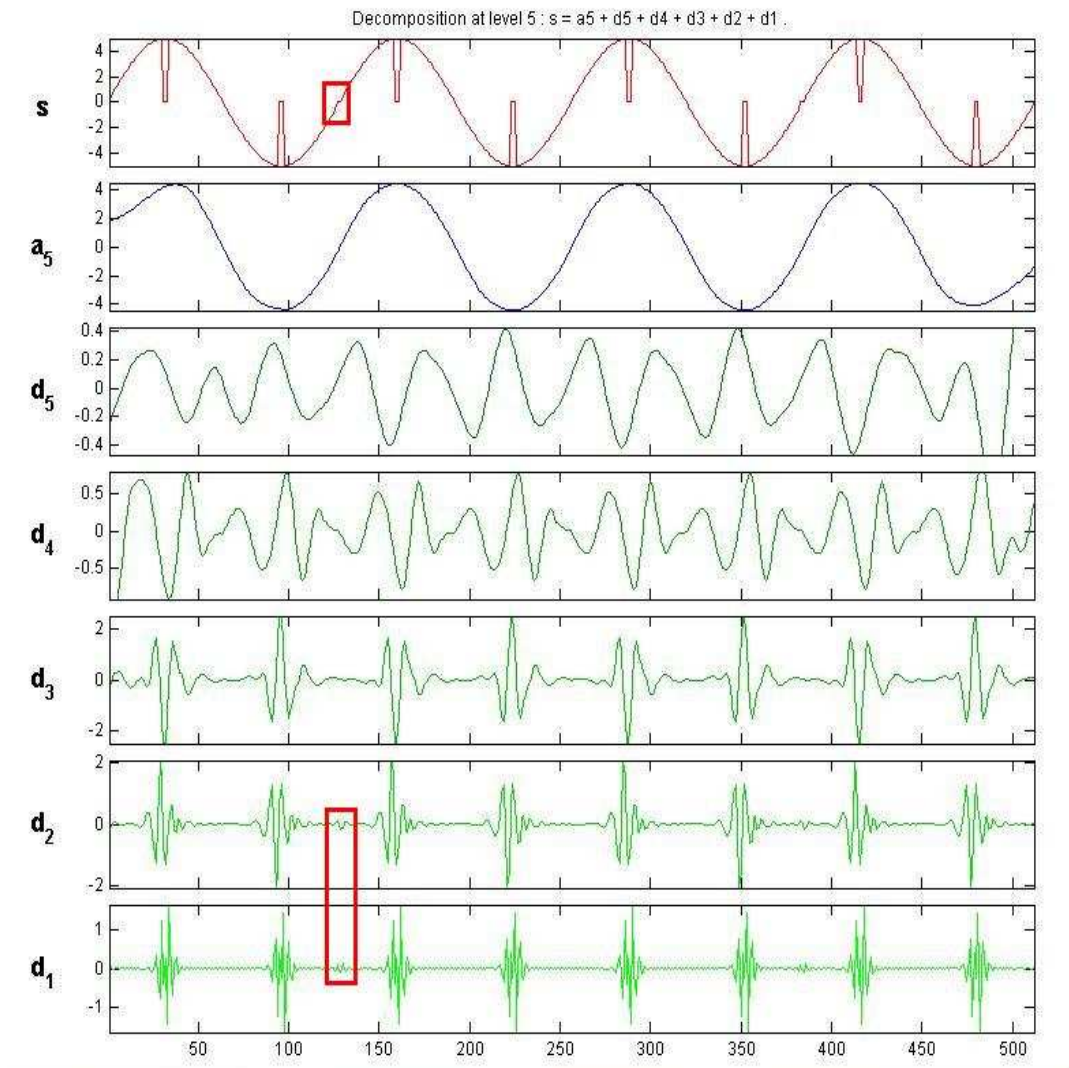


Obrázek 6.4: Zvětšený detail z obrázku 6.3

**Nespojitosti:** Signály s různými frekvencemi jsou analyzovány filtrem Daubechiesové pro  $P = 5$  na páté úrovni (jak vidno z obrázků 6.1 a 6.2). Na prvních třech úrovních detailů je zřetelně vidět, v jakém místě se nespojitost nachází.

Jelikož nespojitost odpovídá nejvyšším frekvencím, stačí na její nalezení pouze první úroveň a jakýkoliv waveletový filtr. U ostrého přechodu frekvencí signálu je nespojitost mnohem ráznějšího charakteru, a proto je zde nespojitost určena přesně, narozdíl od spojitě změny frekvence, kde první úroveň analýzy určí nespojitost na hodnotě  $n = 510$  a postupně s vyššími úrovněmi analýzy se nalézají další nespojitosti. Na posledních úrovních oba analyzované signály vypadají téměř stejně, jelikož tam už jsou vysoké frekvence vyfiltrovány do detailů nižších úrovní.

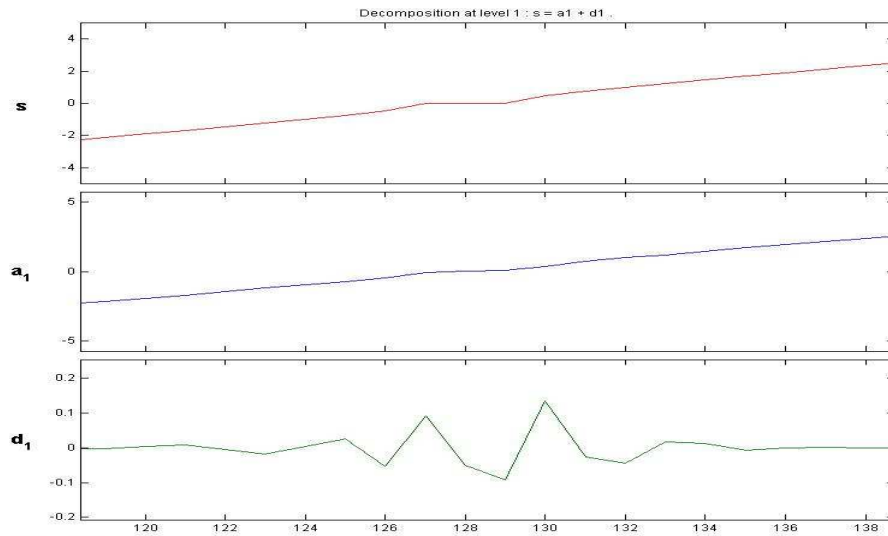
Všimněme si ještě nenulových hodnot detailů na začátku a na konci těchto projekcí (patrné to je hlavně na druhé a třetí úrovni na obrázku 6.1 nebo 6.2). Ty jsou



Obrázek 6.5: Přerušovaný signál

způsobeny periodizací (periodickým prodloužením) signálu. Jelikož začátek a konec signálu na sebe nenavazují, vzniká zde další nespojitost. Tato slabina  $N$ -dimenzionální waveletové transformace vedla k rozvoji waveletové teorie na prostorech  $\ell^2(\mathbb{Z})$  a  $L^2(\mathbb{R})$ .

Signál s nespojitou derivací je analyzován filtrem  $D_8$  (tj. pro  $P = 4$ ). Na samotném signálu  $s$  není nespojitost v derivaci patrná, jelikož obě přímky tvořící signál mají

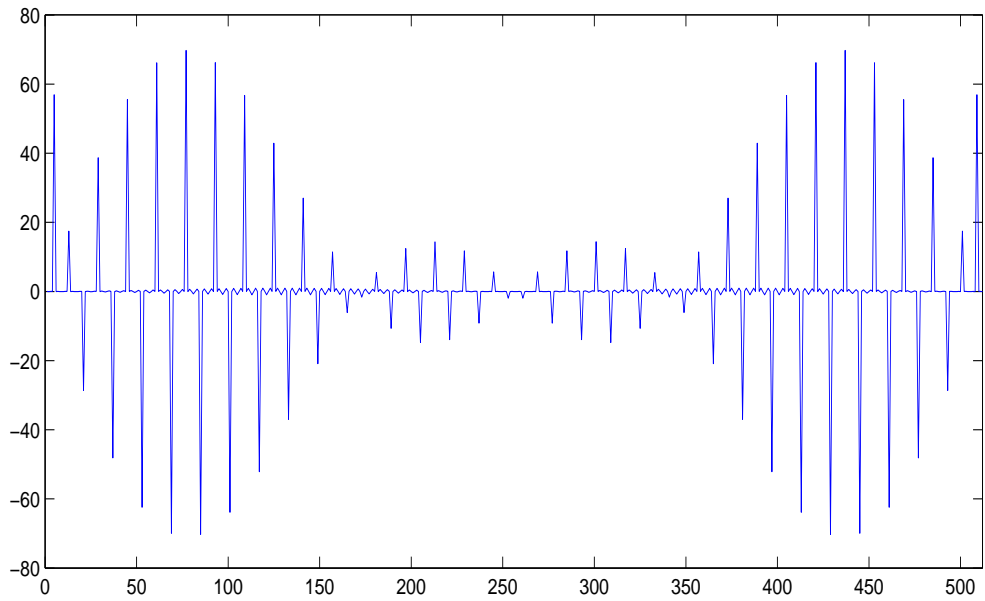


Obrázek 6.6: Zvětšený detail přerušení z obrázku 6.5

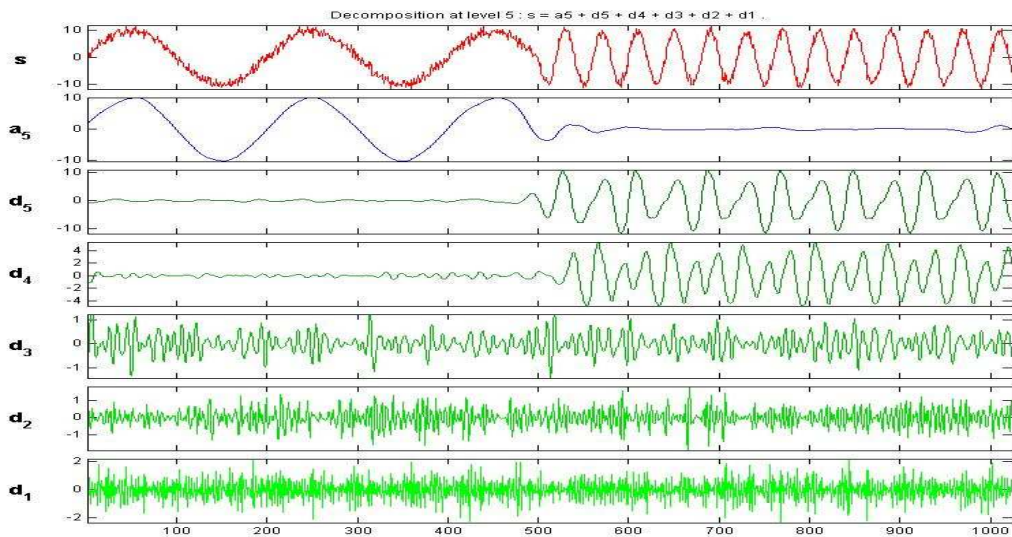
velice podobnou směrnici. Stačí ale udělat analýzu na první úrovni a nespojitost se ihned objeví (obrázky 6.3 a 6.4).

**Přerušení:** Jak již bylo řečeno, nespojitosti odpovídají nejvyšším frekvencím a filtrují se okamžitě na první úrovni. Na našem signálu jsou dva druhy přerušení. První typ přerušení je v místech amplitud a vzniká zde největší možný skok. Druhý typ přerušení máme na koncích první a třetí periody a jelikož zde signál normálně prochází nulou, je nespojitost velmi malá a odpovídá malým frekvencím. Signál jsme analyzovali filtrem  $D14$  na páté úrovni. Na obrázku 6.5 můžeme pozorovat, že první typ přerušení se vyfiltruje ihned a je vidět velmi výrazně, ale druhý typ přerušení je na prvních dvou úrovních téměř neznatelný. Na poslední úrovni analýzy je vidět, že vysoké frekvence způsobené přerušeními se vyfiltrovaly a zůstal nám, pravděpodobně hledaný, signál.

Na tomto signálu si ukážeme, jak může vypadat DFT diskrétního signálu. Program samozřejmě pro výpočet používá FFT, výsledek výpočtu je na obrázku 6.7. Na grafu je krásně zřetelný princip výpočtu FFT (v první polovině součet dvou komplexních exponenciál a v druhé polovině jejich rozdíl). Obrázek také potvrzuje symetričnost podle středu intervalu, na kterém se FFT provádí (toho se využívá při návrhu číslicových filtrů). Jinak však DFT (FFT) není pro podrobnější analýzu



Obrázek 6.7: DFT přerušovaného signálu

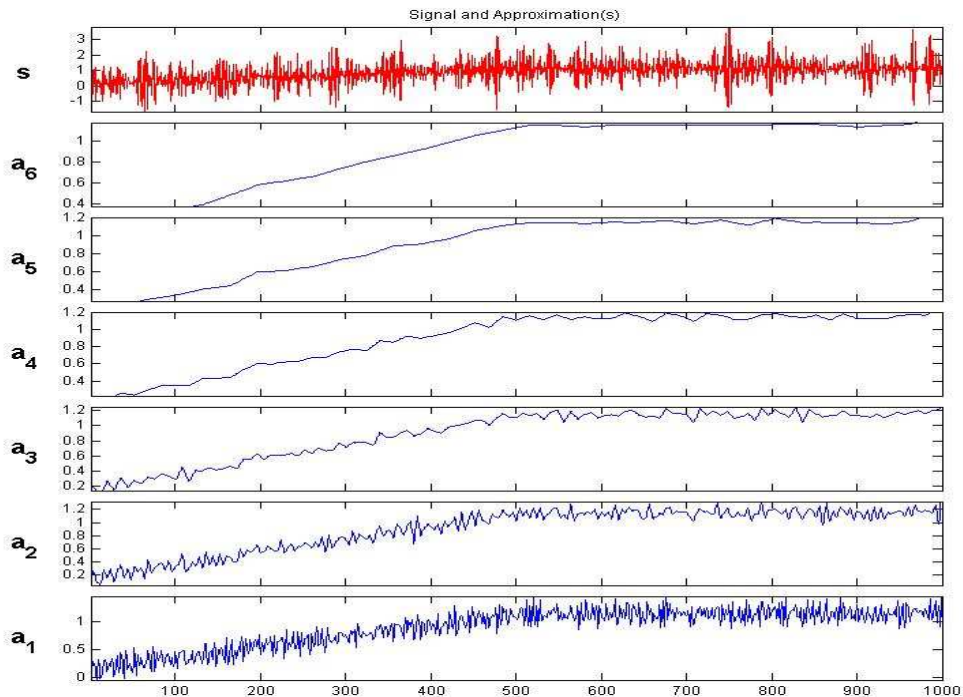


Obrázek 6.8: Vliv bílého šumu na detekci nespojitosti

signálu příliš vhodná. Tato transformace se častěji využívá pro analýzu výkonového spektra signálu.

**Praktické omezení:** V praxi je na každém signálu nabalený šum. Jelikož šum je sám o sobě tvořen vysokými frekvencemi, detekce nespojitostí a přerušení je obtížnější než u signálu bez šumu. Ukažme si ještě jednou analýzu signálu s ostrou změnou frekvence, ale tentokrát k signálu přidejme bílý šum (obrázek 6.8). Je vidět, že první úrovně analýzy nám o nespojitostech moc neřeknou, a proto zde nutně musíme použít úrovně vyšší.

## 6.2 Detekce trendu signálu



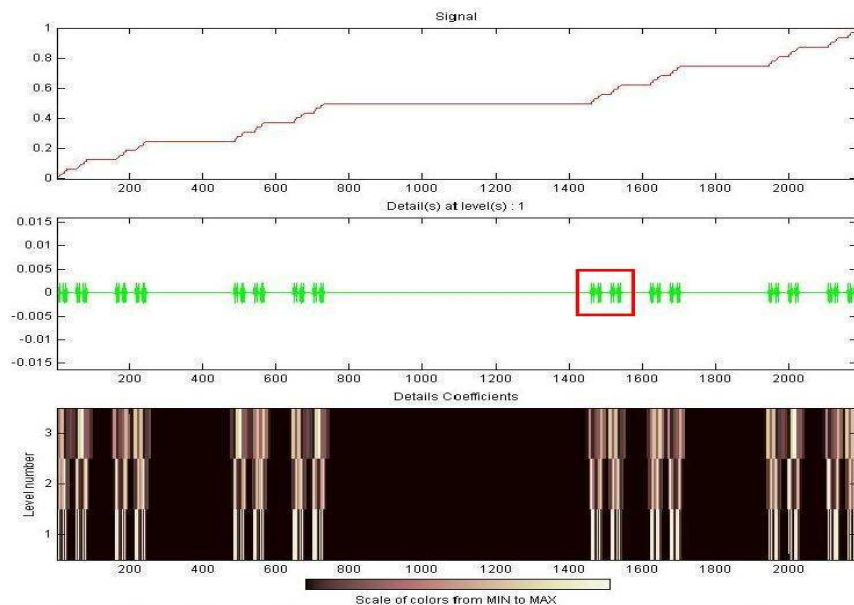
Obrázek 6.9: Detekce trendu signálu

Tento příklad ukazuje, jak můžeme waveletovou analýzou zachytit celkový trend signálu. Trend je reprezentován nejmenšími frekvencemi (nejpomalejší změny) a tedy výsledkem bude vždy aproximace na poslední úrovni.

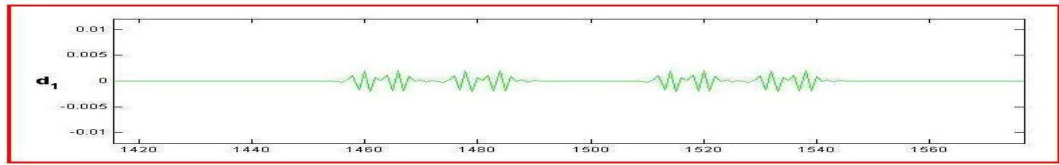
Na obrázku 6.9 je zobrazeno prvních 6 aproximací analýzy původního červeného signálu. Filtrace je provedena filtrem  $D6$ . Zde je patrné, jak se postupně filtrují frekvence od vysokých na první úrovni analýzy až po nízké na úrovni poslední. Za povšimnutí stojí i to, že jsme získali trend ze signálu, u něhož velikost šumu byla mnohem větší, než trend samotný.

Tato aplikace je velice důležitá, neboť umožňuje získání informační části příliš zašuměného signálu. Další praktické využití je například studium trhu a jeho vývoje v různých odvětvích.

### 6.3 Detekce soběpodobnosti



Obrázek 6.10: Detekce soběpodobnosti signálu



Obrázek 6.11: Zvětšený detail z obrázku 6.10

Waveletová transformace se dá použít také tehdy, chceme-li zjistit, zda se v signálu neopakuje nějaká část, byť třeba v různých měřítkách. Takovouto vlastností se vyznačují především fraktály.

Na obrázku 6.10 je analyzována Cantorova posloupnost (navzorkovaná charakteristická funkce zvaná *Cantorovo diskontinuum*), která má fraktální tvar a na obrázku 6.11 je zvětšený, červeně označený detail z obrázku prvního. Na obou obrázcích je patrna soběpodobnost jak na analyzovaném signálu, tak na detailech.

Principiálně to funguje tak, že vektory detailů mají na soběpodobných úsecích signálu stejnou posloupnost koeficientů. Jedná-li se o soběpodobnost na různých úrovních, je tato posloupnost také zachována, pouze se vyskytuje na delším úseku (nižší frekvence). Soběpodobnost je dobře patrná na spodním grafu obrázku 6.10, kde jsou zobrazeny detaily všech analyzovaných úrovní najednou (jednotlivé úrovně jsou označeny čísly na svislé ose). Hodnoty koeficientů jsou určeny odstínem barvy, černá odpovídá 0 a čím světlejší barva je, tím větší je hodnota detailu.

Stejně jako detekci trendu signálu můžeme tuto aplikaci využít pro zkoumání chování trhu.

## 6.4 Identifikace čisté frekvence

Následující aplikace ukazuje, že waveletovou transformací lze analyzovat signál skládající se z více sinusových signálů (např. modulované signály) a tyto dílčí signály z něj extrahovat. Ukažme to na příkladě rozkladu signálu, který vznikl součtem tří následujících

sinusových funkcí s různými frekvencemi:

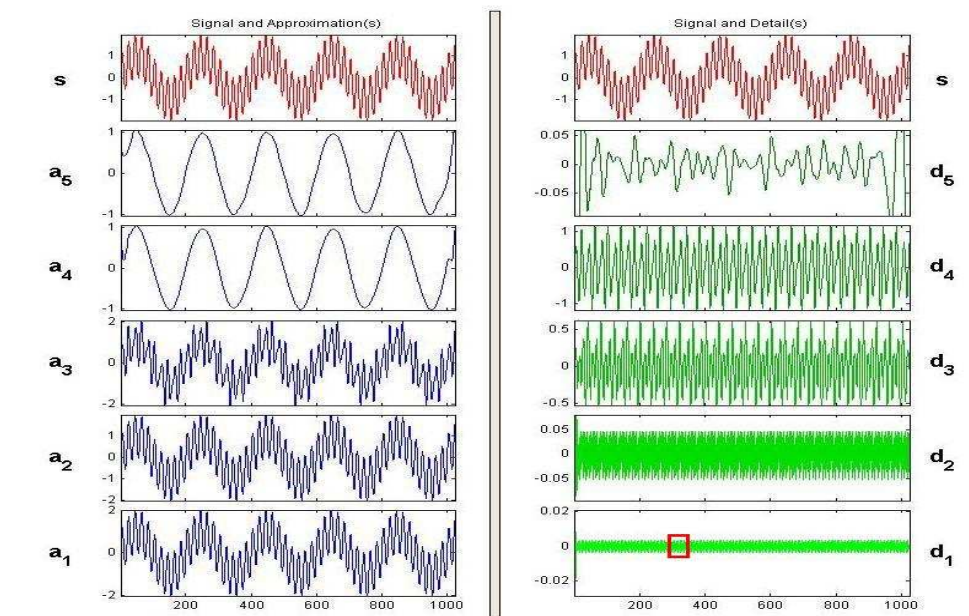
$$s_1 = \sin\left(\frac{2\pi n}{2}\right),$$

$$s_2 = \sin\left(\frac{2\pi n}{20}\right),$$

$$s_3 = \sin\left(\frac{2\pi n}{200}\right).$$

Výsledný signál je  $s = s_1 + s_2 + s_3$  a má délku  $N = 1024$ .

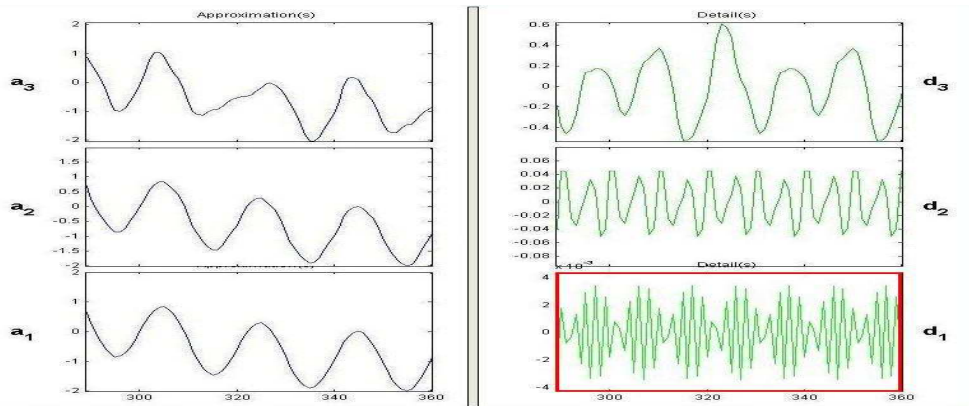
### 6.4.1 Diskuze



Obrázek 6.12: Identifikace čisté frekvence

Na obrázku 6.12 je ukázána analýza signálu  $s$ . První úroveň detailů obsahuje odfiltrované nejvyšší frekvence, které mají periodu zhruba jedenkrát až dvakrát větší než je perioda smplovací frekvence. Zaměřením se na tento detail (viz. obrázek 6.13) zjistíme, že obsahuje harmonickou funkci s periodou asi 2 (odpovídá analyzovanému signálu), a že je

na ní namodulována jiná harmonická funkce s menší frekvencí. Podle obalové křivky první úrovně detailů můžeme určit, že perioda namodulované funkce je asi 20. Tato frekvence je však příliš malá na to, aby byla vyfiltrována a tudíž musí být ještě obsažena v detailech či aproximaci vyšší úrovně.



Obrázek 6.13: Zvětšený detail z obrázku 6.12

A tak to opravdu je. Harmonická funkce s periodou 20 je zobrazena v aproximaci na první úrovni, na druhé úrovni je ještě také a teprve na třetí úrovni se tato funkce začíná objevovat v detailech. Vrátime-li se ale k obrázku 6.12 a porovnáme-li aproximace na třetí a na čtvrté úrovni, zjistíme, že na čtvrté úrovni zmizela z aproximací úplně a zbývá v nich pouze harmonická část s největší periodou. Tím bychom prakticky mohli skončit a pátou úroveň analýzy již není nutné počítat.

Závěrem jen shrnu, že jsme ze signálu extrahovali všechny tři důležité frekvence, a to na detailech první úrovně a aproximacích první a čtvrté úrovně.

## 6.5 Potlačení signálu

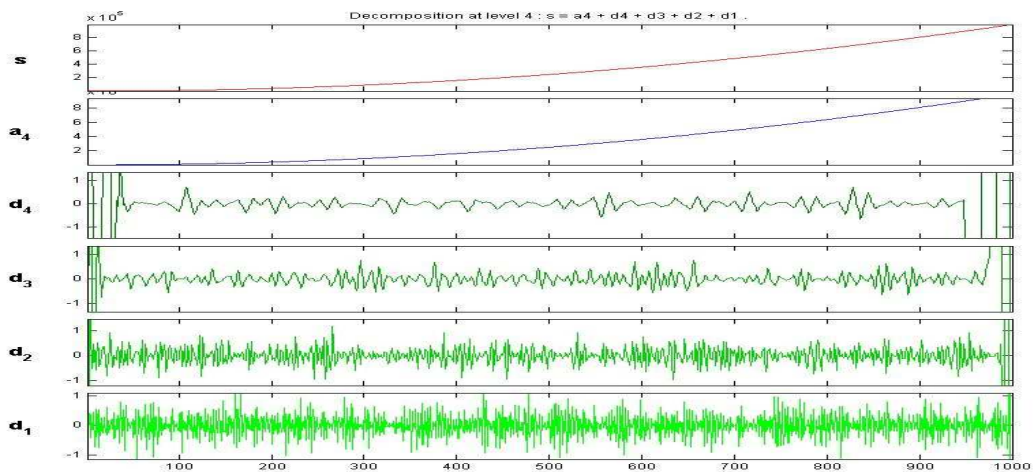
Další aplikací je potlačení signálů, které jsou polynomiálního typu. Některé wavelety mají nulové momenty. Moment je výraz:

$$\sum_{n=0}^{N-1} n^i u(n),$$

kde  $i$  je řád momentu a  $u$  je wavelet. Analyzujeme-li takovými wavelety polynomiální funkci nižšího řádu než je nulový moment waveletu, má analýza nulové detaily. To znamená, že do detailů se dostane pouze rušivý signál.

Pro ukázkou jsem použil signál popsáný rovnicí  $y = n^2 - n + 1$  a zarušil jsem ho bílým šumem. Jeho analýza provedená filtrem  $D6$  je na obrázku 6.14. Koukneme-li se na měřítko detailů a původního signálu, je na první pohled jasné, že polynomiální signál se do detailů nedostává, a že v detailech je pouze analyzovaný přidaný šum.

V praxi se tato vlastnost některých waveletů dá využít právě při analýze aditivního šumu. Pošle se čistý polynomiální signál a změří se přijatý a zašuměný. Pomocí waveletů s nulovými momenty potom aditivní šum analyzujeme a dle toho můžeme navrhnout vhodný filtr, který dáme na přijímač signálu. Ale abychom neopomněli, dá se tato aplikace samozřejmě využít při získávání čistého polynomiálního signálu.

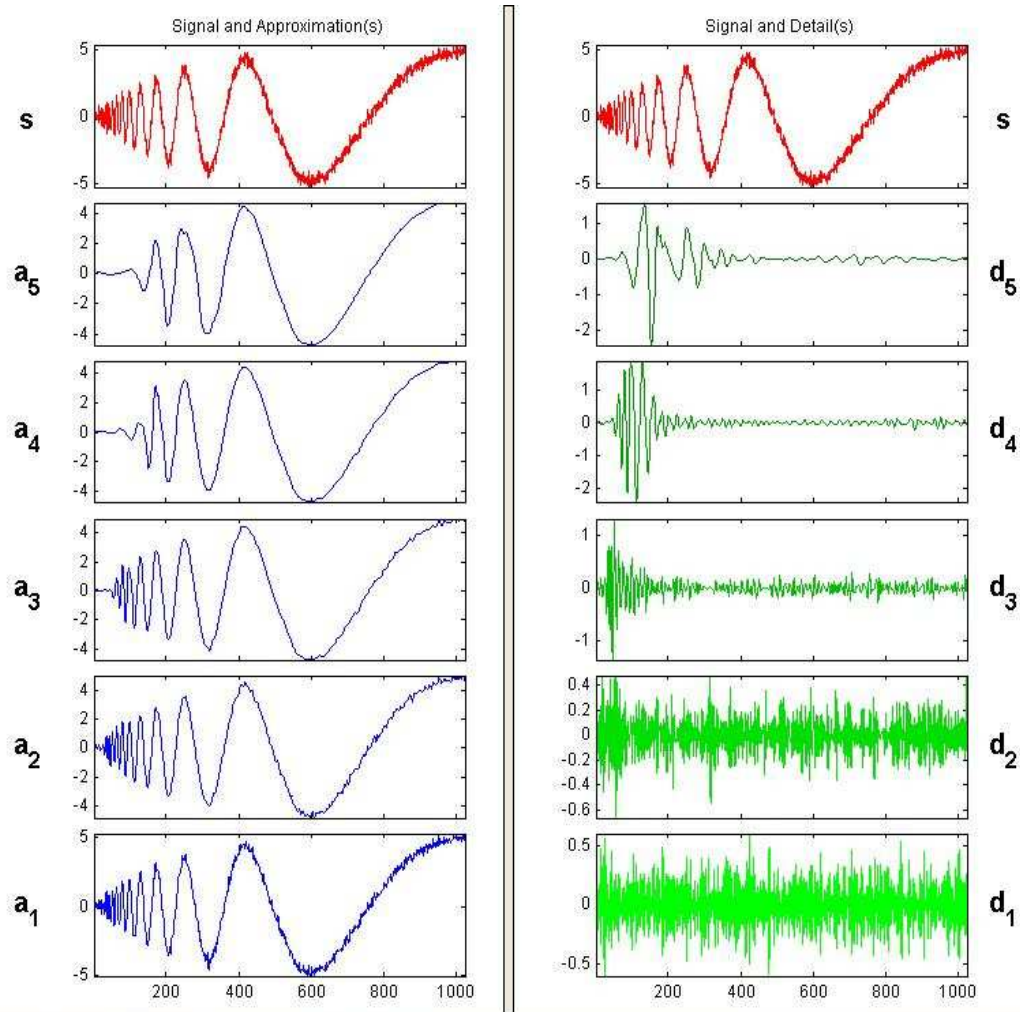


Obrázek 6.14: Ukázka potlačení polynomiálního signálu

## 6.6 Filtrace šumu

Nyní se budeme věnovat odstranění šumu ze signálu pomocí waveletové analýzy. Jako příklad budeme filtrovat zašumělý dopplerovský signál. Jeho analýza filtrem  $D8$  je na obrázku 6.15. Dopplerovský signál zleva začíná velmi vysokými frekvencemi. Tyto

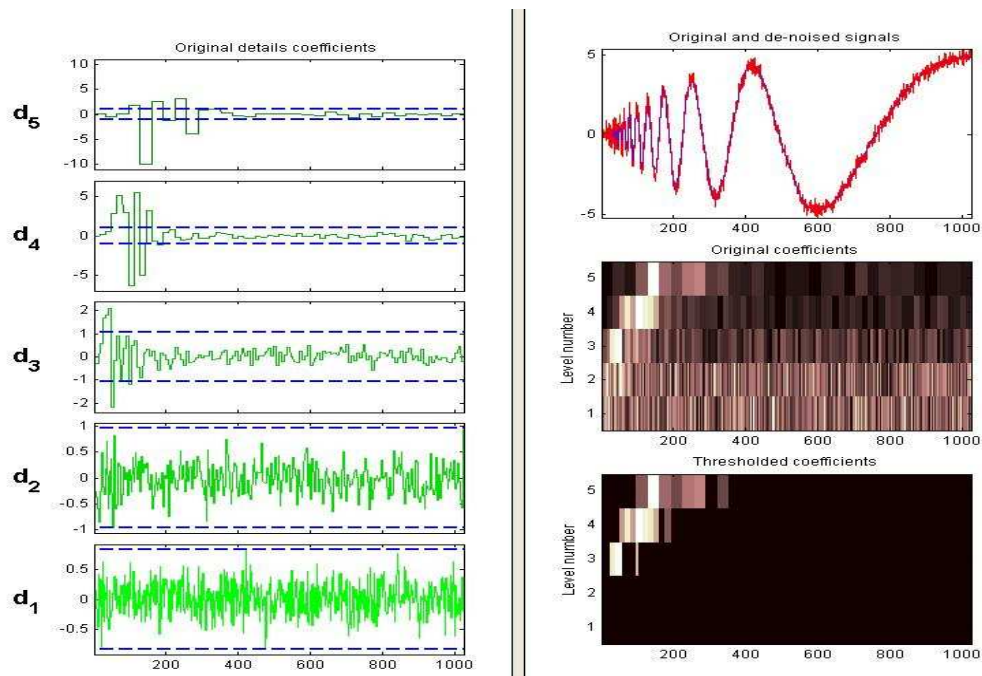
frekvence se na jednotlivých úrovních postupně ze signálu ztrácejí a konečná aproximace na páté úrovni již nezačíná v  $n = 0$ , ale asi kolem  $n = 100$ . To znamená, že postupnou analýzou dochází ke ztrátě vysokofrekvenční informace signálu.



Obrázek 6.15: Analýza doplerovského signálu

A právě kvůli příliš velké a zbytečné ztrátě informace se používá tzv. de-noising (z angličtiny, znamená: odstranění šumu). Tato metoda vezme details a umožní na nich nastavit práh. Details menší než práh se ze signálu odstraní úplně a details větší než práh jen částečně (viz. obrázek 6.16). Nastavení prahů (v obrázku modrá, čárkovaná čára) jed-

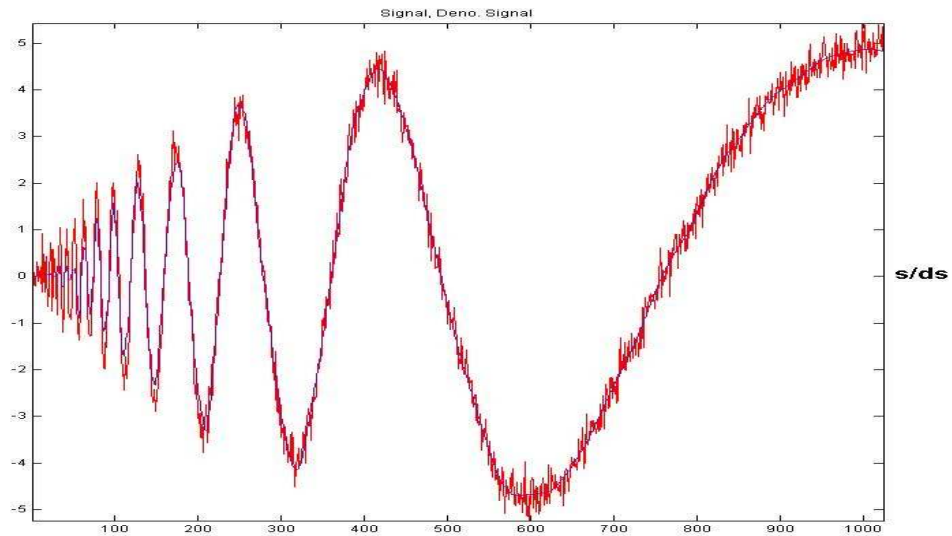
notlivých úrovní detailů si můžeme volit sami a nebo je umí program MATLAB nastavit automaticky. Vhodným nastavením prahů je možné dostatečně šum odfiltrovat a zároveň zachovat co nejvíce vysokofrekvenční informace. Na pravé straně obrázku 6.16 jsou zobrazeny překrývající se signály: původní se šumem (červeně) a odfiltrovaný (modře) - detailně ukázan na obrázku 6.17. Dále tam jsou barevně zobrazeny detaily na jednotlivých úrovních před a po filtraci. Na těchto zobrazeních je dobře pozorovatelný vliv nastavení prahů. Pokud bychom všechny prahy nastavili na maximum (chtěli bychom odstranit všechny detaily jako u analýzy), byl by graf po de-noisingu celý černý (nezůstaly by žádné vysoké frekvence).



Obrázek 6.16: Odstranění šumu ze signálu

Anulujeme-li na detailu  $d_i$  všechny jeho hodnoty, které jsou menší než práh a označíme-li takto upravený detail  $d'_i$ , pak pro náš obrázek platí:

$$\text{odšuměný signál (v grafu modrý)} = d'_1 + \dots + d'_5 + a_5.$$



Obrázek 6.17: Porovnání výsledku s původním signálem

## 6.7 Komprese dat

Úplně na závěr bych chtěl zmínit ještě jednu, velice hojně používanou aplikaci waveletové transformace. Komprese dat se týká spíše 2-D waveletové transformace, přesto však není použití na 1-D signály vyloučeno.

Princip komprese dat spočívá v něčem podobném, jako princip de-noisingu. Pro každou úroveň detailů se určí práh a všechny detaily menší než práh se ze signálu odstraní. Tím na signálu nevznikají příliš velké chyby, ale ve výsledku pro popis signálu stačí mnohem méně dat.

Mezi de-noisingem a kompresí dat je jeden zásadní rozdíl. Zatímco u de-noisingu nastavujeme prahy tak, abychom se zbavili šumu, u komprese dat nemáme žádný zájem na odstranění šumu. Ba dokonce naopak - my chceme zachovat co nejvíce detailů signálu včetně šumu! Kompresi provádíme s cílem popsat informaci (signál) co nejmenšími daty (paměť počítače), ale de-noising děláme za účelem získání co nejčistšího a nejjednoduššího signálu.

# Kapitola 7

## ZÁVĚR

Na závěr bych rád vystihnul cíle této práce a navrhnul další kroky ať už v jejím rozšíření nebo v rozvíjení a nalézání praktických aplikací waveletové transformace.

Tato práce je napsána tak, aby srozumitelně vysvětlila problematiku waveletové analýzy. Může být doporučena ke studiu lidem, kteří se matematikou nezaobírají na vědecké úrovni, ale kterým matematika slouží především jako jazyk techniků - praktiků. Právě z důvodu srozumitelnosti jsem se v této bakalářské práci snažil ukázat co nejvíce důkazů, výpočtů a příkladů, aby čtenář neměl sebemenší pochyby o platnosti a funkčnosti této teorie. Řada odvození je jednodušší ve srovnání se standardní literaturou a je doprovázena jednoduššími výpočty.

V ukázkách praktických aplikací jsem použil i některé mnou navržené signály, na kterých jsou dobře patrné výhody waveletové analýzy oproti analýzám jiným.

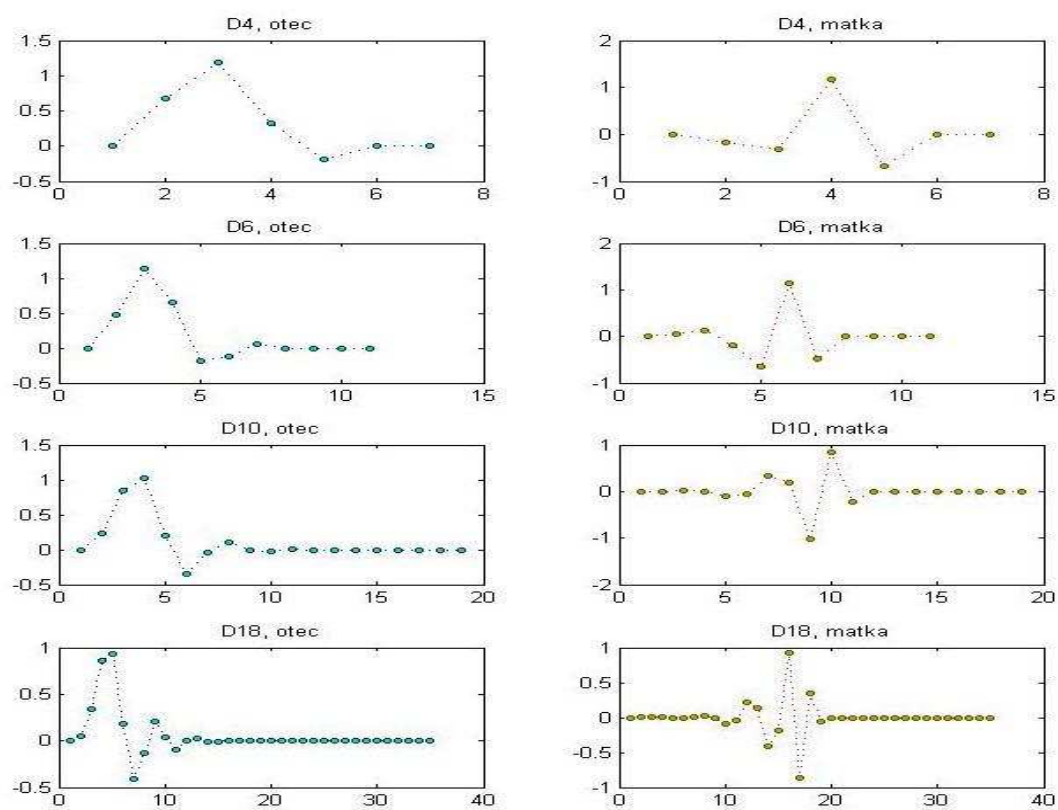
Během studia waveletové teorie jsem se potkal s několika lidmi, jenž mě přesvědčili, že waveletová analýza má významnou budoucnost. Proto bych se waveletům rád nadále věnoval a rozšířil tuto práci o waveletovou transformaci na prostoru  $\ell^2(\mathbb{Z})$  a  $L^2(\mathbb{R})$ . Již během tvorby této práce mě napadly myšlenky vedoucí ke zjednodušení použití waveletové analýzy při filtrování signálů, ale vztahují se ke spojitému prostoru, a proto bych je ponechal na případnou diplomovou práci.

# Literatura

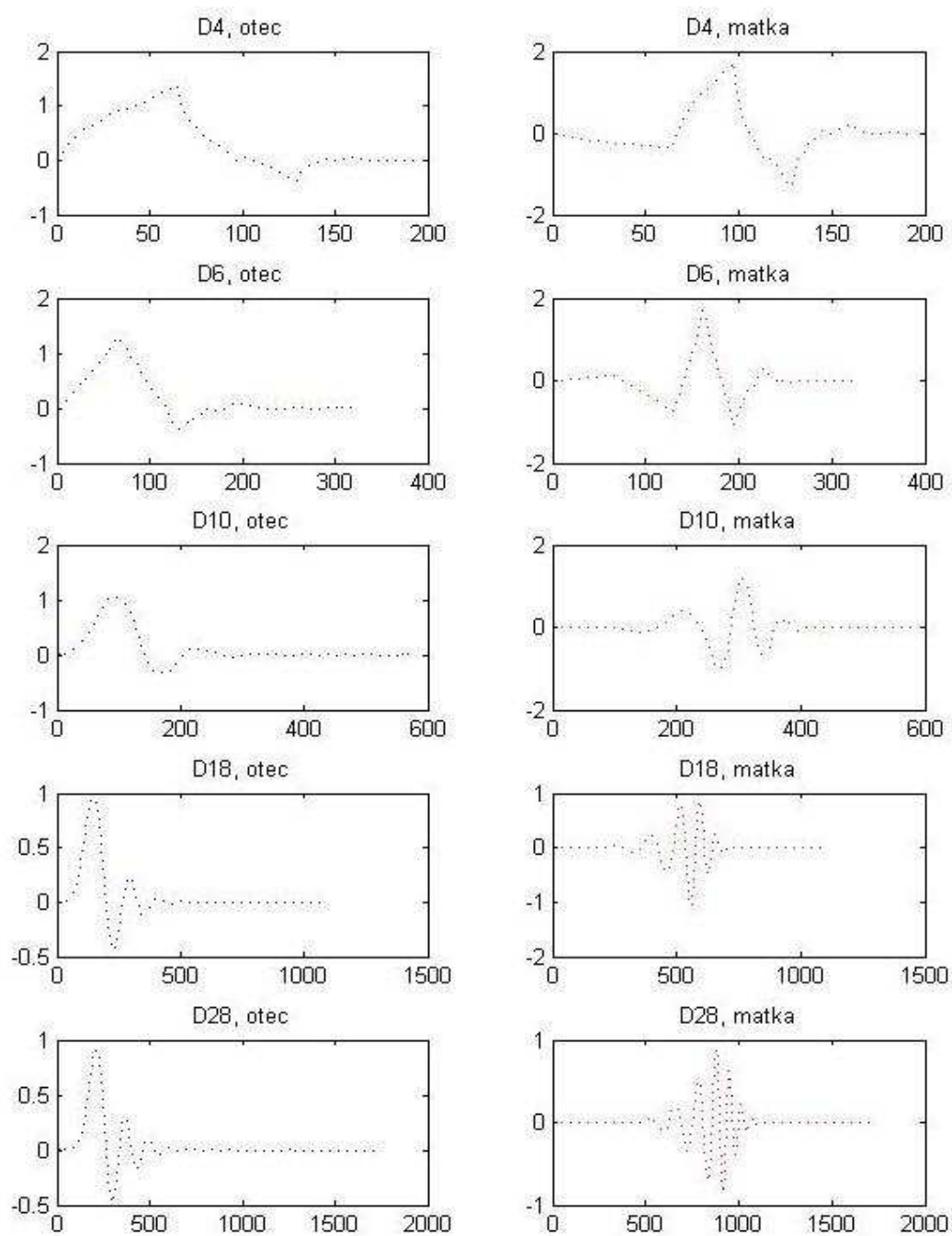
- [1] Karel Najzar: *Základy teorie waveletů*, Učební texty Univerzity Karlovy v Praze, Nakladatelství Karolinum, Praha 2004, ISBN 80-246-0957-6
- [2] Michel Misiti, Yves Misiti, Georges Oppenheim, Jean-Michel Poggi: *Wavelet Toolbox User's Guide*, The MathWorks, Inc., First printing, March 1996
- [3] Michael W. Frazier: *An introduction to wavelets through linear algebra*, Undergraduate text in mathematics, Springer, 1999, ISBN 0-387-98639-1
- [4] Jan Hamhalter, poznámky z přednášek z předmětu ZWT (Základy waveletové transformace) pro doktorandy na FEL ČVUT
- [5] <http://www.amara.com/IEEEwave/IEEEwavelet.html> - Internetová stránka obsahující Úvod do waveletů (anglicky)
- [6] <http://www.elektrorevue.cz/clanky/00009/> - Internetové stránky s teorií DFT a FFT
- [7] <http://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX> - Internetová stránka o psaní dokumentace v programu  $\text{\LaTeX}$
- [8] <http://www.math.uiuc.edu/hildebr/tex/theorems.html> - Internetová stránka o psaní dokumentace v programu  $\text{\LaTeX}$

# příloha A

## Ukázky filtrů D2P



Obrázek A.1: Waveletové filtry  $D2P$  na první úrovni

Obrázek A.2: Waveletové filtry  $D2P$  na šesté úrovni