

Lineární algebra – příklady

26. listopadu 2008 19:56

Značení: \mathbf{E} jednotková matice, \mathbf{E}_{ij} matice mající v pozici (i, j) jedničku a jinak nuly.

[...] ... lineární obal dané soustavy vektorů

1. Popište pomocí maticového násobení zprava nebo zleva následující maticové operace:
 - a) K prvnímu sloupci přičteme dvojnásobek druhého sloupce
 - b) Od třetího řádku odečteme první řádek

Řešení: a) vynásobení zprava maticí $\mathbf{E} + 2\mathbf{E}_{21}$

b) vynásobení zleva maticí $\mathbf{E} - \mathbf{E}_{31}$

2. Ukažte, že pro čtvercové matice \mathbf{A} a \mathbf{B} stejného řádu platí
 - a) $(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.
 - b) $(\mathbf{A}\mathbf{B})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$.

3. Pomocí matice lineárního zobrazení popište prostorovou rotaci kolem osy y o úhel $\frac{\pi}{6}$ v kladném smyslu.

Řešení: $(\sqrt{3}/2x + 0,5z, y, -0,5x + \sqrt{3}/2z)$

4. Určete obraz čtverce $\langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$ v lineárním zobrazení daným standardní maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení: Čtyřúhelník s vrcholy $(2, 0), (6, 2), (8, 2), (0, 0)$.

5. Určete zobrazení, které bodu (x, y, z) přiřadí nejbližší bod na přímce $y = 2x, z = 0$.

Řešení: $(\frac{x}{5} + \frac{2y}{5}, \frac{2x}{5} + \frac{4y}{5}, 0)$

6. Popište v \mathbb{R}^3 zobrazení, které vznikne postupnou aplikací rotace kolem osy x o úhel α a kolmé projekce do roviny xy a to v obou možných pořadích.

Řešení: a) $(x, \cos \alpha y - \sin \alpha z, 0)$

b) $(x, \cos \alpha y, \sin \alpha y)$

7. Zobrazení $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ má standardní matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Určete matici tohoto zobrazení vůči bázi a) $\{(1, 0), (1, 1)\}$ b) $\{(1, 1), (1, -1)\}$

Řešení:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Pro lineární zobrazení $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ platí $T(1, 1) = (1, 2)$; $T(-1, 1) = (2, 1)$. Nalezněte standardní matici zobrazení T .

Řešení:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

9. Lineární zobrazení $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ má vůči bázi $\{(1, 1), (-1, 2)\}$ matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Určete standardní matici.

Řešení:

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$$

10. Určete vlastní čísla a vektory matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení: $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \dots [(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, 1)]$
 $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \dots [(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, 1)]$

11. Určete vlastní čísla a vektory matice

$$\begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení: $1 \dots [(j, 1)] \quad -1 \dots [(-j, 1)]$

12. Určete vlastní čísla a vektory matice

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Řešení: $3 \dots [(1, 0, -1), (0, 1, 0)]; \quad 5 \dots [(1, 2, 1)].$

13. Určete spektrum matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení: $\sigma(\mathbf{A}) = \{1, \frac{3+\sqrt{3}j}{2}, \frac{3-\sqrt{3}j}{2}\}$

14. \mathbf{A} má vlastní číslo λ . Ukažte, že $2\lambda \in \sigma(2\mathbf{A})$.

15. \mathbf{A} je regulární matice. Ukažte, že $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ právě tehdy když $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(\mathbf{A}^{-1})$.

16. Určete matici 2×2 , která má vlastní číslo 3 s vlastním vektorem $(1, -1)$ a vlastní číslo $\frac{1}{2}$ s vlastním vektorem $(-2, 0)$.

Řešení: (Např.)

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -5/2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

17. a) Ukažte, že pro čtvercovou matici \mathbf{A} platí $\det(\mathbf{A}) = \overline{\det(\mathbf{A}^*)}$
 b) Ukažte, že $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ právě tehdy když $\bar{\lambda} \in \sigma(\mathbf{A}^*)$.
18. Řešte soustavu diferencálních rovnic.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 0,3x_n + 1,2y_n \\ y_{n+1} &= -0,1x_n + 1,5y_n \end{aligned}$$

Řešení: $\mathbf{v}_1 = (12, 6 + 2\sqrt{6})$; $\mathbf{v}_2 = (12, 6 - 2\sqrt{6})$;

Počáteční stav $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2$ přejde na (zokrouhleno) $c_1 1,39^n \mathbf{v}_1 + c_2 0,41^n \mathbf{v}_2$.

19. Z nádoby č.1 se v daném kroku přelege 2% obsahu do nádoby č.2 a současně se 1% obsahu nádoby č.2 přelege do nádoby č.1. Počáteční stav je x_0 objemu v první a y_0 objemu ve druhé nádobě. Určete vývoj po n krocích.

Řešení:

$$(x_n, y_n) = c_1(1, 2) + c_2(0,97)^n (1, -1)$$

(c_1, c_2) - souřadnice počátečního vektoru vůči bázi $\{(1, 2), (1, -1)\}$. Rovnovážný stav: poměr 1:2.

20. Čtvercová matice \mathbf{A} se nazývá řádkově stochastická, jestliže její členy jsou všechny v intervalu $< 0, 1 >$ a jestliže všechny její řádkové součty jsou rovny jedné. Ukažte, že každá řádkově stochastická matice má jedničku ve svém spektru.

21. Čtvercová matice \mathbf{A} se nazývá sloupcově stochastická, jestliže její členy jsou všechny v intervalu $< 0, 1 >$ a jestliže všechny její sloupcové součty jsou rovny jedné. Ukažte, že každá sloupcově stochastická matice má jedničku ve svém spektru.
22. Ukažte, že podobnost je relace ekvivalence na množině $M_{n \times n}$.
23. $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{n \times n}$ jsou regulární matice. Ukažte, že \mathbf{A} je podobná \mathbf{B} právě tehdy když \mathbf{A}^{-1} je podobná \mathbf{B}^{-1} .
24. Ukažte, že pro $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{n \times n}$ platí $\sigma(\mathbf{AB}) = \sigma(\mathbf{BA})$.
25. Ukažte, že všechny diagonální matice mající na diagonále stejnou množinu prvků jsou si podobné.
26. $\mathbf{A} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Pomocí diagonalizace spočtěte \mathbf{A}^k .

Řešení:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2^{k+1}} + 2^{k-1} & -\frac{1}{2^{k+1}} + 2^{k-1} \\ -\frac{1}{2^{k+1}} + 2^{k-1} & \frac{1}{2^{k+1}} + 2^{k-1} \end{pmatrix}$$

27. Ukažte, že pro čtvercovou matici $\mathbf{A} \in M_{n \times n}$ platí

$$\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}^* \mathbf{y} \rangle$$

pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$.

28. Řešte soustavu diferenčních rovnic

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{5}{4} x_n + \frac{3}{4} y_n \\ y_{n+1} &= \frac{3}{4} x_n + \frac{5}{4} y_n \end{aligned}$$

$$x_0 = a, y_0 = b.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}x_n &= a\left(\frac{1}{2^{k+1}} + 2^{k-1}\right) + b\left(-\frac{1}{2^{k+1}} + 2^{k-1}\right) \\y_n &= a\left(-\frac{1}{2^{k+1}} + 2^{k-1}\right) + b\left(\frac{1}{2^{k+1}} + 2^{k-1}\right)\end{aligned}$$

29. Diagonalizujte matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Řešení: $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, kde

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \text{diag}(2, 3, 3)$$

30. Jsou diagonalizovatelné následující matice

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & -50 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & -6 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}?$$

Řešení: a) ano b) ne

31. Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -j & 0 \\ j & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nalezněte spektrální rozklad matice \mathbf{A} (tj. vyjádření matice jako podobné diagonální prostřednictvím ortonormální matice) a vyjádřete lineární zobrazení odpovídající matici \mathbf{A} jako kombinaci jednodimenziálních projekcí.

Řešení: $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^*$, kde

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\frac{j}{\sqrt{2}} & \frac{j}{\sqrt{6}} & \frac{j}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{D} = \text{diag}(1, -1, 2).$$

Zobrazení T je dáno

$$T = P_{\mathbf{v}_1} - P_{\mathbf{v}_2} + 2P_{\mathbf{v}_3},$$

kde $\mathbf{v}_1 = (-\frac{j}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{v}_2 = (\frac{j}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $\mathbf{v}_3 = (\frac{j}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

32. Je dána matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Nalezněte spektrální rozklad matice \mathbf{A} (tj. vyjádření matice jako podobné diagonální prostřednictvím ortonormální matice) a vyjádřete lineární zobrazení odpovídající matici \mathbf{A} jako kombinaci jednodimenziálních projekcí.

Řešení: $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^*$, kde

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{45}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

a

$$\mathbf{D} = \text{diag}(1, 1, 10).$$

Zobrazení T je dáno

$$T = P_{\mathbf{v}_1} + P_{\mathbf{v}_2} + 10P_{\mathbf{v}_3},$$

kde $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{45}}(2, 4, 5)$, $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{3}(-1, -2, 2)$.

33. Nechť \mathbf{A} je pozitivně definitní matice. Ukažte, že \mathbf{A} je regulární. Ukažte, že existuje pozitivně definitní matice \mathbf{B} tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$.
34. Nalezněte ortonormální bázi složenou z vlastních vektorů matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení: $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)\}$

35. Užitím principu maxima nalezněte maximum funkce

$$f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$$

na jednotkové kružnici $x^2 + y^2 = 1$.

Řešení: Maximum 4 pro bod $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

36. Užitím principu maxima nalezněte maximum funkce

$$q(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4xy + 2xz + 2yz$$

na jednotkové sféře.

Řešení: Maximum 6 v bodě $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

37. Rozhodněte zda je křivka o rovnici

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$$

elipsa a určete její osy a polosy.

Řešení: osa $[\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)]$ s polosou $1/2$; osa $[\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)]$ s polosou $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

38. Vláda plánuje opravit x kilometrů silnic a zlepšit y hektarů lesa. Restrikce rozpočtu má tvar nerovnosti

$$9x^2 + 4y^2 \leq 36.$$

Stanovte x a y tak, aby byla za dané podmínky maximální funkce užitečnosti $u(x, y) = xy$ (utility function).

Řešení: $x = \sqrt{2}$; $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$.