MKI 1-2011

1

Je dána Möbiova transformace

$$f(z) = \frac{z+1}{z-\alpha}\,, \qquad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}\,.$$

1. Stanovte inverzní zobrazení $g(z)$ k zobrazení $f(z)$.
2. Stanovte parametr α tak, aby existovala kružnice K se středem 1, kterou transformace $f(z)$ zobrazí na kružnici $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$. Určete poloměr kružnice K.

2

1. Formulujte a dokažte Newtonovu-Leibnitzovu formuli pro křivkový integrál.
2. Nechť $f(z)$ je komplexní funkce v oblasti G. Stanovte logické vztahy mezi následujícími výroky
   (A) Křivkový integrál funkce $f(z)$ nezávisí v oblasti G na cestě.
   (B) $f(z)$ má v G primitivní funkci.
   (C) $f(z)$ je holomorfní v G.

3

Je dána funkce

$$F(p) = \frac{e^{-2p}}{p(1-e^{-4p})}\,.$$

Nechť $f(t)$ je Laplaceův vzor funkce $F(p)$. Stanovte předpisem funkci $f(t)$ na intervalech $<0,4>$ a $<10,14>$.

4

Řešte diferenční rovnici

$$y_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} 2^k y_{n-k} = a_n\,,$$

kde $y_0 = y_1 = 0$ a $(a_n) \in Z_0$ je obecná posloupnost.

MKI 2-2011

1

1. Bod ∞ je odstranitelnou singularitou funkce $f(z)$. Odvoďte vzorec pro výpočet rezidua $res_\infty f(z)$.
2. $P(z)$ a $Q(z)$ jsou polynomy, $st\,P(z) < st\,Q(z)$. Víme, že $1+j$ je kořen polynomu $Q(z)$, přičemž $Q'(1+j) = 2$. Dále víme, že $P(1+j) = 1$. Funkce $f(t)$ je Laplaceův vzor k funkci $\frac{P(z)}{Q(z)}$. Stanovte člen ve funkci $f(t)$ odpovídající pólu $1+j$.

2

Je dána funkce

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

a bod $z_0 = 1$.
Stanovte Laurentův rozvoj funkce $f(z)$ v maximálně možném mezikruží se středem z_0 tak, aby

1. rozvoj měl jen regulární část;
2. rozvoj měl nenulovou hlavní část.

V obou případech stanovte uvedená mezikruží.

3

Je dána funkce

$$f(t) = \frac{1}{2+t^2}\,.$$

a) Stanovte pomocí reziduové věty Fourierův obraz funkce $f(t)$.

b) Pomocí bodu a) řešte diderenciální rovnici

$$-y''(t) + 2\,y'(t) = h(t)\,,$$

kde $h(t)$ je obecná integrovatelná funkce.

4

a) Nalezněte reálnou a imaginární složku funkce

$$g(z) = z\,e^{-z^2}\,.$$

b) Je dána funkce

$$u(x,y) = e^{y^2-x^2}[x\cos(2xy) + y\sin(2xy)] + 2x + 5 + \alpha x^2\,,$$

kde $\alpha \in \mathbb{C}$. Stanovte α tak, aby $u(x,y)$ byla reálnou částí celistvé funkce $f(z)$. Stanovte imaginární část této funkce. Návod: Využijte části a).

MKI 3-2011

1

Je dána funkce
$$f(z) = \frac{1}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}} .$$

a) Určete hlavní část Laurentova rozvoje funkce $f(z)$ v bodě 0.

b) Vypočtěte integrál
$$\int_C \frac{1}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}} ,$$
kde C je kladně orientovaná Jordanova křivka nemající ve svém vnitřku žádnou jinou singularitu funkce $f(z)$ kromě nuly.

2

Pomocí reziduové věty vypočtěte integrál
$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{k + \sin x} , k > 1 .$$

3

Je dána funkce
$$F(p) = \frac{1}{p^2} \frac{1}{1 + e^{ap}} , a > 0 ,$$
která je Laplaceovým obrazem funkce $f(t)$.

a) Aplikujte metodu reziduí přímo na funkci $F(p)$ a vyjádřete tak $f(t)$ jako součet polynomu a Fourierovy řady.

b) Nalezněte funkční předpis pro funkci $f(t)$ na intervalu $< 0, 2a >$.

4

a) Napište definici výroku "funkce $f(z)$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ $k-$ násobný pól".

b) Bod z_0 je pólem třetího řádu funkcí $f(z)$ a $g(z)$. Jakou singularitou je bod z_0 pro funkci $f(z)g(z)$. (Zdůvodněte!)

c) Bod z_0 je pólem třetího řádu funkcí $f(z)$ a $g(z)$. Jakého typu může být singularita z_0 pro funkci $f(z) + g(z)$. (Uveďte všechny možnosti, zdůvodněte !)

MKI 4-2010

1.

(a) Nechť $f(z)$ je holomorfní funkce v nějakém okolí $U(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ a v z_0 má kořen násobnosti k. Ukažte, že potom

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z),$$

kde $g(z)$ je holomorfní funkce v okolí $U(z_0)$ a $g(z_0) \neq 0$.

(b) Nechť C je jednoduchá uzavřená (tj. Jordanova) křivka a $P(z)$ je polynom, který je nenulový na C. Předpokládejte, že uvnitř C leží právě jeden kořen $P(z)$ násobnosti $k \geq 1$. Ukažte, že potom

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P'(z)}{P(z)} dz = k.$$

Návod: Použijte tvrzení dokazované v bodě (a).

2. Je dána funkce

$$f(z) = \frac{2z^2 - 2z + 1}{z^2(z-1)}.$$

(a) Nalezněte Laurentovu řadu funkce $f(z)$ v maximálním prstencovém okolí bodu $z_0 = 1$ a toto okolí určete.

(b) Klasifikujte všechny izolované singularity v $\mathbb{C}$ (u pólu určete i jeho řád) funkcí

$$g(z) = \frac{1}{(z-1)^{25}} f(z) \qquad \text{a} \qquad h(z) = \frac{1}{(z-1)^{30}} + f(z).$$

Dále nalezněte reziduum funkcí $g(z)$ a $h(z)$ v bodě $z_0 = 1$.

3. Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení $y(t) \in L^1(\mathbb{R})$ diferenciální rovnice

$$y'(t) + 2y(t) = e^{-|t|}.$$

4. Pomocí Z-transformace řešte diferenční rovnici

$$y_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} k y_{n-k} = n$$

s počáteční podmínkou $y_0 = 0$.

MKI 5-2011

1

Pomocí komplexní analýzy vypočtěte integrál

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x(x+1)}\, dx\,.$$

Načrtněte křivku přes kterou integrujete.

2

Jsou dány funkce

$$f(t) = \mathbf{1}(t+1) - \mathbf{1}(t-1)$$
$$g(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)\,.$$

a) Stanovte konvoluci

$$h(t) = f(t) * g(t)$$

a nakreslete její graf.

b) Určete Fourierovu transformaci $H(p)$ funkce $h(t)$.

c) Pomocí Fourierovy transformace stanovte Fourierovu řadu funkce

$$u(t) = h(t)\,, \qquad t \in < -1, 2 > \,.$$

3

a) Formulujte větu o Taylorově rozvoji pro holomorfní funkce.

b) Odvoďte integrální vyjádření koeficientů Taylorova rozvoje.

c) Nechť $f(z)$ je funkce holomorfní v kruhu $K = \{z \mid |z| \le 1\}$. Víme, že $\max_{z\in K} |f(z)| = 10$. Ukažte, že pro koeficienty a_n Taylorova rozvoje funkce $f(z)$ se středem v počátku platí nerovnost

$$|a_n| \le 10 \cdot 2^n\,, \qquad n = 0, 1, \ldots\,.$$

4

a) Stacionární časová řada $(X_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ má jednorozměrnou kovarianční funkci $R(n)$, pro kterou platí

$$R(n) = \frac{1}{3^n}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots\,.$$

Rozptyl procesu je $\sigma^2 = 2$. Stanovte spektrální hustotu $f(\lambda)$.

b) Spojitý stacionární proces $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ má jednorozměrnou kovarianční funkci

$$R(t) = 3^{-|t|}\cos(2t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Stanovte spektrální hustotu $f(\lambda)$.

MKI 6-2011

1

a) Definujte poloměr konvergence mocninné řady.

b) Udejte vztah mezi poloměry konvergence řad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^n z^n$. (Zdůvodněte !)

c) Uveďte příklad mocninné řady s poloměrem konvergence $R = 0, 1, \infty$.

2

a) Stanovte hlavní část Laurentova rozvoje funkce

$$f(z) = \frac{e^{-(z-1)^2} \cdot \ln z}{(z-1)^3}$$

se středem v bodě 1.

b) Stanovte a klasifikujte singularity funkce

$$g(z) = f(z) + \frac{\cos \frac{\pi}{2} z}{(z-1)^2}\,.$$

c) Vypočtěte $\operatorname{res}_1 g(z)$.

3

Funkce $f(t)$ má Fourierovu transformaci $F(p)$. Stanovte Fourierovu transformaci následujících funkcí

a) $g(t) = tf(2t+1)$

b) $h(t) = f'(t) \sin t$.

4

Je dána funkce

$$F(z) = \ln \frac{z}{z-a}\,, \qquad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,.$$

a) Nalezněte inverzní Z-transformaci funkce $F(z)$.

b) Nalezněte (ve tvaru mocninné řady) inverzní Laplaceovu transformaci funkce $F(z)$.

MKI 7-2011

1

a) Formulujte a pomocí Cauchyovy věty dokažte princip deformace křivky. Nakreslete obrázek.

b) Definujte konformní zobrazení a ukažte, že zachovává úhly.

c) Na základě bodu b) stanovte úhel mezi křivkami s parametrizacemi $\varphi(t) = e^t$ a $\psi(t) = e^{2jt}$, $t \in \mathbb{R}$, v bodě 1.

2

Vypočtěte

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2-1)(x^2+a^2)}\, dx \,, a > 0\,.$$

Nakreslete integrální křivku.

3

Nalezněte součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n\, n} z^n$$

v kruhu konvergence a nelezněte poloměr tohoto kruhu.

4

Je dána funkce

$$F(p) = \frac{1 - e^{-2p} + pe^{-p}}{p^2(1 - e^{-2p})}\,.$$

a) Klasifikujte všechny izolované singulární body funkce

$$G(p) = F(p) + \frac{1 - e^{p-1}}{p-1}$$

v $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

b) Nalezněte (analyticky) inverzní Laplaceovu transformaci $f(t)$ funkce $F(p)$ a určete $f(100)$.

MKI 8-2011, Červen

1

a) Popište a zdůvodněte způsob výpočtu určitého integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx\,,$$

pomocí reziduové věty, kde P a Q jsou polynomy s reálnými koeficienty, Q nemá kořeny na reálné ose a stupeň Q je alespoň o dva větší než stupeň P. Postup zdůvodněte.

b) Vypočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2+x^2)^2}\, dx\,, a > 0\,.$$

2

Je dána funkce

$$u(x,y) = 2\,\mathrm{arctg}(\frac{x}{y}) - 2x - y\,.$$

Stanovte funkci $v(x,y)$ tak, aby funkce

$$f(z) = u(x,y) + j\,v(x,y)$$

byla holomorfní.

3

Stanovte Laurentův rozvoj funkce

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^2} + z^3 - z\,, a \in \mathbb{C}\,,$$

v maximálně možném okolí nekonečna. Stanovte parametr tohoto okolí!

4

Řešte diferenciální rovnici

$$y'(t) + y(t) = g(t)\,, y(0) = 0\,,$$

kde $g(t)$ má Laplaceův rozvoj

$$G(p) = \frac{1}{(p+2)(1-e^{-p})}\,.$$