MKI 1-2010

1

Funkce $f(z)$ má singularitu v bodě 0.

a) Stanovte oblast, ve které konverguje hlavní část Laurentova rozvoje funkce $f(z)$ v bodě 0. V jakém rozmezí se může pohybovat poloměr konvergence regulární části tohoto rozvoje?

b)

$$H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$$

je hlavní část Laurentova rozvoje funkce $f(z)$ v bodě 0. Stanovte funkci

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_{-n}}{2^{n+1} z^{n+1}}$$

a určete její definiční obor.

c) Použitím integrálního vyjádření koeficientů Laurentova rozvoje funkce $H(z)$ v bodě nula dokažte následující tvrzení: Pro každé $R > 0$ existuje konstanta $M \geq 0$ tak, že

$$|a_{-n}| \leq MR^n$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka:
1a) viz strany slidů 144-145, vyplývá z definice singularity, vnitřní poloměr je nula
1b) integrace člen po členu např. slidy strana 126-127
1c) slide strana 282, též skripta cv 9, str. 119

2

Je dána funkce $f(t) = \frac{1}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}$, $a \neq b$, $a, b > 0$.

a) Pomocí reziduové věty určete Fourierovu transformaci $F(p)$ funkce $f(t)$.

b) Určete Fourierovu transformaci funkce $g(t) = \cos t \cdot f(2t)$.

Poznámka:
2a) Zcela typický příklad - slide str. 213, příklad na str. 215, příklad č. 15 z elektronické sbírky (pro konkrétní a a b, princip stejný), též elektronická sbírka příklad č. 3, ... plus řada dalších příkladů ze cvičení...
2b) typický příklad na gramatiku, slide 225, modulace pronásobením funkcí kosinus byla též uvedena jako příklad na tabuli na přednášce.

3

Laplaceův obraz funkce $f(t)$ je funkce

$$F(p) = \frac{1}{(p-a)(p-b)(1-e^{-p})},$$

kde $a, b \neq 0$ $a \neq b$. Stanovte vzorcem $f(t)$ na intervalu $< 100, 101 >$.
Poznámka: typický příklad - slide p. 278 pro konkrétní hodnoty a, b; elektronická sbírka příklad č. 15, řada příkladů – přednáška tabule a cvičení ....

4

Zaměstnaný člověk ztratí v daném měsíci práci s pravděpodobností 0,05. Nezaměstnaný člověk najde v daném měsíci práci s pravděpodobností 0,45. X_k je náhodná veličina, která přiřazuje náhodně vybrané osobě v $k-$ tém měsíci jeden ze dvou stavů "zaměstnaná" a "nezaměstnaná".

a) Zdůvodněte, že $X_k, k = 0, 1, \ldots$, je homogenní Markovův řetězec a nalezněte jeho matici pravděpodobností přechodu.

b) Na začátku je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba je nezaměstnaná $0,05$. Stanovte pravděpodobnost p_n, že náhodně vybraná osoba v $n-$ tém měsíci je zaměstnaná.

c) Klasifikujte stavy daného Markovova řetězce.

Poznámka:
4a) viz definice slide p. 373
4b) přesně jako na příkladu slide p. 379 – Př 11. 38.; místo zdravý a nemocný stavy zaměstnaný a nezaměstnaný, konkrétně zadaná hodnota p.
4c) obdoba příkladu ze slidu p. 384 – Př 11. 41.

MKI 2-2010

1

(Všechny odpovědi je nutno zdůvodnit!)
Funkce $f(z)$ má singularitu v bodě 0.

a) Předpokládejme, že 0 je podstatná singularita. Stanovte typ singularity 0 pro funkce $g(z) = z^{100} f(z)$ a $h(z) = \frac{f(z)}{z^{100}}$.

b) Stanovte $\lim_{z \to 0} f(z)$ za předpokladu, že 0 je jednoduchý pól funkce $f(z)$.

c) Předpokládejme, že existuje konstanta $M \geq 0$, přirozené číslo $k \in \mathbb{N}$, a prstencové okolí nuly P tak, že pro všechna $z \in P$ platí nerovnost

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^k}\,.$$

Jakého typu může být singularita 0?

Poznámka:
1a) řešeno na cvičení, jinak též skripta Cv 2, 8, str. 146 (elektronická verze skript p. 143-144).
1b) přímo z definice pólu vyplývá, že limita je nekonečno
1c) vyplývá z diskuze rychlosti konvergence v pólu na přednášce - slidy p. 160-161. Podobná cvičení skripta 7-11 p. 146 (elektronická verze skript p. 144).

2

Je dána funkce

$$f(z) = \frac{z+1}{z-\alpha}\,,$$

kde $\alpha \in \mathbb{C}$. Určete obraz $f(D)$ jednotkového otevřeného kruhu

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}\,.$$

(Proberte všechny případy v závislosti na α !)
Poznámka:
příklady na slidech 56, 57 využívají kruhovou inverzi ze slidu p. 17

3

a) Pomocí reziduové věty nalezněte Fourierův obraz funkce

$$f(t) = \frac{1}{1+2t^2}\,.$$

b) Pomocí předchozího výsledku řešte diferenciální rovnici

$$-2y''(t) + y(t) = h(t)\,,$$

kde $h(t) \in L^1(\mathbb{R})$. (Výsledek vyjádřete v integrálním tvaru!)

Poznámka:
3a) slide str. 215, elektronická sbírka příklad č. 5, řada příkladů na cvičeních... Není nic typičtějšího ...

3b) Obdobné jako na slidu č. 235, též elektronická sbírka příklad č. 17, řada příkladů na cvičeních,...

4

Posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ má Z-obraz $F(z) = \mathrm{Ln}\,\frac{z+1}{z-1}$.

a) Stanovte posloupnost (a_n).

b) Stanovte $Z(na_n)_{n=0}^{\infty}$.

Poznámka:
4a) Analogie příkladu č. 6 skripta p. 119 (elektronická verze skript p. 117) - z rozvoje se hned odečtou koeficiety.
4b) Jen věta o derivaci Z-obrazu (slide p.291)!

MKI 3-2010

1

(Všechny odpovědi je nutno zdůvodnit!)

a) Funkce $F(z)$ má k-násobný pól v bodě 0 a Laurentův rozvoj $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. Stanovte $\lim_{z\to 0} z^l F(z)$ v závislosti na celočíselném parametru l.

b) Funkce $f(z)$ je holomorfní v otevřeném kruhu $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Pro každý bod $z_0 \in D$ platí, že koeficient a_2 v Taylorově rozvoji funkce $f(z)$ se středem v bodě z_0 je roven nule. Čemu je rovna funkce $f(z)$?

Poznámka:
1a) Aplikace věty 6.12 slide p.163
1b) příklad na Taylorův rozvoj, příklad skripta 12 p. 96 (elektronická verze skript p. 93)

2

C je kladně orientovaná kružnice $|z| = 1/2$. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{Z}$ určete integrál

$$\int_C \left(\frac{z^3 + z + 1}{z^\alpha} + \frac{z+1}{1 - \cos z} \right) dz\,.$$

Poznámka:
první sčítanec standardní reziduum, druhý analogie Úlohy na str. 143 ve skriptech (elektronická verze skript p. 140), podobný příklad na cvičení, podobný příklad skripta p. 167 (elektronická verze skript p. 165) atd.

3

Je dána diferenciální rovnice

$$y'(t) + y(t) = h(t)\,,$$

$y(0) = 0$, kde funkce $h(t)$ má Laplaceův obraz

$$H(p) = \frac{1}{(1 - e^{-p})(p-2)}\,.$$

Nalezněte $y(t)$ na intervalu $< 2, 3 >$.
Poznámka:
metoda odštěpení pólu, podobné slide p. 278, řešené příklady na přednášce, elektronická sbírka 18-21.

4

Určete korelační funkci stacionárního procesu, jehož spektrální hustota je

$$f(\lambda) = \frac{2 + \lambda^2}{4 + \lambda^4}\,.$$

Poznámka:
Analogie příkladu na slidu p. 367.

MKI 4-2010

Všechny odpovědi je nutno zdůvodnit!

1. Nechť funkce $f(z)$ je celistvá (tj. holomorfní v $\mathbb{C}$) a $|f(z)| \le |z|$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Dokažte, že potom $f(z) = \alpha z$, kde $\alpha \in \mathbb{C}$.
   Poznámka:
   Aplikace Liouvilleovy věty ze slidu p. 105.

2. Je dána funkce
$$f(z) = \frac{3z+4}{z(z+2)^2}.$$
   (a) Nalezněte Laurentovu řadu funkce $f(z)$ v prstencovém okolí bodu $z_0 = 0$.
   (b) Určete reziduum funkce
$$g(z) = \frac{1}{z^{50}} f(z)$$
   v bodě $z_0 = 0$.

   Poznámka:

   (a) Typický příklad, slidy p. 152-154.
   (b) Definice rezidua + bod a); stačí pouze zjistit hodnotu příslušného koeficientu v Laurentově rozvoji funkce $g(z)$.

3. Vypočtěte
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x(x^2+b^2)} dx,$$
   kde $a, b > 0$.
   Poznámka:
   Naprosto typický příklad - "teorie" potřebná k výpočtům je na slidech p. 188 a p. 190. Je možné také využít přímo vzorec ze skript p. 162 (elektronická verze skript p. 160). Obdobné příklady lze nalézt např. ve skriptech p. 172 (elektronická verze skript p. 170).

4. Nechť $\alpha \in \mathbb{C}$ a $(a_n) \in Z_0$. Pomocí Z-transformace nalezněte řešení diferenční rovnice
$$y_{n+1} + y_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} a_k$$
   s počáteční podmínkou $y_0 = 0$.
   Poznámka:
   Další typický příklad - podobný příkladu ze slidu p. 326.

MKI 5-2010

1

(Všechny odpovědi je nutno zdůvodnit!)
$P(z)$ a $Q(z)$ jsou polynomy s reálnými koeficienty, které namají kořeny na reálné ose. Polynom $P(z)$ má stupeň n a polynom $Q(z)$ má stupeň $n+2$.

a) Stanovte

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{jz}\, dz\,,$$

kde $C_R = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0, |z| = R\}$.

b) Předpokládejme, že všechny kořeny polynomu Q leží v kruhu $|z| < R$. Uvažujme kladně orientované křivky $K_R = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0, |z| = R\} \cup [-R, R]$ a $H_R = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0, |z| = R\} \cup [-R, R]$. Ukažte, že

$$\int_{K_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = -\int_{H_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz\,.$$

Poznámka:
1a) Jednodušší verze nerovností v Jordanově lemmatu - slidy 184-187; též slidy 180 a skripta strana 155, 156 (elektronická verze skript p. 153-154).
1b) Reziduová věta + důsledek 7.2. ze slidu p. 175

2

Je dána funkce

$$F(z) = \ln(1 + \frac{1}{z^4})\,.$$

a) Stanovte Laplaceův vzor k funkci $F(z)$ (ve formě Taylorova rozvoje).

b) Stanovte inverzní Z-transformaci funkce $F(z)$. Napište prvních deset členů.

Poznámka:
2a) Přímo rozvoj v okolí jedna slide p. 136, ještě přímočařeji slide p. 154 + Věta ze slidu p. 247.
2a) Definice Z-transformace + bod a)

3

Je dána diferenční rovnice

$$y_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} \alpha^k\, y_{n-k} = 1\,,$$

kde $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je parametr a $y_0 = y_1 = 0$.

a) Určete Z-obraz poslupnosti $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ (pro obecný parametr α).

Nyní řešte jednu z následujících úloh:

b) Pro jaké α je řešení zadané lineární rovnice lineární kombinací mocninných posloupností? (Nutno zdůvodnit !)

c) Nalezněte řešení dané diferenční rovnice pro hodnotu parametru $\alpha = -2$.
Poznámka:
3a) Příklad na slidu p. 326 pro $\alpha = 2$, elektronická sbírka příklad 25.
3c) Příklad na slidu p. 326, elektronická sbírka příklad 25.

4

$(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}^{\infty}$ je časová řada bílého šumu s rozptylem σ^2 a nulovou střední hodnotou. Definujme posloupnost klouzavých součtů vztahem

$$X_n = Y_n + 3Y_{n-1} + Y_{n-2}\,, n \in \mathbb{Z}\,.$$

a) Stanovte jednorozměrnou kovarianční funkci $R(n)$ procesu (X_n). Nakreslete její graf!

b) Stanovte spektrální hustotu procesu $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ ve tvaru trigonometrického polynomu.

Poznámka:
Příklad ze slidu p. 372, resp. p. 361, jen změněny koeficienty.

MKI 6-2010

1

Je dána racionální funkce $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, kde polynom $P(z)$ má stupeň n a polynom $Q(z)$ stupeň m ostře větší než n.

a) Stanovte $\mathrm{res}_\infty R(z)$.

b) Předpokládejme, že $Q(z)$ má pouze jednoduché kořeny. Ukažte, že funkce

$$f(t) = \sum_{\{\alpha \in \mathbb{C} \mid Q(\alpha)=0\}} \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)} e^{\alpha t}$$

je inverzní Laplaceova transformace funkce $R(p)$.

Poznámka:
1a) Přímo řešený příklad skripta p. 145 (elektronická verze skript p. 142).
1b) Dosazení do vzorce ze slidu 260 + Tvrzení 6.15 ze slidu 169.

2

Je dána reálná funkce dvou proměnných

$$u(x, y) = x + 2y + \alpha\, x^2 - y^2 + e^x \cos y\,,$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Stanovte α tak, aby $u(x, y)$ byla reálnou částí celistvé funkce.

b) Pro tato α stanovte všechny celistvé funkce s reálnou částí rovnou funkci $u(x, y)$.

Poznámka:
2a) podmínka harmoničnosti – slide p. 47
2b) podobně jako úloha ze skript p. 39 dole (elektronická verze skript p. 37) + další příklady na cvičení.

3

Je dána funkce

$$f(t) = t \cdot (\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1))\,.$$

a) Stanovte Fourierovu transformaci funkce $f(t)$.

b) Stanovte inverzní Fourierovu transformaci funkce $g(t) = f(2t + 1)$.

c) Pomocí bodu a) stanovte komplexní Fourierovy koeficienty funkce $f(t)$ na intervalu $< 0, 1 >$.

Poznámka:
3a) přímo z definice Fourierovy transformace
3b) jen základní gramatika
3c) viz slide p. 216

4

Je dána funkce

$$F(p) = \frac{1}{(p-a)^k(1-e^{-2p})}\,,$$

kde $a \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$. Funkce $f(t)$ je Laplaceův vzor funkce $F(p)$.

a) Na základě metody odštěpení pólů stanovte kvalitativně neustálenou složku funkce $f(t)$.

b) Pro případ $a = 0$ a $k = 1$ nalezněte pomocí metody reziduí sínově-kosínový tvar Fourierovy řady periodické části funkce $f(t)$.

Poznámka:
4a) stačí citovat slide p. 271, mnohokrát modelové příklady na přednášce i cvičení
4b) podobně jako příklad 9.24 ze slidu p. 275 + příklady na cvičení + příklady v elektronické sbírce (např. 14).