5. Lineární diferenciální rovnice *n*-tého řádu

(rovnice s konstantními koeficienty)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x)\,, \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y$, q je spojitá na $I = (a, b)$, $a < b$.

Z obecné teorie vyplývá, že množina všech řešení rovnice (5.1) na intervalu I (tzv. obecné řešení) je množina

$$\hat{y} + \ker(L)\,,$$

kde $\hat{y}$ je libovolně vybrané řešení partikulární (na I), tj. řešení rovnice s pravou stranou q,

$$L[\hat{y}] = q\,, \tag{5.2}$$

a $\ker(L)$ je množina všech řešení přidružené rovnice homogenní, tj.

$$\tilde{y} \in \ker(L) \Leftrightarrow L[\tilde{y}] = 0\,.$$

Skutečnost, že se dále vždy bude jednat o řešení na intervalech spojitosti funkce q, nebude dále vždy zdůrazňována.

Dále je známo, že $\dim(\ker(L)) = n$ a tedy v prostoru $\ker(L)$ existuje báze o n prvcích $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Lze tedy každé řešení rovnice (5.1) psát ve tvaru

$$y = \hat{y} + c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + \cdots + c_n\, y_n$$

kde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jsou nějaké konstanty.

Uvedenými poznatky jsou motivovány dále uvedené kroky řešení rovnice.

Postup řešení lineární diferenciální rovnice *n*-tého řádu s konstantními koeficienty

1. Vyhledání báze množiny všech řešení homogenní rovnice (stanovení fundamentálního systému), tj. nalezení n-tice **lineárně nezávislých** řešení $y_1, y_2, \ldots, y_n$ homogenní diferenciální rovnice, tj.

   $L[y_k] = 0,\ k = 1, \ldots, n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$, lineárně nezávislé.

2. Stanovení partikulárního řešení $\hat{y}$, tj. nalezení alespoň jedné funkce, která řeší diferenciální rovnici s pravou stranou q.
3. Konstrukce obecného řešení ve tvaru

$$y = \hat{y} + c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + \cdots + c_n\, y_n\,.$$

4. Je-li řešena počáteční úloha, stanovení konstant $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tak, aby řešení vyhovělo počátečním podmínkám („přizpůsobení konstant“).

Fundamentální systém.
Nechť $L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y$. Jestliže $y(x) = e^{\lambda x}$, pak $L[y(x)] = L[e^{\lambda x}] =$ $(e^{\lambda x})^{(n)} + a_1 (e^{\lambda x})^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(e^{\lambda x})' + a_n (e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}\left(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n\right)$. Tedy platí:

$$L[e^{\lambda x}] = 0 \ \underline{\textbf{právě když}}\ \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{5.3}$$

Polynom $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ je tzv. **charakteristický polynom** diferenciální rovnice $L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$, vznikne z diferenciální rovnice snadno záměnou $y^{(k)} \to \lambda^k$, $k = 0,\ldots,n$, ($y = y^{(0)} \to \lambda^0 = 1$). Z rovnice (5.3) vyplývá, že funkce $y(x) = e^{\lambda x}$ je řešením lineární homogenní diferenciální rovnice $L[y] = 0$ právě když koeficient λ je kořenem charakteristického polynomu této rovnice. Pokud má charakteristický polynom právě n navzájem různých (obecně komplexních) kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, pak můžeme snadno sestavit n lineárně nezávislých řešení, tj. fundamentální systém, $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$. Důkaz lineární nezávislosti takto sestrojených funkcí provedeme v následující větě, zato i pro případ vícenásobných kořenů. Má-li charakteristický polynom vícenásobné kořeny je situace složitější.

Věta 5.1 (konstrukce fundamentálního systému - báze ker(L))
Nechť charakteristický polynom lineární diferenciální rovnice

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{5.4}$$

má právě k, $k \le n$, navzájem různých (komplexních) kořenů s násobnostmi $n_1, n_2, \ldots, n_k$, tj. platí:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k},$$

kde $$i \ne j \Rightarrow \lambda_i \ne \lambda_j, \qquad n_1 + \cdots + n_k = n.$$

Pak dále uvedené funkce tvoří fundamentální systém (bázi ker(L)) rovnice (5.4):

$$\begin{array}{ccccc}
e^{\lambda_1 x}, & x e^{\lambda_1 x}, & x^2 e^{\lambda_1 x}, & \cdots, & x^{n_1 - 1} e^{\lambda_1 x}, \\
e^{\lambda_2 x}, & x e^{\lambda_2 x}, & x^2 e^{\lambda_2 x}, & \cdots, & x^{n_2 - 1} e^{\lambda_2 x}, \\
e^{\lambda_3 x}, & x e^{\lambda_3 x}, & x^2 e^{\lambda_3 x}, & \cdots, & x^{n_3 - 1} e^{\lambda_3 x}, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
e^{\lambda_k x}, & x e^{\lambda_k x}, & x^2 e^{\lambda_k x}, & \cdots, & x^{n_k - 1} e^{\lambda_k x}.
\end{array} \tag{5.5}$$

Poznámka 5.1
Funkce v (5.5) typu „polynom × exponenciála“ se nazývají *kvazipolynomy*. Než přistoupíme k důkazu **Věty 5.1**, prozkoumejme chování těchto kvazipolynomů z hlediska derivace.

(1) *Derivace kvazipolynomu je kvazipolynom*. Je totiž

$$\left(P(x)e^{\lambda x}\right)' = \left(\lambda P(x) + P'(x)\right)e^{\lambda x}$$

kde $P(x) = p_m x^m + p_{m-1}x^{m-1} + \cdots + p_1 x + p_0$ je nějaký polynom. Pak ovšem

$$\lambda P(x) + P'(x) = \lambda p_m x^m + (\lambda p_{m-1} + m p_m)x^{m-1} + \cdots + (\lambda p_1 + 2p_2)x + \lambda p_0 + p_1, \qquad (5.6)$$

je opět polynom.

(2) *Pokud* $\lambda \neq 0$ *derivace nemění stupně polynomů*. Tento poznatek plyne ze vztahu (5.6), tj.:

$$\lambda \neq 0 \Rightarrow \mathrm{st}(P) = \mathrm{st}(\lambda P + P').$$

(3) *Pokud* $\lambda \neq 0$ *pak derivace zachovává nulové polynomy, tj.* $P = 0 \Leftrightarrow \lambda P + P' = 0$. Je-li P nulový polynom, pak $\lambda P + P'$ je nutně taky nulový polynom. Je-li $\lambda P + P'$ nulový polynom, pak P nemůže být nenulový, jinak by neplatilo tvrzení v bodě (2).

Pro snazší vyjadřování definujme stupeň kvazipolynomu vztahem $\mathrm{st}(Pe^{\lambda x}) := \mathrm{st}(P)$. Pokud tedy $\lambda \neq 0$ derivování zachovává stupeň a nulovost kvazipolynomů.

■ (důkaz **Věty 5.1**)
(a) Funkce (5.5) jsou LN. Napišme nulovou lineární kombinaci všech funkcí z (5.5), dostaneme:

$$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_{n_1} x^{n_1 - 1} e^{\lambda_1 x} + c_{n_1+1} e^{\lambda_2 x} + c_{n_1+2} x e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_{n_1+n_2} x^{n_2-1} e^{\lambda_2 x} + \cdots$$
$$\cdots + c_{n-n_k+1} e^{\lambda_k x} + c_{n-n_k+2} x e^{\lambda_k x} + \cdots + c_{n-n_k+n_k} x^{n_k-1} e^{\lambda_k x} = 0. \qquad (5.7)$$

Je zřejmé, že (5.7) je možno psát ve tvaru

$$P_{10}(x)e^{\lambda_1 x} + P_{20}(x)e^{\lambda_2 x} + \cdots + P_{k0}(x)e^{\lambda_k x} = 0, \qquad (5.8)$$

kde jsme označili:

$$\begin{aligned} P_{10}(x) &= c_1 + c_2 x + \cdots + c_{n_1} x^{n_1-1}, \\ P_{20}(x) &= c_{n_1+1} + c_{n_1+2} x + \cdots + c_{n_1+n_2} x^{n_2-1}, \\ &\vdots \\ P_{k0}(x) &= c_{n-n_k+1} + c_{n-n_k+2} x + \cdots + c_{n-n_k+n_k} x^{n_k-1}. \end{aligned} \qquad (5.9)$$

Naším cílem je ukázat, že koeficienty $c_1, c_2, \ldots, c_n$, v lineární kombinaci (5.7) nemohou být nenulové, tj. polynomy P_{i0} v rovnici (5.8) musí nutně být nulové. Za tím účelem rovnici (5.8) vydělíme exponenciálou $e^{\lambda_1 x}$, dostaneme

$$P_{10}(x) + P_{20}(x)e^{\lambda_{21} x} + \cdots + P_{k0}(x)e^{\lambda_{k1} x} = 0, \qquad (5.10)$$

kde jsme označili $\lambda_{i1} := \lambda_i - \lambda_1 \neq 0$, protože čísla λ_i jsou po dvou různá čísla (tj. platí $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$), jsou čísla λ_{i1} nenulová a jsou opět po dvou různá.

Nyní budeme několikrát po sobě derivovat rovnici (5.10) tak dlouho, až polynom $P_{10}(x)$ vymizí. Po této operaci bude mít výsledná rovnice (5.10) tvar:

$$P_{21}(x)e^{\lambda_{21}x} + \cdots + P_{k1}(x)e^{\lambda_{k1}x} = 0, \tag{5.11}$$

kde podle **poznámky 5.1** budou zachovávány stupně i nulovosti kvazipolynomů, tj. $\mathrm{st}(P_{i1}) = \mathrm{st}(P_{i0})$ a $P_{i1} = 0 \Leftrightarrow P_{i0} = 0$, $i = 2,\ldots,k$.

Nyní na rovnici (5.11) aplikujme stejný postup jako na (5.10), tj. vydělme $e^{\lambda_{21}x}$ a „vyderivujme“ polynom $P_{21}(x)$. Dostaneme

$$P_{32}(x)e^{\lambda_{32}x} + \cdots + P_{k2}(x)e^{\lambda_{k2}x} = 0,$$

kde jsme označili $\lambda_{i2} := \lambda_{i1} - \lambda_{21} = \lambda_i - \lambda_2 \neq 0$, opět po dvou různá nenulová čísla a opět $\mathrm{st}(P_{i2}) = \mathrm{st}(P_{i1})$ a $P_{i2} = 0 \Leftrightarrow P_{i1} = 0$, $i = 3,\ldots,k$. Takto budeme postupovat dokud v rovnici zbude jediný kvazipolynom.

Zapišme poslední dva kroky tohoto postupu, tj. $k - 2$ a $k - 1$ krok. Dostaneme

$$P_{k-1\,k-2}(x)e^{\lambda_{k-1\,k-2}x} + P_{k\,k-2}(x)e^{\lambda_{k\,k-2}x} = 0, \tag{5.12}$$

$$P_{k\,k-1}(x)e^{\lambda_{k\,k-1}x} = 0. \tag{5.13}$$

Z poslední rovnice vyplývá, že polynom $P_{k\,k-1}$ je nulový, pak ovšem musí být podle **poznámky 5.1** nulové i polynomy $P_{k\,k-j}$, $j = 1\ldots k$. Odtud vyplývá, že P_{k0} je nulový polynom. Z rovnice (5.12) plyne i nulovost polynomu $P_{k-1\,k-2}$ a tedy nakonec nulovost že $P_{k-1\,0}$ a obdobně všech ostatních polynomů (5.9). Odtud plyne nulovost všech koeficientů c a tedy lineární nezávislost funkcí (5.5).

(b) Skutečnost, že funkce (5.5) jsou řešením homogenní rovnice (5.4) dokážeme později s využitím vhodnějšího aparátu. ■

Příklad 5.1

Stanovme obecné řešení diferenciální rovnice $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$.

Pro charakteristický polynom zadané rovnice platí:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 8 = \lambda^3 + 2^3 - 2\lambda(\lambda + 2) = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 4 - 2\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 2)^2.$$

Polynom má tedy dva různé kořeny, z toho kořen 2 je dvojnásobný. Podle **Věty 5.1** tomu odpovídá fundamentální systém $\left\{e^{-2x}, e^{2x}, xe^{2x}\right\}$.

Obecným řešením zadané homogenní rovnice bude libovolná lineární kombinace „vektorů báze“, tj.:

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 xe^{2x}.$$

Příklad 5.2 (komplexní kořeny charakteristického polynomu)
Stanovme obecné řešení diferenciální rovnice $y''' + 3y'' + 2y' + 6y = 0$.

Pro charakteristický polynom zadané rovnice platí:

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 6 \;=\; \lambda^2(\lambda+3) + 2(\lambda+3) \;=\; (\lambda+3)(\lambda^2+2) \;=\; (\lambda+3)(\lambda - i\sqrt{2})(\lambda + i\sqrt{2}).$$

Podle **Věty 5.1** kořenům polynomu odpovídá fundamentální systém

$$\left\{e^{-3x}, e^{i\sqrt{2}x}, e^{-i\sqrt{2}x}\right\}. \tag{5.14}$$

Nevýhodou této báze je její komplexní charakter, $e^{i\sqrt{2}x} = \cos(\sqrt{2}\,x) + i\sin(\sqrt{2}\,x)$, $e^{-i\sqrt{2}x} = \cos(\sqrt{2}\,x) - i\sin(\sqrt{2}\,x)$, takže reálná řešení dané diferenciální rovnice je nutno vyjadřovat lineárními kombinacemi s komplexními koeficienty, což se může v konkrétních případech jevit jako nepraktické. V každém vektorovém prostoru, tedy i v ker(L), však báze není určena jednoznačně. Jestliže na dvojici vektorů $e^{i\sqrt{2}x}, e^{-i\sqrt{2}x}$ provedeme transformaci

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} := \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{i\sqrt{2}x} \\ e^{-i\sqrt{2}x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{2}\,x) \\ \sin(\sqrt{2}\,x) \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

pak funkce y_1, y_2, opět řeší danou homogenní diferenciální rovnici, neboť jsou to lineární kombinace jejího fundamentálního systému a trojice funkcí

$$\left\{e^{-3x}, \cos(\sqrt{2}\,x), \sin(\sqrt{2}\,x)\right\} \tag{5.16}$$

je lineární nezávislá, neboť transformace (5.15) je určena regulární maticí. Je tedy množina (5.16) opět fundamentálním systémem zadané rovnice.

Obecné řešení zadané diferenciální rovnice můžeme tedy vyjádřit dvěma způsoby:

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{i\sqrt{2}x} + c_3 e^{-i\sqrt{2}x}, \tag{5.17}$$

nebo

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 \cos(\sqrt{2}\,x) + c_3 \sin(\sqrt{2}\,x). \tag{5.18}$$

Poznámka 5.2

Koeficienty lineární kombinace jsme v rovnicích (5.17), (5.18) označili stejnými symboly c_i, ač je zřejmé, že vyjadřují-li obě rovnice tutéž funkci y, mohou být v každé rovnici koeficienty různé. Uvažujeme-li komplexní koeficienty c_i, pak obě formule vyjadřují tutéž množinu řešení dané homogenní diferenciální rovnice, množina všech reálných řešení se ovšem snáze popisuje formulí (5.18).

Transformaci použitou v (5.15) je ovšem možno použít na libovolnou dvojici navzájem komplexně sdružených funkcí v seznamu (5.5). Jestliže má charakteristický polynom dvojici komplexně sdružených kořenů se stejnou násobností, tj. v jeho rozkladu na kořenové činitele lze vyhledat výraz

$$(\lambda-\lambda_0)^{n_0}(\lambda-\bar{\lambda}_0)^{n_0}\text{, kde } \lambda_0=\sigma+i\,\omega,\ \sigma,\omega\in\mathbb{R},$$

pak podle **Věty 5.1** této dvojici kořenů odpovídá posloupnost funkcí fundamentálního systému

$$\begin{array}{ccccc} e^{\lambda_0 x}, & xe^{\lambda_0 x}, & x^2e^{\lambda_0 x}, & \cdots, & x^{n_0-1}e^{\lambda_0 x}, \\ e^{\bar{\lambda}_0 x}, & xe^{\bar{\lambda}_0 x}, & x^2e^{\bar{\lambda}_0 x}, & \cdots, & x^{n_0-1}e^{\bar{\lambda}_0 x}, \end{array}$$

kterou lze opět v seznamu (5.5) nahradit posloupností reálných funkcí

$$\begin{array}{ccccc} e^{\sigma x}\cos(\omega x), & xe^{\sigma x}\cos(\omega x), & x^2e^{\sigma x}\cos(\omega x), & \cdots, & x^{n_0-1}e^{\sigma x}\cos(\omega x), \\ e^{\sigma x}\sin(\omega x), & xe^{\sigma x}\sin(\omega x), & x^2e^{\sigma x}\sin(\omega x), & \cdots, & x^{n_0-1}e^{\sigma x}\sin(\omega x), \end{array}$$

aplikací stejné lineární transformace jako v (5.15).

Partikulární řešení

Věta 5.2 (variace konstant)

Nechť $$L[y]:=p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y\,, \tag{5.19}$$

funkce $p_0, p_1,\dots, p_n, q$ jsou spojité na $I = (a, b)$, $a < b$, a funkce $y_1, y_2,\dots, y_n$, tvoří fundamentální systém homogenní diferenciální rovnice $L[y] = 0$ na I. Pak funkce

$$\hat{y}(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)+\cdots+c_n(x)y_n(x) \tag{5.20}$$

je řešením (partikulárním) rovnice $L[y] = q$ na I, jestliže funkce $c_1, c_2,\dots, c_n$, vyhovují na I soustavě:

$$\mathbb{W}[y_1,\dots,y_n]\cdot\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_{n-1}' \\ c_n' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{q}{p_0} \end{bmatrix}. \tag{5.21}$$

■ Stačí ověřit, že funkce $\hat{y}$ definovaná formulí (5.20) vyhovuje rovnici $L[y] = q$ za předpokladu (5.21). Výpočet bude přehlednější, použijme-li maticový zápis. Definujme matice:

$$\mathbb{Y}=[y_1,y_2,\dots,y_n],\quad \mathbb{C}=\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},\ \text{pak lze psát } \hat{y}=\mathbb{Y}\cdot\mathbb{C}.$$

Vzhledem k podmínce (5.21) pro derivace funkce $\hat{y}=\mathbb{Y}\cdot\mathbb{C}$ platí:

$$\begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{y}' \\ \vdots \\ \hat{y}^{(n-1)} \\ \hat{y}^{(n)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbb{Y} \\ \mathbb{Y}' \\ \vdots \\ \mathbb{Y}^{(n-1)} \\ \mathbb{Y}^{(n)} \end{bmatrix}\cdot\mathbb{C}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{q}{p_0} \end{bmatrix}.$$

Dále

$$L[\hat{y}]=\left[p_n,p_{n-1},\dots,p_1,p_0\right]\cdot\begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{y}' \\ \vdots \\ \hat{y}^{(n-1)} \\ \hat{y}^{(n)} \end{bmatrix}=\left[p_n,p_{n-1},\dots,p_1,p_0\right]\cdot\begin{bmatrix} \mathbb{Y} \\ \mathbb{Y}' \\ \vdots \\ \mathbb{Y}^{(n-1)} \\ \mathbb{Y}^{(n)} \end{bmatrix}\cdot\mathbb{C}+\left[p_n,p_{n-1},\dots,p_1,p_0\right]\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{q}{p_0} \end{bmatrix}=$$

$\left[L[y_1],L[y_2],\dots,L[y_{n-1}],L[y_n]\right]\cdot\mathbb{C}+q=\left[0,0,\dots,0,0\right]\cdot\mathbb{C}+q=q$, což se mělo dokázat. ■

Příklad 5.3

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y''-2y'+y=\frac{1}{x}e^x$.
Pravá strana rovnice je spojitá na $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, na této množině bude existovat obecné řešení diferenciální rovnice.

(1) Fundamentální systém. Charakteristický polynom: $\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2$, $\lambda=1$ je jediným kořenem charakteristického polynomu a je kořenem dvojnásobným. Podle **Věty 5.1** je $\{e^x, xe^x\}$ báze řešení homogenní rovnice.

(2) Partikulární řešení. Podle **Věty 5.2** je každá funkce $\hat{y}(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x$ partikulárním řešením dané rovnice pokud pomocné funkce c_1, c_2, jsou řešením soustavy

$$\begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{x}e^x \end{bmatrix}.$$

Odtud plyne $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & 1+x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{x} \end{bmatrix}$, tj. $\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+x & -x \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{x} \end{bmatrix}$. Integrací dostaneme $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ \ln|x| \end{bmatrix}$, a tedy $\hat{y}(x) = -xe^x + \ln|x|\, xe^x$.

(3) Obecné řešení. $y(x) = \ln|x|\, xe^x + c_1 e^x + c_2\, xe^x$.

Poznámka 5.3

V rovnici (5.19) jsme zavedli koeficient $p_0(x)$ ač ho lze vždy z rovnice odstranit dělením, proto jsme jej např. v rovnici (5.1) neuvažovali (resp. uvažovali jsme jej jednotkový). Chtěli jsme zde zdůraznit jeho vliv na tvar soustavy (5.21).