1. cvičení

Polynomy

Pojmy které je třeba znát: Polynom, kořen polynomu, kořenový činitel.

Věty, které je třeba znát: Základní věta algebry, věta o polynomech s racionálními koeficienty, komplexně sdružené kořeny reálných polynomů, věta o dělení polynomu polynomem.

Procvičované postupy, algoritmy: Hornerovo schéma, dělení polynomu polynomem, hledání racionálních kořenů.

Příklady: 1. Najděte kořeny polynomu, pokud víte, že jsou celočíselné.

$$p(x) = x^5 + x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 36x + 36$$

Řešení. Protože koeficient u nejvyšší mocniny je roven 1, hledáme kořeny pouze jako dělitele absolutního členu, tj. čísla 36. $\{\pm 1,\ \pm 2\ \pm 3\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 9,\ \pm 12,\ \pm 18,\ \pm 36\}$. Vyzkoušíme $\alpha = 1 \to$ sečteme koeficienty $p(\alpha) = 48 \neq 0$. Zkusíme $\alpha = -1$ a ověříme Hornerovým schématem.

	1	1	-13	-13	36	36
-1		-1	0	13	0	-36
	1	0	-13	0	36	0

$p(-1) = 0,\ \alpha = -1$ je kořen a díky HS jsme získali koeficienty polynomu, který dostaneme vydělením původního polynomu příslušným kořenovým činitelem, tedy polynomem (x+1). Tzn.

$$x^5 + x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 36x + 36\ :(x+1) = x^4 + 0\cdot x^3 - 13x^2 + 0\cdot x + 36 = \left(x^2\right)^2 - 13x^2 + 36$$

Můžeme odhadnout kořeny pomocí Vietových vztahů (4 a 9) a rozložit příslušný polynom

$$\left(x^2\right)^2 - 13x^2 + 36 = (x^2-4)(x^2-9) = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3).$$

Kořeny jsou $\{-1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3\}$

2. Rozložte polynom na součin ireducibilních polynomů víte-li, že má alespoň jeden racionální kořen.

$$p(x) = 3x^5 + 2x^4 - 15x^3 - 10x^2 + 12x + 8.$$

Opět budeme kořeny „hádat“, tetokrát však mohou být racionální. Budeme hledat v množině $\{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 8,\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{4}{3},\ \pm\frac{8}{3}\}$. Vzhledem k tomu, že vedoucí člen má hodnotu 3, ale ne všechny koeficienty jsou dělitelné 3, budeme očekávat i kořen ve tvaru zlomku a začneme tedy zkoušet.

	3	2	-15	-10	12	8
$\frac{1}{3}$		1	1	$-\frac{14}{3}$	$-\frac{44}{9}$	$\frac{64}{27}$
	3	3	-14	$-\frac{44}{3}$	$\frac{64}{9}$	$\frac{280}{27}$

Vidíme, že $\frac{1}{3}$ není kořen. Takto bychom zkoušeli dál, nicméně přejdeme rovnou ke správné hodnotě, tj. $-\frac{2}{3}$

	3	2	-15	-10	12	8
$-\frac{2}{3}$		-2	0	10	0	-8
	3	0	-15	0	12	0

Toto už je podobná situace jako v prvním příkladu tj.

$$3x^4 - 15x^2 + 12 = 3 \cdot (x^4 - 5x^2 + 4) = 3 \cdot (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 3 \cdot (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$

a dohromady máme

$$p(x) = 3 \cdot (x + \frac{2}{3})(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$

3. Nalezněte všechny kořeny polynomu včetně jejich násobností, znáte-li jeden jeho komplexní kořen.

$$p(x) = x^6 - 5x^5 + 15x^4 - 28x^3 + 36x^2 - 28x + 12, \quad \alpha = 1 + i$$

Polynom má reálné koeficienty a tedy komplexní kořeny „chodí v páru“, neboli jsou komplexně sdružené. Víme tedy, že $\overline{\alpha} = 1 - i$ je také kořen. Máme 2 možnosti, jak postupovat. Stejně jako v předchozím případě můžeme dosadit do Hornerova schématu postupně α a $\overline{\alpha}$. Tento postup je ovšem náročný, neboť musíme počítat s komplexními čísly. Druhou možností je vydělit původní polynom součinem příslušných kořenových činitelů

$$(x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) = x^2 - 2 \cdot \mathrm{Re}(\alpha) + |\alpha|^2,$$

což je polynom druhého stupně, který už má reálné koeficienty. Provedeme tedy dělení:

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
(x^6 & -5x^5 & +15x^4 & -28x^3 & +36x^2 & -28x & +12) & : (x^2 - 2x + 2) = x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 8x + 6 \\
x^6 & -2x^5 & +2x^4 & & & & & \\
\hline
 & -3x^5 & +13x^4 & -28x^3 & +36x^2 & -28x & +12 & \\
 & -3x^5 & +6x^4 & -6x^3 & & & & \\
\hline
 & & 7x^4 & -22x^3 & +36x^2 & -28x & +12 & \\
 & & 7x^4 & -14x^3 & +14x^2 & & & \\
\hline
 & & & -8x^3 & +22x^2 & -28x & +12 & \\
 & & & -8x^3 & +16x^2 & -16x & & \\
\hline
 & & & & 6x^2 & -12x & +12 & \\
 & & & & 6x^2 & -12x & +12 & \\
\hline
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Vyzkoušíme, jestli jsou kořeny vícenásobné. Opět bychom vydělili polynomem $(x^2 - 2x + 2)$, ale procvičíme i druhou variantu - dosazení do Hornerova schématu.

	1	-3	7	-8	6
$1+i$		$1+i$	$-3-i$	$5+3i$	-6
	1	$-2+i$	$4-i$	$-3+3i$	0
$1-i$		$1-i$	$-1+i$	$3-3i$	
	1	-1	3	0	

Zbývá kvadratický polynom $x^2 - x + 3$, u kterého už kořeny určit umíme. Kořeny jsou tedy dvojnásobné $1 + i$ a $1 - i$ a jednonásobné $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2} i$.

2. cvičení

GEM, Lineární závislost a nezávislost

Pojmy které je třeba znát: Vektorový prostor, lineární kombinace, lineární závislost a nezávislost, trojúhelníkový tvar matice

Procvičované postupy, algoritmy: Gaussova eliminační metoda

Příklady: 1. Upravte matici pomocí GEM do horního trojúhelníkového tvaru.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 12 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -12 \end{pmatrix}$$

Za povšimnutí stojí hned první úprava. Místo násobení prvního řádku vhodným násobkem(v tomto případě by to muselo být racionální číslo) a přičtením k řádkům zbývajícím, abychom získali v prvním sloupci nuly, jsme si „vyrobili“ v prvním sloupci jednotku (dokonce hned ve dvou řádcích) odečtením vhodného násobku druhého řádku od zbývajících. Následné úpravy jsou mnohem jednodušší. Při strojovém zpracování počítači samozřejmě nezáleží na „hezkých“ číslech, ale pro ruční počítání tím dokážeme významně eliminovat numerické chyby.

2. Zkoumejte LZ/LN následujících vektorů v prostoru $\mathbb{R}^3$ v závislosti na reálném parametru $a \in \mathbb{R}$.

$$\mathbf{v}_1 = (2, 1, -1)$$
$$\mathbf{v}_2 = (1, 2, a)$$
$$\mathbf{v}_3 = (0, 1, 3)$$

Při zjišťování lineární nezávislosti sestavíme obecnou lineární kombinaci, položíme ji rovnou nulovému vektoru a zkoumáme zda vzniklá rovnost má pouze triviální řešení.

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \mathbf{v}_1 + \beta \cdot \mathbf{v}_2 + \gamma \cdot \mathbf{v}_3 &= \mathbf{o} \\ \alpha(2,1,-1) + \beta(1,2,a) + \gamma(0,1,3) &= (0,0,0) \\ (2\alpha + \beta, \alpha + 2\beta + \gamma, -\alpha + a \cdot \beta + 3\gamma) &= (0,0,0) \end{aligned}$$

Rovnost vektorů v $\mathbb{R}^3$ vyšetřujeme po složkách, tedy řešíme homogení soustavu 3 rovnic.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\alpha & + & \beta & & & = & 0 \\ \alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & 0 \\ -\alpha & + & a\beta & + & 3\gamma & = & 0 \end{array}$$

Upravíme pomocí GEM.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & a & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & a+2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & a-4 & 0 \end{pmatrix}$$

Pokud $a = 4$, pak poslední rovnice vypadne a nalezneme netriviální řešení, např.

$$\alpha = 1,\ \beta = -2,\ \gamma = 3$$

a vektory jsou lineárně závislé. Pokud $a \neq 4$, potom můžeme výrazem $(a-4)$ vydělit a postupným dosazením dostaneme pouze triviální řešení $\alpha = \beta = \gamma = 0$ a vektory jsou lineárně nezávislé.

3. Jsou dány 3 lineárně nezávislé vektory $\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}$ z obecného lineárního prostoru L. Rozhodněte o LZ/LN vektorů

$$\begin{array}{rcrrr} \mathbf{x} & = & 2\mathbf{u} & -\mathbf{v} & +\mathbf{w} \\ \mathbf{y} & = & \mathbf{u} & & +\mathbf{w} \\ \mathbf{z} & = & & \mathbf{v} & -\mathbf{w}. \end{array}$$

Opět sestavíme lineární kombinaci a položíme ji rovnu nulovému vektoru.

$$\begin{aligned} \alpha\cdot\mathbf{x}+\beta\cdot\mathbf{y}+\gamma\cdot\mathbf{z} &= \mathbf{o} \\ \alpha(2\mathbf{u}-\mathbf{v}+\mathbf{w})+\beta(\mathbf{u}+\mathbf{w})+\gamma(\mathbf{v}-\mathbf{w}) &= \mathbf{o} \\ (2\alpha+\beta)\mathbf{u}+(-\alpha+\gamma)\mathbf{v}+(\alpha+\beta-\gamma)\mathbf{w} &= \mathbf{o} \end{aligned}$$

Nyní přichází klíčový krok tohoto příkladu. Na levé straně rovnosti je lineární kombinace vektorů $\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}$, které jsou lineárně nezávislé. Z definice LN musí být tato lineární kombinace triviální, tj. koeficienty nulové. Z toho resultuje homogenní soustava 3 rovnic. Poznamenejme, že pokud bychom o vektorech $\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}$ nevěděli, zda jsou LN, nemohli bychom tuto úvahu provést a úloha by nebyla řešitelná (neměli bychom dostatek informací o problému).

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\alpha & + & \beta & & & = & 0 \\ -\alpha & & & + & w & = & 0 \\ \alpha & + & \beta & - & 1\gamma & = & 0 \end{array}$$

Upravíme pomocí GEM.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tato soustava má pouze triviální řešení a proto jsou vektory $\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z}$ lineárně nezávislé ve vektorovém prostoru L.

4. Rozhodněte o LZ/LN následujících polynomů v prostoru polynomů P^3.

$$\begin{array}{rcrrrr} p_1(x) & = & x^3 & -2x^2 & +x & -3 \\ p_2(x) & = & -x^3 & -2x^2 & & +1 \\ p_3(x) & = & 2x^3 & & +x & -2 \\ p_4(x) & = & 2x^3 & +x^2 & +x & -1 \end{array}$$

Opět sestavíme lineární kombinaci, položíme rovnu nulovému vektoru (v tomto případě nulový polynom) a upravíme.

$$\begin{aligned} \alpha p_1+\beta p_2+\gamma p_3+\delta p_4 &= 0 \\ \alpha(x^3-2x^2+x-3)+\beta(-x^3-2x^2+1)+\gamma(2x^3+x-2)+\delta(2x^3+x^2+x-1) &= 0x^3+0x^2+0x+0 \\ (\alpha-\beta+2\gamma+2\delta)x^3+(-2\alpha-2\beta+\delta)x^2+(\alpha+\gamma+\delta)x+(-3\alpha+\beta-2\gamma-\delta) &= 0x^3+0x^2+0x+0 \end{aligned}$$

Polynomy se rovnají pokud se rovnají všechny jejich koeficienty, řešíme tedy homogenní soustavu 4 rovnic.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha & - & \beta & + & 2\gamma & + & 2\delta & = & 0 \\ -2\alpha & - & 2\beta & & & + & \delta & = & 0 \\ \alpha & & & + & \gamma & + & \delta & = & 0 \\ -3\alpha & + & \beta & - & 2\gamma & - & \delta & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Tato soustava má pouze triviální řešení $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ a polynomy jsou tedy lineárně nezávislé.

3. cvičení

Lineární obal, podprostory, báze, dimenze

Pojmy které je třeba znát: Lineární podprostor, báze, souřadnice vzhledem k bázi

Věty, které je třeba znát: Zachování LO při GEM

Procvičované postupy, algoritmy: GEM, určení LZ/LN

Příklady: 1. Ukažte, že množina polynomů právě třetího stupně není podprostorem prostoru všech polynomů. Tuto skutečnost ukážeme velmi snadno. Pro libovolný podprostor musí platit, že součet libovolných dvou prvků do něj patří. Vezmeme-li však polynomy x^3 a $-x^3$ jejich součet je nulový polynom, který rozhodně nepatří do výše uvedené množiny. Podobně bychom ukázali i neplatnost druhé podmínky, pokud bychom libovolný polynom této množiny vynásobili nulovým skalárem. Je dobré si uvědomit, že toto platí obecně a tedy pokud ověřujeme, zda je nějaká množina podprostorem, je výhodné nejprve zjistit, zda obsahuje nulový vektor. Pokud tomu tak není, nemůže být podprostorem, avšak pokud nulový vektor obsahuje, ještě to nedokazuje opak, tedy že podprostorem je, ale pouze že může být. Tuto skutečnost obecně v matematice označujeme frází „Podmínka nutná, nikoli postačující“.

2. Rozhodněte, zda následující množiny jsou podprostorem prostoru $\mathbb{R}^2$.

- $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ - první kvadrant
- $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \cdot y \geq 0\}$ - první a třetí kvadrant

Vidíme, že do obou množin patří prvek $(0,\ 0)$, tedy množiny jsou neprázdné a obsahují nulový vektor. Vezměme libovolné dva vektory z první množiny, tj. vektory, které mají ve složkách nezáporná čísla. Pokud je sečteme, dostaneme opět vektor s nezápornými složkami a první podmínka je splněna. Ovšem pokud vezmeme například vektor $u = (1,\ 1) \in M_1$ a skalár $\alpha = -1 \in \mathbb{R}$ pak $\alpha u = (-1,\ -1) \notin M_1$ a M_1 není podprostor $\mathbb{R}^2$. Vezměme libovolný vektor z druhé množiny (tj. vektor, který má v obou složkách hodnoty, které mají stejné znaménko nebo nulu) a libovolný reálný skalár. Pokud je skalár kladný, znaménka se nemění, pokud je záporný, změní se v obou složkách a výsledný prvek opět leží v M_2. Nicméně pokud vezmeme např. vektory $u = (1,\ 2) \in M_2$ a $v = (-2,\ -1) \in M_2$ pak $u + v = (-1,\ 1) \notin M_2$ a tedy M_2 není podprostor $\mathbb{R}^2$. Ukázali jsme si 2 prostory, u kterých je splněna pouze jedna z podmínek, ale ne obě a nejsou to podprostory $\mathbb{R}^2$.

3. Ukažte, že množina

$$(B) = \{x^2 + x - 2,\ -x^2 - 3x + 4,\ x + 1\}$$

je báze prostoru polynomů P^2 nejvýše druhého stupně a pro libovolný polynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ nalezněte jeho souřadnice vzhledem k této bázi. Musíme ukázat 2 vlastnosti báze - lineárně nezávislá množina generátorů. Obě skutečnosti ověříme najednou. V případě lineární nezávislosti zkoumáme, zda existuje netriviální řešení $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$

$$\alpha(x^2 + x - 2) + \beta(-x^2 - 3x + 4) + \gamma(x + 1) = 0x^2 + 0x + 0.$$

V případě generátorů ověřujeme, zda existuje nějaké řešení $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ pro libovolná $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$

$$\alpha(x^2 + x - 2) + \beta(-x^2 - 3x + 4) + \gamma(x + 1) = ax^2 + bx + c.$$

Soustavy můžeme řešit najednou, pro různé pravé strany

$$\begin{array}{llll} (\alpha - \beta)x^2 & +(\alpha - 3\beta + \gamma)x & +(-2\alpha + 4\beta + \gamma) & = 0x^2 + 0x + 0 \\ (\alpha - \beta)x^2 & +(\alpha - 3\beta + \gamma)x & +(-2\alpha + 4\beta + \gamma) & = ax^2 + bx + c. \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 & a \\ 1 & -3 & 1 & 0 & b \\ -2 & 4 & 1 & 0 & c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -a+b \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2a+c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -a+b \\ 0 & 0 & 2 & 0 & a+b+c \end{array}\right)$$

Pro nulovou pravou stranu existuje pouze triviální řešení a proto jsou polynomy lineárně nezávislé. Pokud řešíme existenci pro libovolnou pravou stranu, dostaneme řešení

$$\alpha = \frac{7a-b+c}{4},\ \beta = \frac{3a-b+c}{4},\ \gamma = \frac{a+b+c}{2}.$$

Zároveň jsme vyřešili i druhou část úlohy - nalezení souřadnic vzhledem k dané bázi, tj.

$$ax^2+bx+c = \frac{7a-b+c}{4}(x^2+x-2) + \frac{3a-b+c}{4}(-x^2-3x+4) + \frac{a+b+c}{2}(x+1).$$

4. Doplňte skupinu vektorů $\{(2,\,1,\,-1,\,3,\,2),\ (2,\,-1,\,2,\,2,\,1),\ (4,\,0,\,1,\,-2,\,-2)\}$ na bázi prostoru $\mathbb{R}^5$. Pokud složky vektorů zapíšeme jako řádky matice, potom aplikací GEM nezmění tyto řádky svůj lineární obal.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$

Ověříme tím jednak lineární nezávislost, což je nezbytná podmínka pro bázi, a navíc z horního trojúhelníkového tvaru dokážeme vyčíst, jaké vektory doplnit. Jednou z možností je doplnit takové vektory, které když přidáme do výsledné matice, získáme matici regulární, tj. čtvercovou, která má lineárně nezávislé řádky. V tomto případě stačí doplnit vektory $\{(0,\,0,\,1,\,0,\,0),\ (0,\,0,\,0,\,0,\,1)\}$ a výsledná matice bude mít následující tvar

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. cvičení

Součin matic, Inverzní matice, Maticové rovnosti

Pojmy které je třeba znát: levý a pravý distributivní zákon pro matice, maticový součin, hodnost matic, regulární matice, inverzní matice

Procvičované postupy, algoritmy: hledání inverzní matice, řešení maticových rovností

Příklady: 1. Nalezněte inverzní matici k matici pomocí GEM

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 15 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 24 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 15 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{\begin{array}{rrr} 3 & 1 & 1 \\ 12 & 5 & 3 \\ -7 & -3 & -2 \end{array}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right).$$

2. Řešte maticovou rovnost s neznámou maticí $X \in \mathbb{R}^{2,2}$ pro matice A a B

$$AX + 2X - 2B = A, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nejprve maticovou rovnost vyřešíme symbolicky, tj. vyjádříme neznámou matici X.

$$\begin{aligned} AX + 2X - 2B &= A \\ (A+2E)X &= A + 2B \qquad\qquad /(A+2E)^{-1}\star \\ (A+2E)^{-1}\star(A+2E)X &= (A+2E)^{-1}\star(A+2B) \\ X &= (A+2E)^{-1}\star(A+2B) \end{aligned}$$

Tuto úpravu můžeme provést za předpokladu, že k matici $(A+2E)$ existuje inverzní matice. Podmínka je analogická jako kdybychom řešili obyčejnou algebraickou rovnici. Také musíme ohlídat, abychom nedělili nulou. V tomto případě inverzní matice existuje, jako důkaz poslouží to, že ji najdeme.

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 5 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 5 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 5 & 0 & 15 & -35 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right)$$

$$(A+2E)^{-1}\star(A+2B) = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \star \left[\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & 8 \\ 26 & -5 \end{pmatrix}.$$

3. Řešte maticovou rovnost v závislosti na reálném parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$XA - \alpha X = B, \quad A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha - 3 \\ 2\alpha & 2\alpha + 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro tuto úlohu využijeme vzorec pro výpočet inverzní matice pomocí tzv. „doplňků“, který patří spíše do kapitoly o determinantech. Je z něho i patrné, kdy inverzní matice existuje - pokud $ad-bc \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Upravíme maticovou rovnost vyjádřením neznámé X

$$\begin{aligned} XA - \alpha X &= B \\ X(A-\alpha E) &= B \qquad\qquad / \star (A-\alpha E)^{-1} \\ X(A-\alpha E)\star(A-\alpha E)^{-1} &= B\star(A-\alpha E)^{-1} \\ X &= B\star(A-\alpha E)^{-1}. \end{aligned}$$

Opět musíme ohlídat podmínku regularity matice $(A-\alpha E)$, pokud ji chceme invertovat

$$A-\alpha E = \begin{pmatrix} 1-2\alpha & \alpha-3 \\ 2\alpha & \alpha+3 \end{pmatrix}$$

$$(1-2\alpha)(\alpha+3) - 2\alpha(\alpha-3) = -4\alpha^2+\alpha+3 = -4(\alpha-1)(\alpha+\frac{3}{4}).$$

Pokud $\alpha = 1$ nebo $\alpha = -\frac{3}{4}$, pak je matice $(A-\alpha E)$ singulární a po vynásobení jakoukoli maticí získáme znovu singulární matici. Na pravé straně rovnosti je ovšem matice regulární a proto pro daná α řešení rovnosti neexistuje. Pokud $\alpha \neq 1, -\frac{3}{4}$, platí

$$X = B(A-\alpha E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{-4(\alpha-1)(\alpha+\frac{3}{4})}\begin{pmatrix} \alpha+3 & 3-\alpha \\ -2\alpha & 1-2\alpha \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{-4(\alpha-1)(\alpha+\frac{3}{4})}\begin{pmatrix} 3\alpha+3 & \alpha+2 \\ 3-\alpha & 4-3\alpha \end{pmatrix}.$$

5. cvičení

Determinanty

Pojmy které je třeba znát: determinant matice

Věty, které je třeba znát: Věty o počítání determinantů (z definice, GEM, rozvojem), Laplaceova věta (o determinantu součinu matic)

Procvičované postupy, algoritmy: počítání determinantů různými způsoby

Příklady: 1. Spočtěte determinant matice A všemi způsoby, které znáte

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Z definice

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 15 + 30 - 20 - 10 - 0 = 15.$$

Použitím GEM, tj. upravit na horní troj. matici a determinant je rovný součinu prvků na hlavní diagonále

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-3) = 15.$$

Rozvojem podle 2. řádku

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5(2 - 3 \cdot 2) - 5(2 \cdot 2 - 3) = 20 - 5 = 15.$$

2. Rozhodněte, pro jaké $\alpha \in \mathbb{R}$ je matice A singulární,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ \alpha & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice A je singulární, pokud $\det(A) = 0$. Spočtěme tedy determinant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ \alpha & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & \alpha + 2 \\ \alpha & 3 + 4\alpha & \alpha + 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 9 & \alpha + 2 \\ 3 + 4\alpha & \alpha + 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\alpha + 2) \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 3 + 4\alpha & 1 \end{vmatrix} = -(\alpha + 2)(9 - 3 - 4\alpha) = (\alpha + 2)(4\alpha - 6).$$

Matice je singulární pro $\alpha = -2$ a $\alpha = \frac{3}{2}$. Zejména pokud dosadíme $\alpha = -2$ tak je ihned vidět, že 3. sloupec je (-1)násobkem prvního sloupce, což znamená, že matice je singulární.

3. Vhodnou metodou spočtěte následující determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{(1+4)} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{(4+1)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{(3+4)} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot 7 \cdot (-1)^{(2+1)} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 14(-2) = -28.$$

4. Rozhodněte, pro jaká $a \in \mathbb{R}$ existuje inverzní matice k matici A,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & a & 1 \\ a & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opět úloha na počítání determinantu, neboť se ptáme pouze na existenci inverzní matice, nikoliv na její samotné nalezení. To by byla časově mnohem náročnější úloha.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & a & 1 \\ a & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & a-6 & 5 \\ a-2 & 0 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -7 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & a-6 & 5 \\ a-2 & -4 & 4 \\ -7 & -2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & a-1 & 5 \\ a-2 & 0 & 4 \\ -7 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -(15(a-2) - 28(a-1) + 12 - 5(a-2)(a-1)) = 5a^2 - 2a = a(5a-2).$$

Inverzní matice existuje pro $a \in \mathbb{R} \backslash \{0, \frac{2}{5}\}$.

6. cvičení

Soustavy rovnic

Pojmy které je třeba znát: homogenní a nehomogenní soustava rovnic, partikulární řešení, podprostor, báze, dimenze

Věty, které je třeba znát: Frobeniova věta, věta o dimenzi řešení homogenní soustavy rovnic

Procvičované postupy, algoritmy: řešení rovnic v $\mathbb{R}^n$

Poznámka: V tomto cvičení se mají studenti naučit hledat řešení soustavy lineárních rovnic $Ax = b$. Vzhledem k tomu, že se jedná už o několikáté cvičení v semestru, předpokládá se jistá obratnost v maticovém kalkulu, zejména znalost úpravy matice pomocí GEM. Všechny procvičované úlohy proto budou začínat v okamžiku, kdy se podařilo eliminovat matici soustavy na horní trojúhelníkový tvar. Maticí A budiž v tomto cvičení vždy myšlena matice levé strany dané soustavy rovnic, $x = (a, b, c, \ldots)$ vektor neznámých a b pravá strana. Dodejme, že správně bychom měli všude psát $Ax^T = b^T$, pokud x a b jsou řádkové vektory, ale tuto nepřesnost si odpustíme v zájmu zachování přehlednosti. Toliko k obecnému.

Dále je potřeba, aby se cvičící rozhodl, jaký způsob hledání výsledků studentům ukáže. Postup hledání řešení pomocí volných a vázaných proměnných, resp. převedení Gauss-Jordanovou eliminací matice A do tavru $(E|C)$ je velmi dobře popsán na přednáškových slídech a jeho procvičení je čistě mechanickou záležitostí. Je to ovšem algoritmus vhodný spíše pro počítací stroje, než pro chytré a přemýšlející studenty.

Předpokládáme, že studenti se nechovají jako počítací stroje. Na straně jedné rozhodně nedosahují jejich výpočetní kapacity a přesnosti, na straně druhé mají svou vlastní inteligenci a jsou schopni vidět i „nealgoritmická“ řešení, která jsou však mnohdy mnohem jednodušší.

Jednou z možností, jak najít množinu všech řešení homogenní soustavy, je „uhádnout“ správný počet lineárně nezávislých řešení, která tvoří bázi prostoru všech řešení. Správný počet, tj. počet LN prvků do báze, je v tomto případě dán dimenzí prostoru všech všech řešení $(n - \text{hod}(A))$, což je známo z přednášek. Navíc pokud je matice v horním troj. tvaru, pak její hodnost je zároveň počet jejích řádků a je tedy ihned známá. Postup tohoto hádání si ukážeme na dvou příkladech, další příklady s výsledky nechť slouží jako inspirace na cvičení a cvičící postup vhodně okomentuje.

Doplňme jen, že řešení nehomogenní soustavy najdeme jako řešení příslušné homogenní soustavy (tj. nějaký podprostor $\mathbb{R}^n$), pouze tento podprostor „posuneme“ do partikulárního řešení.

Příklady: 1. Nalezněte množinu všech řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 3a + b - 2c + 3d &= 1 \\ 5c - 2d &= 9 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 9 \end{array}\right).$$

Budeme hledat $(4-2) = 2$ LN řešení soustavy $Ax = 0$ a jedno partikulární řešení $Ax = b$. Začneme odspodu. Co zvolit za c a d aby byla splněna rovnice $5c - 2d = 0$? Např. $c = d = 0$ nebo $c = 2,\ d = 5$. První variantu si můžeme dovolit, neboť stále ještě zbývají dvě neobsazené proměnné a pouze jedna rovnice. Druhou variantu volíme tak, abychom se vyhnuli počítání se zlomky. Pro partikulární řešení, tj. řešení rovnice $5c - 2d = 9$ zvolíme $c = 1,\ d = -2$. Situace je následující

$$\begin{array}{rrrrrr|l} & 3 & 1 & -2 & 3 & & 1 \\ & 0 & 0 & 5 & -2 & & 9 \\ \hline \langle(& , & , & 0, & 0 &), & \\ (& , & , & 2, & 5 &)\rangle+ & \\ +(& , & , & 1, & -2 &) & \end{array}$$

V tuto chvíli máme zajištěnu lineární nezávislost řešení homogenní soustavy a můžeme pro každý vektor dořešit zbylé hodnoty. Pro první vektor dosadíme do rovnice $3a + b - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$ a zvolíme $a = 1$, $b = -3$ (teď již nelze zvolit samé nuly, protože bychom dostali nulový vektor, což nechceme). Pro druhý vektor dosadíme do 1. rovnice $3a + b - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 0$, tj. $3a + b = -11$ a volíme $a = 0$, $b = -11$. Konečně pro partikulární řešení dosadíme $3a + b - 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = 1$ tj. $3a + b = 9$ a volíme $a = 3$, $b = 0$ a zobrazíme přehledně výsledek

$$\begin{array}{lrrrr|l}
 & 3 & 1 & -2 & 3 & 1\\
 & 0 & 0 & 5 & -2 & 9\\ \hline
\langle(& 1, & -3, & 0, & 0 &),\\
(& 0, & -11, & 2, & 5 &)\rangle+\\
+(& 3, & 0, & 1, & -2 &)
\end{array}$$

2. Řešte soustavu

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r}
-3 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & -4\\
0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & 3\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1
\end{array}\right)$$

Budeme hledat 3 LN řešení homogenní soustavy a jedno partikulární řešení. Nejprve si předepíšeme 0 na pozice v jednotlivých vektorech tak, abychom zaručili lineární nezávislot. Na místě $\times$ budeme později doplňovat nenulové číslo.

$$\begin{array}{lrrrrrr|l}
 & -3 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & -4\\
 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & 3\\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1\\ \hline
\langle(& , & \times, & 0, & 0, & 0, & 0 &),\\
(& , & , & \times, & 0, & 0, & 0 &),\\
(& , & , & , & , & \times, & 0 &)\rangle+\\
+(& , & , & , & , & , & -\frac{1}{2} &)
\end{array}$$

Pro první vektor zvolíme $a = 4$, $b = 3$. Pro druhý musí být $c \neq 0$, např.$c = 3$, $b = 0$, $a = 2$. U třetího vektoru zvolíme $d = e = 1$ a dosadíme do 1. rovnice $-3a + 4b + 2c + 2 + 3 = 0$. Nabízí se volba $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$. Pro partikulární řešení dosadíme do 2. rovnice $2d - 2e - 1 = 4$ a volíme $d = 2\,e = 0$ a dosadíme do 1. rovnice $-3a + 4b + 2c + 6 = -4$. Zvolíme např. $a = b = 0$, $c = -5$ a přehledně zapíšeme celé řešení.

$$\begin{array}{lrrrrrr|l}
 & -3 & 4 & 2 & 3 & 1 & 0 & -4\\
 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & 3\\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1\\ \hline
\langle(& 4, & 3, & 0, & 0, & 0, & 0 &),\\
(& 2, & 0, & 3, & 0, & 0, & 0 &),\\
(& 0, & -1, & 0, & 1, & 1, & 0 &)\rangle+\\
+(& 0, & 0, & -5, & 2, & 0, & -\frac{1}{2} &)
\end{array}$$

3. Další příklady.

$$\begin{array}{lrrr|l}
 & 3 & -2 & 3 & 1\\
 & 0 & -2 & 4 & 3\\ \hline
\langle(& \frac{1}{3}, & 2, & 1 &)\rangle+\\
+(& -\frac{2}{3}, & -\frac{3}{2}, & 0 &)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrrrrr|l}
 & 5 & 0 & 0 & -2 & 3 & 7\\ \hline
\langle(& 0, & 1, & 0, & 0, & 0 &),\\
(& 0, & 0, & 1, & 0, & 0 &),\\
(& 2, & 0, & 0, & 5, & 0 &),\\
(& -3, & 0, & 0, & 0, & 5 &)\rangle+\\
+(& 1, & 0, & 0, & -1, & 0 &)
\end{array}$$

7. cvičení

Soustavy rovnic se čtvercovou maticí, Cramerovo pravidlo, souřadnice vzhledem k bázi

Pojmy které je třeba znát: inverzní matice, determinant, souřadnice

Procvičované postupy, algoritmy: Cramerovo pravidlo

Příklady: 1. Řešte soustavu rovnic $Ax = b$ několika způsoby (GEM, inverzní matice, Cramerovo pravidlo)

$$\begin{aligned} 2x &\; +y &\; -z &\; = 3 \\ 3x &\; +y &\; +2z &\; = 2 \\ x &\; &\; +2y &\; = -2 \end{aligned}$$

Pomocí GEM

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} x = -4 \\ y = 12 \\ z = 1 \end{array}$$

Výpočtem pomocí inverzní matice $x = A^{-1}b$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & -7 & -1 \end{pmatrix}^{T} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pomocí Cramerova pravidla

$$\det B_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, \ \det B_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 12, \ \det B_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1, \ x = \frac{\det B_x}{\det A} = \frac{-4}{1} = -4, \ y = \frac{\det B_y}{\det A} = \frac{12}{1} = 12, \ z = \frac{\det B_z}{\det A} = \frac{1}{1} = 1$$

2. Řešte soustavu rovnic v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & a-3 & 1 \\ a & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Nejprve spočteme determinant levé strany, abychom zjistili, pro jaká $a \in \mathbb{R}$ je nenulový

$$\det \begin{vmatrix} 2 & a-3 \\ a & 2 \end{vmatrix} = 4 - a^2 + 3a = -(a^2 - 3a - 4) = -(a-4)(a+1).$$

Pro $a \neq 4, \ -1$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{-(a-4)(a+1)} = \frac{2 - 2a + 6}{-(a-4)(a+1)} = \frac{-2(a-4)}{-(a-4)(a+1)} = \frac{2}{(a+1)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix}}{-(a-4)(a+1)} = \frac{4-a}{-(a-4)(a+1)} = \frac{1}{(a+1)}.$$

Pro $a = 4$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$(x,\, y) = \langle(1,\, -2)\rangle + (0,\, 1).$$

Pro $a = -1$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \text{ Soustava nemá řešení.}$$

3. Najděte souřadnice vektoru $x \in \mathbb{R}^3$ vzhledem k uspořádané bázi (C), znáte-li jeho souřadnice vzhledem k uspořádané bázi (B),

$(B) = \{(2,\, -1,\, 1),\ (3,\, 2,\, 0),\ (1,\, 4,\, -2)\}$

$(C) = \{(2,\, 1,\, 1),\ (-2,\, 1,\, -2),\ (-3,\, -2,\, -1)\}$

$x = (1,\, -1,\, 1)_{(B)}, \quad x = (\alpha,\, \beta,\, \gamma)_{(C)}.$

K vyřešení úlohy postačí z definice vyjádřit skutečnost, co znamenají souřadnice vzhledem k bázi, pomocí jedné rovnosti.

$$\alpha(2,\, 1,\, 1) + \beta(-2,\, 1,\, -2) + \gamma(-3,\, -2,\, -1) = 1 \cdot (2,\, -1,\, 1) - 1 \cdot (3,\, 2,\, 0) + 1 \cdot (1,\, 4,\, -2)$$

Tuto rovnost můžeme vyjádřit i jako rovnost maticovou. V tomto případě to není nutné, protože pro tyto konkrétní hodnoty je snadné dopočítat $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, nicméně maticový náhled nám může ukázat způsob, jak řešit obecnou úlohu tohoto typu.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Symbolicky

$$\begin{pmatrix} \\ \quad C \quad \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ x_{(C)} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \quad B \quad \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ x_{(B)} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Neznámé $x_{(C)}$ můžeme z rovnosti vyjádřit prostým vynásobením vhodnou inverzní maticí C^{-1}. Uvědomíme si, že tato inverzní matice existuje, neboť v matici C jsou ve sloupcích hodnoty vektorů báze (C) a tyto vektory a tedy i sloupce jsou lineárně nezávislé a proto je matice C regulární a má inverzní matici.

$$x_C = C^{-1} B x_{(B)}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -5 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

8. cvičení

Lineární zobrazení

Pojmy které je třeba znát: lineární zobrazení, jádro, image, matice lineárního zobrazení

Věty, které je třeba znát: Věta o dimenzi jádra a image

Příklady: 1. Najděte jádro a image (množinu všech obrazů) zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$$\mathcal{A}(x,\, y,\, z) = (3x - y + 2z,\, 2x + y - 2z,\, x - 2y + 4z,\, 4x - 3y + 6z).$$

Budeme postupovat dohromady pro jádro i image. V prvním případě zkoumáme všechna řešení u rovnosti $\mathcal{A}(u) = o$, v druhém pro jaké vektory $v = (a,\, b,\, c,\, d)$ existuje alespoň jeden vzor u při zobrazení $\mathcal{A}$, tj. $\mathcal{A}(u) = v$.

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 3 & -1 & 2 & a \\ 2 & 1 & -2 & b \\ 1 & -2 & 4 & c \\ 4 & -3 & 6 & d \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -2 & 4 & c \\ 0 & 5 & -10 & a-3c \\ 0 & 5 & -10 & b-2c \\ 0 & 5 & -10 & d-4c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -2 & 4 & c \\ 0 & 5 & -10 & a-3c \\ 0 & 0 & 0 & -a+b+c \\ 0 & 0 & 0 & -a-c+d \end{array}\right)$$

Pro jádro řešíme soustavu s nulovým vektorem na pravé straně, tj. hledáme řešení homogenní soustavy. $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \langle (0,\, 2,\, 1) \rangle$.

Abychom našli image, stačí nám vědět, kdy má soustava rovnic řešení. Podle Frobeniovy věty tehdy, pokud je hodnost matice soustavy rovna hodnosti rozšířené matice soustavy, v tomto případě pokud $-a + b + c = 0$ a $-a - c + d = 0$. Vyřešíme tuto soustavu.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \langle (1,\, 1,\, 0,\, 1),\, (1,\, 0,\, 1,\, 2) \rangle$.

2. Najděte matici lineárního zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vzhledem k bázi (B) a (C).

$\mathcal{A}(x,\, y) = (x - y,\, 2x + 3y, y)$

$(B) = \{(2,\, 1),\, (3,\, -2)\}$

$(C) = \{(2,\, -1,\, 1),\, (3,\, -2,\, 2),\, (-3,\, 3,\, -1))$

Stačí si uvědomit, že matice lineárního zobrazení má ve svých sloupcích souřadnice obrazů bázových vektorů první báze vzhledem k druhé bázi.

$$\mathcal{A}(2,\, 1) = (1,\, 7,\, 1),\ \mathcal{A}(3,\, -2) = (5,\, 0,\, -2)$$

Najdeme jejich souřadnice vzhledem k bázi (C) a zapíšeme je do sloupců matice $M_{(\mathcal{A},\,(B),\,(C))}$. Můžeme to vyjádřit jako v předchozím cvičení v maticovém tvaru, pokud maticí A myslíme matici lineárního zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem ke standartní bázi (zjistíme ji snadno z algebraického vyjádření zobrazení), matice B a C budou mít ve sloupcích zapsány hodnoty příslušných bázových vektorů. Lze to chápat také tak, že na bázové vektory (B) nejprve aplikujeme lineární zobrazení $\mathcal{A}$ a pak tyto obrazy vyjádříme v souřadnicích vzhledem k (C).

$$M_{(\mathcal{A},\,(B),\,(C))} = C^{-1}AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -22 & -26 \\ 6 & 16 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 13 \\ -3 & -8 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Najděte obraz vektoru $v = (-1, 1, -3)$ při lineárním zobrazení $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ znáte-li hodnoty tohoto zobrazení na bázových vektorech.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(4, 5, 0) &= (2, 2, 5) \\ \mathcal{A}(3, -2, 3) &= (-3, 4, 1) \\ \mathcal{A}(-2, 1, -2) &= (2, -2, -1) \end{aligned}$$

Protože je zobrazení lineární a známe hodnoty na bázi, stačí vyjádřit vektor v jako lineární kombinaci daných bázových prvků, tj. nalézt jeho souřadnice vzhledem k této bázi, a užitím principu superpozice dopočítat výsledek, neboli

$$\mathcal{A}(-1, 1, -3) = \mathcal{A}(\alpha(4, 5, 0) + \beta(3, -2, 3) + \gamma(-2, 1, -2)) =$$

$$= \alpha\mathcal{A}(4, 5, 0) + \beta\mathcal{A}(3, -2, 3) + \gamma\mathcal{A}(-2, 1, -2) = \alpha(2, 2, 5) + \beta(-3, 4, 1) + \gamma(2, -2, -1)$$

Nalezneme α, β, γ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -2 & -1 \\ 5 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 10 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \alpha = 1/2 \\ \beta = 6 \\ \gamma = 21/2 \end{array}$$

$$\mathcal{A}(-1, 1, -3) = \frac{1}{2}(2, 2, 5) + 6 \cdot (-3, 4, 1) + \frac{21}{2}(2, -2, -1) = (4, 4, -2)$$

9. cvičení

Afinní transformace

Pojmy které je třeba znát: lineární zobrazení, afinní prostor

Příklady: 1. Najděte matici (v homogenních souřadnicích) osové souměrnosti v $\mathbb{R}^2$ podle přímky p, která prochází body $A = (1, -2)$ a $B(-1, -1)$.

Jednou z možností, jak tuto úlohu řešit, je rozložit ji na elementární transformace - změna měřítka, rotace a posunutí. V tomto případě je to značně komplikované. Nastíníme pouze způsob, jakým to lze provést. Provedeme posunutí o minus radiusvektor jednoho z bodů na přímce. Tím celou přímku posuneme tak, že prochází počátkem. Dále otočíme celý obrázek o úhel α - který spočteme - tak, aby přímka byla totožná s jednou z os, řekněme s osou x. Dále provedeme změnu měřítka a to takovou, že x-ovou souřadnici necháme a u y-ové změníme znaménko. Dále otočíme obrázek zpátky o úhel minus α a posuneme zpátky o radiusvektor. Vidíme, že těch transformací je celkem hodně a zejména úhel nebude nabývat žádné známé „jednoduché“ hodnoty.

Využijeme tedy jiné skutečnosti. Afinní transformace je jednoznačně zadaná hodnotami obrazů počátku a bázových prvků. Lze odvodit, že lze použít i 3 body, které neleží v jedné přímce. U dvou bodů už ale víme, kam se zobrazí. Body na ose souměrnosti se zobrazí sami na sebe. Zbývá najít nějaký třetí bod. Nejjednodušší bude, umístit do jednoho z bodů přímky (1)-násobek a (-1)-násobek vektoru n_p kolmého na směrový vektor přímky. Tím získáme bod C a jeho obraz C' při zobrazení osovou souměrností podle dané osy.

$$p : A + \langle (A - B) \rangle = (1, -2, 1) + \langle (2, -1, 0) \rangle, \quad n_p = (1, 2, 0)$$

$$C = A + n_p = (2, 0, 1), \; C' = A - n_p = (0, -4, 1)$$

Vyřešíme rovnost (jakýmkoliv způsobem, který nás napadne, řešit 6 rovnic pro 6 neznámých nebo najít inverzní matici)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & -6/5 \\ -4/5 & -3/5 & -12/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10. cvičení

Vlastní čísla

Pojmy které je třeba znát: vlastní čísla matice a zobrazení

Příklady: 1. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice A,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -2 & -5 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vyřešíme rovnici $\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & 0 \\ -2 & -5-\lambda & -3 \\ 2 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda \\ 2 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) =$$

$$= -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2).$$

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -2 & -6 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad v_1 = (3,\, -2,\, 2).$$

$\lambda_2 = -1$

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -2 & -4 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = (3,\, -3,\, 2).$$

$\lambda_3 = 2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -2 & -7 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad v_3 = (2,\, -1,\, 1).$$

2. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory (i komplexní) pro matici A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i).$$

$\lambda_1 = 1 + i$

$$\begin{pmatrix} 1-1-i & -1 \\ 1 & 1-1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \quad v_1 = (i,\, 1).$$

$\lambda_2 = 1 - i$

$$\begin{pmatrix} 1-1+i & -1 \\ 1 & 1-1+i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \quad v_2 = (i,\, -1).$$

11. cvičení

Skalární součin a geometrie v E_3

Pojmy které je třeba znát: vlastnosti skalárního součinu, analytická geometrie střední školy

Příklady: 1. V obecném vektorovém prostoru se skalárním součinem najděte velikost a úhel vektorů $a = 2u - v$ a $b = 3u + v - w$ víte-li, že $\|u\| = \|v\| = \|w\| = 1$, úhel mezi vektory u a v je $60°$, úhel mezi vektory u a w je $120°$ a v je kolmý na w.

$\|a\| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{(2u - v) \cdot (2u - v)} = \sqrt{4u \cdot u - 4u \cdot v + v \cdot v}$

$\|b\| = \sqrt{b \cdot b} = \sqrt{(3u + v - w) \cdot (3u + v - w)} = \sqrt{9u \cdot u + v \cdot v + w \cdot w + 6u \cdot v - 6u \cdot w - 2v \cdot w}$

$a \cdot b = (2u - v) \cdot (3u + v - w) = 6u \cdot u - v \cdot v - u \cdot v - 2u \cdot w + v \cdot w$

$\cos(\varphi) = \frac{a \cdot b}{\|a\|\|b\|}$.

Vidíme, že se nám bude hodit předpočítat skalární součiny vektorů u, v, w mezi sebou.

$$\begin{aligned}
u \cdot u &= \|u\|^2 = 1 \\
v \cdot v &= \|v\|^2 = 1 \\
w \cdot w &= \|w\|^2 = 1 \\
u \cdot v &= \|u\|\|v\| \cos(30°) = 1/2 \\
u \cdot w &= \|u\|\|w\| \cos(120°) = -1/2 \\
v \cdot w &= 0
\end{aligned}$$

Dosadíme.

$$\begin{aligned}
&\|a\| = \sqrt{4u \cdot u + v \cdot v - 4u \cdot v} = \sqrt{4 + 1 - 2} = \sqrt{3} \\
&\|b\| = \sqrt{9u \cdot u + v \cdot v + w \cdot w + 6u \cdot v - 6u \cdot w - 2v \cdot w} = \sqrt{9 + 1 + 1 + 3 + 3 + 0} = \sqrt{17} \\
&a \cdot b = 6u \cdot u - v \cdot v - u \cdot v - 2u \cdot w + v \cdot w = 6 - 1 - \tfrac{1}{2} + 1 + 0 = \tfrac{11}{2} \\
&\cos(\varphi) = \tfrac{a \cdot b}{\|a\|\|b\|} = \tfrac{11}{2\sqrt{3 \cdot 17}} \doteq 0,77 \\
&\varphi \doteq 40°
\end{aligned}$$

2. Veďte příčku mimoběžek $p = P + \langle \vec{p} \rangle$ a $q = Q + \langle \vec{q} \rangle$ rovnoběžnou s přímkou $r = R + \langle \vec{r} \rangle$.

$p : P + \langle \vec{p} \rangle = [2, 1, -1] + \langle (1, 1, -1) \rangle$

$q : Q + \langle \vec{q} \rangle = [1, -2, 1] + \langle (2, 1, -1) \rangle$

$r : R + \langle \vec{r} \rangle = [4, 1, 2] + \langle (-1, 2, -1) \rangle$

Nejprve ověříme, že úloha má řešení, tj. vektory $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ jsou lineárně nezávislé

$$\begin{vmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \\ \vec{r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -13$$

Dále ověříme, že p a q jsou mimoběžky, tj. vektory $\vec{p}$, $\vec{q}$, $P - Q$ jsou lineárně nezávislé

$$\begin{vmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \\ P - Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -9$$

Úloha má tedy jednoznačné řešení. Nalezneme ho „geometricky“. Proložíme rovinu ϱ přímkou q a směrem $\vec{r}$ a najdeme průsečík X přímky p a roviny ϱ. Poté už vedeme příčku x bodem X a směrem $\vec{r}$.

Normálový vektor roviny ϱ a její normálová rovnice.

$$\vec{n}_\varrho = \vec{q} \times \vec{r} = (2, 1, 3) \times (-1, 2, -1) = (-7, -1, 5)$$

$$-7x - y + 5y = 0$$

Průsečík přímky p a roviny ϱ.

$$-7(2+t) - (1+t) + 5(-1-t) = -13t - 26 = 0, \quad t = -2$$

$$X = P + t\vec{p} = [2,\, 1,\, -1] - 2(1,\, 1,\, -1) = [0,\, -1,\, 1]$$

A výsledná přímka je

$$x = X + \langle \vec{r} \rangle = [0,\, -1,\, 1] + \langle (-1,\, 2,\, -1) \rangle.$$