10. Řešení příkladů

Toto je volně šířená příloha ke skriptům *Navara, Olšák: Základy fuzzy množin*, Vydavatelství ČVUT, 2002. Viz též `http://math.feld.cvut.cz/skripta/fuzzy.html`.

1.34 — $h(A) = 1$, $\mathrm{Supp}(A) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\mathrm{core}(A) = \{3\}$, $\mathrm{card}(A) = 3{,}2$.

$$\mathcal{R}_A(\alpha) = \begin{cases} X, \text{univerzum není v příkladu dáno} & \text{pro } \alpha = 0, \\ \mathrm{Supp}(A) & \text{pro } \alpha \in (0; 0{,}2\rangle, \\ \{3, 5, 6, 7, 8\} & \text{pro } \alpha \in (0{,}2; 0{,}3\rangle, \\ \{3, 6, 7, 8\} & \text{pro } \alpha \in (0{,}3; 0{,}4\rangle, \\ \{3, 7, 8\} & \text{pro } \alpha \in (0{,}4; 0{,}6\rangle, \\ \{3, 7\} & \text{pro } \alpha \in (0{,}6; 0{,}7\rangle, \\ \{3\} & \text{pro } \alpha \in (0{,}7; 1\rangle. \end{cases}$$

1.35 — $h(A) = 1$, $\mathrm{Supp}(A) = (10, \infty)$, $\mathrm{core}(A) = \emptyset$,

$$\mathcal{R}_A(\alpha) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } \alpha = 0, \\ \left(10, 10 + \sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1}\right\rangle & \text{pro } \alpha \in (0, 1), \\ \emptyset & \text{pro } \alpha = 1. \end{cases}$$

1.36 — $h(A) = \frac{2}{3}$, $\mathrm{Supp}(A) = \left(3 - \frac{\pi}{2}, 3 + \frac{\pi}{2}\right)$, $\mathrm{core}(A) = \emptyset$,

$$\mathcal{R}_A(\alpha) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pro } \alpha = 0, \\ \left\langle 3 - \frac{\arccos(3\alpha - 1)}{2}, 3 + \frac{\arccos(3\alpha-1)}{2} \right\rangle & \text{pro } \alpha \in \left(0, \frac{2}{3}\right\rangle, \\ \emptyset & \text{pro } \alpha \in \left(\frac{2}{3}, 1\right\rangle. \end{cases}$$

1.37 —

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ \sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2} & \text{pro } x \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right), \\ 1 & \text{pro } x \in \left\langle \frac{1}{2}, 1\right), \\ \frac{3-x}{2} & \text{pro } x \in \langle 1, 3\rangle, \\ 0 & \text{pro } x > 3. \end{cases}$$

1.38 — $\mathrm{core}(A) = \{0\}$, $h(A) = 1$, $\mathrm{Supp}(A) = (-2, 2)$,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \notin (-2, 2), \\ 1 - \sqrt{\frac{|x|}{2}} & \text{pro } x \in (-2, 2). \end{cases}$$

1.39 — $A = \{(1; 1), (2; 0{,}7), (3; 0{,}2)\}$, $A \in \mathcal{F}(\{1, 2, 3, 4\})$, $\mathrm{card}(A) = 1{,}9$.

1.40 —

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \notin (3, 7), \\ 1 - \left|\frac{5-x}{2}\right|^{1/p} & \text{pro } x \in (3, 7). \end{cases}$$

Pro $p = 1$ je grafem „rovná střecha“, pro $p = 2$ je grafem „prohnutá střecha“ (dvě konvexní části) a pro $p = \frac{1}{2}$ je grafem „vypouklá střecha“ (dvě konkávní části).

1.41 — a) Není systémem řezů, protože neplatí (R2) věty 1.14 (monotonie systému řezů).
b) Není systémem řezů, protože neplatí (R3) věty 1.14. Průnik otevřených intervalů $\left(5 - 2\,(1-\alpha)^p;\ 5 + 2\,(1-\alpha)^p\right)$ pro $\alpha < \beta$ je uzavřený interval.

1.42 — α-řez nemusí být uzavřená množina, může to být otevřená množina. Například $\mathcal{R}_A(1/2) = (0, 1)$ pro

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \notin (0,1), \\ 1 & \text{pro } x \in (0,1). \end{cases}$$

Je-li funkce příslušnosti spojitá, pak podle definice řezu (1.1) je každý řez uzavřená množina (vzor uzavřeného obrazu spojité funkce je uzavřená množina).

1.43 — Pouze (R2). Místo (R1) platí $\mathcal{S}_A(1) = \emptyset$ a místo (R3) platí $\mathcal{S}_A(\beta) = \bigcup\limits_{\alpha>\beta} \mathcal{S}_A(\alpha)$.

2.96 — Nechť $e_1 \leq e_2$ jsou dvě rovnovážné hodnoty. Podle (N1) musí $\underset{\cdot}{\neg}\, e_1 = e_1 \geq \underset{\cdot}{\neg}\, e_2 = e_2$, tedy $e_1 = e_2$.

2.97 — Předpokládejme: $\underset{1}{\neg} = i \circ \underset{S}{\neg} \circ i^{-1}$, $\underset{2}{\neg} = j \circ \underset{1}{\neg} \circ j^{-1}$, tj. $\underset{2}{\neg} = j \circ i \circ \underset{S}{\neg} \circ i^{-1} \circ j^{-1}$.
Je-li $\underset{1}{\neg}$ fuzzy negace a j je rostoucí bijekce, pak existuje rostoucí bijekce i a $\underset{2}{\neg}$ je generována rostoucí bijekcí $j \circ i$ ze standardní negace. Tj. $\underset{2}{\neg}$ je fuzzy negace.
Obráceně: Jsou-li $\underset{1}{\neg}$ a $\underset{2}{\neg}$ fuzzy negace, pak $j \circ i$ je rostoucí bijekce a také i je rostoucí bijekce. Potom $j = j \circ i \circ i^{-1}$ je rostoucí bijekce, která generuje fuzzy negaci $\underset{2}{\neg}$ z fuzzy negace $\underset{1}{\neg}$.

2.98 — (N1): Pro $\alpha \leq \beta$ a $\lambda > -1$ ověříme $\frac{1-\beta}{1+\lambda\beta} \overset{?}{\leq} \frac{1-\alpha}{1+\lambda\alpha}$, to je ekvivalentní s nerovností $(1-\beta)\,(1+\lambda\alpha) \overset{?}{\leq} (1-\alpha)\,(1+\lambda\beta)$ a to je ekvivalentní s $(\lambda+1)\,\alpha \overset{?}{\leq} (\lambda+1)\,\beta$, a to zjevně platí.
(N2):

$$\frac{1 - \frac{1-\alpha}{1+\lambda\alpha}}{1 + \lambda\,\frac{1-\alpha}{1+\lambda\alpha}} = \frac{\frac{1+\lambda\alpha-1+\alpha}{1+\lambda\alpha}}{\frac{1+\lambda\alpha+\lambda-\lambda\alpha}{1+\lambda\alpha}} = \frac{(\lambda+1)\,\alpha}{\lambda+1} = \alpha$$

2.99 — Podle (2.1):

$$i(\alpha) = \frac{\alpha + \underset{S}{\neg}\,\frac{1-\alpha}{1+\lambda\alpha}}{2} = \frac{\alpha + 1 - \frac{1-\alpha}{1+\lambda\alpha}}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{(1+\alpha)\,(1+\lambda\alpha) - 1 + \alpha}{1+\lambda\alpha} = \frac{1}{2}\,\frac{2\alpha + \lambda\alpha + \lambda\alpha^2}{1+\lambda\alpha}$$

2.100 — Musí podle (N2) platit $\left(1 - (1-\alpha)^w\right)^w = \alpha$. Pro $w = 0$ to není splněno. Po úpravě: $1 - \alpha^{1/w} = (1-\alpha)^w$ vidíme, že to je splněno jen pro $w = 1$.

2.101 — Pro jednoduchost zvolme $\alpha = e$ (rovnovážná hodnota) a

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ x & \text{pro } x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 1 & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$

Pak je $\mathcal{R}_A(\alpha) = \langle e, \infty)$ a $\mathcal{R}_{\overline{A}}(\alpha) = (-\infty, e\rangle$. Tyto dva intervaly si nejsou vzájemně doplňkem, protože oba obsahují bod e. Při $\alpha \neq e$ se interval $\mathcal{R}_{\overline{A}}(\alpha)$ od doplňku intervalu $\mathcal{R}_A(\alpha)$ liší ještě výrazněji.

2.102 — (T1): zřejmé, (T2):

$$\alpha \triangle (\beta \triangle \gamma) = \frac{\alpha \frac{\beta\gamma}{2-\beta-\gamma+\beta\gamma}}{2-\alpha+(\alpha-1)\frac{\beta\gamma}{2-\beta-\gamma+\beta\gamma}} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4-2\alpha-2\beta-2\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\beta\gamma}$$

Totéž vychází pro $(\alpha \triangle \beta) \triangle \gamma$.

(T3):

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\alpha\beta}{2-\alpha-\beta+\alpha\beta} = \frac{\alpha\,(2-\alpha-\beta+\alpha\beta)-\alpha\beta\,(-1+\alpha)}{(2-\alpha-\beta+\alpha\beta)^2} = \frac{\alpha\,(2-\alpha)}{(2-\alpha-\beta+\alpha\beta)^2} \geq 0$$

(T4):

$$\frac{\alpha\cdot 1}{2-\alpha-1+\alpha} = \alpha.$$

Je archimédovská:

$$\frac{\alpha^2}{2-\alpha-\alpha-\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{1+(1-\alpha)^2} < \alpha^2 < \alpha \quad \text{pro } \alpha \in (0,1).$$

Je striktní, protože $\partial(\alpha \triangle \beta)/\partial\beta > 0$ pro $\alpha \neq 0$. Není tedy nilpotentní.

2.103 — (S1): zřejmé. (S2):

$$\alpha \dot{\vee} (\beta \dot{\vee} \gamma) = \left(\alpha^w + (\beta^w+\gamma^w-\beta^w\gamma^w)^{\frac{1}{w}w} - \alpha^w\,(\beta^w+\gamma^w-\beta^w\gamma^w)^{\frac{1}{w}w}\right)^{\frac{1}{w}} =$$

$$= \left(\alpha^w+\beta^w+\gamma^w-\alpha^w\beta^w-\alpha^w\gamma^w-\beta^w\gamma^w+\alpha^w\beta^w\gamma^w\right)^{\frac{1}{w}}$$

To samé vychází pro $(\alpha \dot{\vee} \beta) \dot{\vee} \gamma$.

(S3):

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(\alpha^w+\beta^w-\alpha^w\beta^w)^{\frac{1}{w}} = \frac{1}{w}(\alpha^w+\beta^w-\alpha^w\beta^w)^{\frac{1}{w}-1}(\alpha^w+w\beta^{w-1}-w\alpha^w\beta^{w-1}) =$$

$$= \frac{1}{w}\left(\alpha^w+\beta^w\,(1-\alpha^w)\right)^{\frac{1}{w}-1}\left(\alpha^w+w\beta^{w-1}\,(1-\alpha^w)\right) \geq 0$$

(S4): $(\alpha^w+0^w-\alpha^w\cdot 0^w)^{\frac{1}{w}} = \alpha$.

Jiný postup: jedná se o fuzzy disjunkci generovanou ze součinové disjunkce rostoucí bijekcí $i(\alpha) = \alpha^w$.

Je archimédovská a striktní, viz větu 2.78.

2.104 —

$$\underset{S}{\neg}(\underset{S}{\neg}\alpha \underset{L}{\wedge} \underset{S}{\neg}\beta) = 1-\max(1-\alpha+1-\beta-1,0) = 1-\max(1-\alpha-\beta,0) =$$

$$= \min(\alpha+\beta,1) = \alpha \overset{L}{\vee} \beta$$

$$\underset{S}{\neg}(\underset{S}{\neg}\alpha \underset{P}{\wedge} \underset{S}{\neg}\beta) = 1-(1-\alpha)(1-\beta) = 1-(1-\alpha-\beta+\alpha\beta) = \alpha+\beta-\alpha\beta =$$

$$= \alpha \overset{P}{\vee} \beta$$

$$\underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\alpha \underset{\mathrm{S}}{\wedge} \underset{\cdot}{\neg}\beta) = \underset{\cdot}{\neg}\min(\underset{\cdot}{\neg}\alpha, \underset{\cdot}{\neg}\beta) \overset{(\mathrm{N1})}{=} \max(\underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha, \underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\beta) \overset{(\mathrm{N2})}{=} \max(\alpha, \beta) =$$

$$= \alpha \overset{\mathrm{S}}{\vee} \beta$$

$$\underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\alpha \underset{\mathrm{D}}{\wedge} \underset{\cdot}{\neg}\beta) = \left\{\begin{array}{ll} \underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\alpha) = \alpha & \text{pro } \underset{\cdot}{\neg}\beta = 1, \text{ tj. } \beta = 0 \\ \underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\beta) = \beta & \text{pro } \underset{\cdot}{\neg}\alpha = 1, \text{ tj. } \alpha = 0 \\ \underset{\cdot}{\neg}0 = 1 & \text{pro ostatní případy} \end{array}\right\} = \alpha \overset{\mathrm{D}}{\vee} \beta$$

Předpokládejme navíc $\alpha \underset{2}{\wedge} \beta = \underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\alpha \dot{\vee} \underset{\cdot}{\neg}\beta)$. Pak:

$$\alpha \underset{2}{\wedge} \beta = \underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\alpha \dot{\vee} \underset{\cdot}{\neg}\beta) = \underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha \dot{\wedge} \underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\beta) \overset{(\mathrm{N2})}{=} \alpha \dot{\wedge} \beta$$

takže nemusíme ověřovat dualitu znovu od disjunkce směrem ke konjunkci.

2.105 — Šotek: nejedná se o předchozí příklad ale o příklad 2.103.

$$\underset{\mathrm{Y}w}{\neg}(\underset{\mathrm{Y}w}{\neg}\alpha \dot{\vee} \underset{\mathrm{Y}w}{\neg}\beta) = \underset{\mathrm{Y}w}{\neg}\big(1 - \alpha^w + 1 - \beta^w - (1-\alpha^w)(1-\beta^w)\big)^{\frac{1}{w}} = \underset{\mathrm{Y}w}{\neg}\big(1 - \alpha^w\beta^w\big)^{\frac{1}{w}} =$$

$$= \big(1 - (1 - \alpha^w\beta^w)\big)^{\frac{1}{w}} = \alpha\beta = \alpha \overset{\mathrm{P}}{\vee} \beta\,.$$

2.106 — 1. Nechť $r > 0$:

$$i_r(\alpha) = \frac{\alpha}{r + (1-r)\alpha} = x, \quad \text{tj.} \quad i_r^{-1}(x) = \frac{rx}{1 + (r-1)\,x}\,.$$

$$\alpha \underset{\mathrm{H}r}{\wedge} \beta = i_r^{-1}\left(\frac{\alpha}{r+(1-r)\alpha} \cdot \frac{\beta}{r+(1-r)\beta}\right) = \frac{r\,\frac{\alpha}{r+(1-r)\alpha}\,\frac{\beta}{r+(1-r)\beta}}{1 + (r-1)\,\frac{\alpha}{r+(1-r)\alpha}\,\frac{\beta}{r+(1-r)\beta}} =$$

$$= \frac{r\alpha\beta}{\big(r + (1-r)\alpha\big)\big(r + (1-r)\beta\big) + (r-1)\,\alpha\beta} = \frac{r\alpha\beta}{r\,(r+\alpha+\beta-r\alpha-r\beta-\alpha\beta+r\alpha\beta)} =$$

$$= \frac{\alpha\beta}{r + (1-r)(\alpha + \beta - \alpha\beta)}\,.$$

2. Nechť $r = 0$. Předpokládejme nejprve $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.

$$i_0(\alpha) = e^{-c\,\frac{1-\alpha}{\alpha}} = x, \quad \text{tj.} \quad i_0^{-1}(x) = \frac{c}{c - \ln x}\,.$$

$$\alpha \underset{\mathrm{H}0}{\wedge} \beta = i_0^{-1}\left(e^{-c\,\frac{1-\alpha}{\alpha}} \cdot e^{-c\,\frac{1-\beta}{\beta}}\right) = \frac{c}{c + c\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} + \frac{1-\beta}{\beta}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{\beta\,(1-\alpha)+\alpha\,(1-\beta)}{\alpha\beta}} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}\,.$$

Pro $\alpha = 0$ nebo $\beta = 0$ je $\alpha \underset{\mathrm{H}0}{\wedge} \beta = 0$, což je v souladu s tím, že $i_0^{-1}(0) = 0$.

Pro $r = 2$ dostáváme fuzzy konjunkci z příkladu 2.102.

2.108 — $\underset{\mathrm{H}1}{\wedge} = \underset{\mathrm{P}}{\wedge}$ vychází snadno po dosazení. Dále je pro $\alpha \neq 1$ a $\beta \neq 1$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\alpha\beta}{r + (1-r)(\alpha+\beta-\alpha\beta)} = 0$$

a pro $\alpha = 1$ je $\frac{\alpha\beta}{r+(1-r)(\alpha+\beta-\alpha\beta)} = \beta$. Podobně pro $\beta = 1$ vychází $\alpha \underset{\mathrm{H}\infty}{\wedge} \beta = \alpha$. To odpovídá drastické konjunkci. Poznámka: hodnoty konjunkcí pro $\alpha = 1$ nebo $\beta = 1$ vyplývají také přímo z podmínky (T4).

1.109 — Předpokládejme: $\alpha \underset{1}{\wedge} \beta = i^{-1}\big(i(\alpha) \underset{P}{\wedge} i(\beta)\big)$, $\alpha \underset{2}{\wedge} \beta = j^{-1}\big(j(\alpha) \underset{1}{\wedge} j(\beta)\big)$, tj.

$$\alpha \underset{2}{\wedge} \beta = j^{-1}\Big(i^{-1}\big(i(j(\alpha)) \underset{P}{\wedge} i(j(\beta))\big)\Big)\,.$$

Je-li $\underset{1}{\wedge}$ striktní fuzzy konjunkce a j je rostoucí bijekce, pak existuje rostoucí bijekce i a $\underset{2}{\wedge}$ je generována rostoucí bijekcí $j \circ i$ ze součinové konjunkce. Tj. $\underset{2}{\wedge}$ je striktní fuzzy konjunkce.

Obráceně: Jsou-li $\underset{1}{\wedge}$ a $\underset{2}{\wedge}$ striktní fuzzy konjunkce, pak $j \circ i$ je rostoucí bijekce a také i je rostoucí bijekce. Potom $j = j \circ i \circ i^{-1}$ je rostoucí bijekce, která generuje striktní fuzzy konjunkci $\underset{2}{\wedge}$ z konjunkce $\underset{1}{\wedge}$.

2.110 — Jako v 2.109. Pouze zaměníme $\underset{P}{\wedge}$ za $\underset{L}{\wedge}$ a slovo striktní za slovo nilpotentní. Místo věty 2.42 pak použijeme větu 2.46.

2.111 — Nechť $\underset{\cdot}{\wedge}$ je fuzzy konjunkce a $\underset{\cdot}{\neg}$ je fuzzy negace. Ověříme, že $\alpha \dot\vee \beta = \underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \underset{\cdot}{\neg}\beta)$ je fuzzy disjunkce. Komutativita je zřejmá. (S2):

$$\alpha \dot\vee (\beta \dot\vee \gamma) = \alpha \dot\vee \underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\beta \underset{\cdot}{\wedge} \underset{\cdot}{\neg}\gamma) = \underset{\cdot}{\neg}\big(\underset{\cdot}{\neg}\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\beta \underset{\cdot}{\wedge} \underset{\cdot}{\neg}\gamma)\big) \overset{(N2)}{=} \underset{\cdot}{\neg}\big(\underset{\cdot}{\neg}\alpha \underset{\cdot}{\wedge} (\underset{\cdot}{\neg}\beta \underset{\cdot}{\wedge} \underset{\cdot}{\neg}\gamma)\big) \overset{(T2)}{=}$$

$$= \underset{\cdot}{\neg}\big((\underset{\cdot}{\neg}\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \underset{\cdot}{\neg}\beta) \underset{\cdot}{\wedge} \underset{\cdot}{\neg}\gamma\big) = \cdots = (\alpha \dot\vee \beta) \dot\vee \gamma$$

(S3): Nechť $\beta \le \gamma$, tj. $\underset{\cdot}{\neg}\beta \ge \underset{\cdot}{\neg}\gamma$. Pak platí:

$$\underset{\cdot}{\neg}(\alpha \dot\vee \beta) = \underset{\cdot}{\neg}\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \underset{\cdot}{\neg}\beta \overset{(T3)}{\ge} \underset{\cdot}{\neg}\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \underset{\cdot}{\neg}\gamma = \underset{\cdot}{\neg}(\alpha \dot\vee \gamma), \quad \text{tj.} \quad \alpha \dot\vee \beta \le \alpha \dot\vee \gamma\,.$$

(S4): $\alpha \dot\vee 0 = \underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \underset{\cdot}{\neg}0) = \underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\alpha \underset{\cdot}{\wedge} 1) \overset{(T4)}{=} \underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha \overset{(N2)}{=} \alpha$.
U fuzzy konjunkce odvozené z fuzzy disjunkce postupujeme analogicky.

2.112 — Řezová konzistence má v tomto případě tvar: $\mathcal{R}_A(\alpha) \cap \mathcal{R}_B(\alpha) = \mathcal{R}_{A \underset{\cdot}{\cap} B}(\alpha)$, pro všechna $\alpha \in (0, 1\rangle$.

$$\mathcal{R}_A(\alpha) \cap \mathcal{R}_B(\alpha) = \big\{x;\ (\mu_A(x) \ge \alpha) \wedge (\mu_B(x) \ge \alpha)\big\} = \big\{x;\ \min\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) \ge \alpha\big\} \overset{(1)}{=}$$
$$= \big\{x;\ \mu_A(x) \underset{S}{\wedge} \mu_B(x) \ge \alpha\big\} = \mathcal{R}_{A \underset{S}{\cap} B}(\alpha)\,.$$

Pro jiný než standardní průnik nemusí být splněna rovnost (1).
Podobnou úvahu bychom udělali pro sjednocení.

3.44 — Šotek: Yagerova konjunkce je ve skutečnosti tvaru:

$$\alpha \underset{Y_w}{\wedge} \beta = \max\Big(1 - \big((1-\alpha)^w + (1-\beta)^w\big)^{\frac{1}{w}}, 0\Big)\,.$$

a nikoli jak bylo uvedeno v odstavcích 2.28 nebo 2.81.

Dále je zřejmé, že Yagerovy operace se standardní negací *nesplňují* zákon kontradikce ani zákon vyloučeného třetího. Stačí zvolit $w = 2$ a $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\alpha \underset{Y_w}{\wedge} \underset{S}{\neg}\alpha = \max\left(1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}, 0\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0\,.$$

$$\alpha \overset{Y_w}{\vee} \underset{S}{\neg}\alpha = \min\left(\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1\,.$$

3.45 — Ovšemže všechny vzorečky pro $\alpha \in \{0, 1\}, \beta \in \{0, 1\}$ se shodují s klasickou implikací.

3.46 — $\alpha \underset{L}{\wedge} (\alpha \overset{R}{\underset{L}{\to}} \beta) = \max\big(\alpha + (\alpha \overset{R}{\underset{L}{\to}} \beta) - 1, 0\big) = \max\big(\alpha + \sup\{\gamma : \alpha + \gamma - 1 \leq \beta\} - 1, 0\big) =$

$$= \left\{\begin{array}{ll} \max(\alpha + 1 - 1, 0) = \alpha & \text{pro } \alpha \leq \beta \\ \max(\alpha + 1 - \alpha + \beta - 1, 0) = \beta & \text{pro } \alpha > \beta \end{array}\right\} = \min(\alpha, \beta) = \alpha \underset{S}{\wedge} \beta\,.$$

$\alpha \underset{S}{\wedge} (\alpha \overset{R}{\underset{S}{\to}} \beta) = \min(\alpha, \alpha \overset{R}{\underset{S}{\to}} \beta) = \min\big(\alpha, \sup\{\gamma : \min(\alpha, \gamma) \leq \beta\}\big) =$

$$= \left\{\begin{array}{ll} \min(\alpha, 1) = \alpha & \text{pro } \alpha \leq \beta \\ \min(\alpha, \beta) = \beta & \text{pro } \alpha > \beta \end{array}\right\} = \min(\alpha, \beta) = \alpha \underset{S}{\wedge} \beta\,.$$

$$\alpha \underset{P}{\wedge} (\alpha \overset{R}{\underset{P}{\to}} \beta) = \alpha \cdot \sup\{\gamma : \alpha\gamma \leq \beta\} = \left\{\begin{array}{ll} \alpha \cdot 1 = \alpha & \text{pro } \alpha \leq \beta \\ \alpha \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \beta & \text{pro } \alpha > \beta \end{array}\right\} = \min(\alpha, \beta) = \alpha \underset{S}{\wedge} \beta\,.$$

3.47 — Neplatí.

3.48 — Zaměříme se na první část vzorce z návodu. Je-li $\alpha \leq \beta$, pak podle věty 3.20 platí:

$$(\alpha \overset{R}{\underset{\cdot}{\to}} \beta) \overset{R}{\underset{\cdot}{\to}} \beta = 1 \overset{R}{\underset{\cdot}{\to}} \beta = \beta = \max(\alpha, \beta)\,.$$

Uvažujme nyní $\alpha > \beta$. Podle definice $\overset{R}{\underset{\cdot}{\to}}$ je:

$$(\alpha \overset{R}{\underset{\cdot}{\to}} \beta) \overset{R}{\underset{\cdot}{\to}} \beta = \sup\big\{\delta : \delta \underset{\cdot}{\wedge} \sup\{\gamma : \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \gamma \leq \beta\} \leq \beta\big\}\,.$$

Konjunkce a) Łukasiewiczova, b) standardní i c) součinová splňují, že vnitřní suprémum bude realizováno v bodě γ, pro který platí $\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \gamma = \beta$ (není tedy menší, ale přímo se rovná). Ze striktní monotonie fuzzy konjunkce pak plyne, že vnější suprémum bude rovno číslu α, protože jedině $\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \gamma = \beta$. Protože je $\alpha > \beta$, jsou v bodě α striktně monotóní i konjunce a) $\underset{L}{\wedge}$ a b) $\underset{S}{\wedge}$. Máme znovu výsledek: $\max(\alpha, \beta)$.

V druhé části vzorce z návodu $(\beta \overset{R}{\underset{\cdot}{\to}} \alpha) \overset{R}{\underset{\cdot}{\to}} \alpha$ je pouze prohozeno β za α, tj. dostáváme stejný výsledek $\max(\alpha, \beta)$. Dohromady dostáváme:

$$\max(\alpha, \beta) \underset{S}{\wedge} \max(\alpha, \beta) = \max(\alpha, \beta) = \alpha \overset{S}{\vee} \beta\,.$$

3.49 — Gödelova implikace se aplikováním rostoucí bijekce nezmění.

3.50 —

$$\alpha \dot{\to} (\beta \mathbin{\dot\wedge_S} \gamma) = \alpha \dot{\to} \min(\beta,\gamma) = \begin{cases} \alpha \dot{\to} \beta & \text{pro } \beta \le \gamma, \\ \alpha \dot{\to} \gamma & \text{pro } \beta > \gamma, \end{cases}$$

$$(\alpha \dot{\to} \beta) \mathbin{\dot\wedge_S} (\alpha \dot{\to} \gamma) = \min(\alpha \dot{\to} \beta, \alpha \dot{\to} \gamma) = \begin{cases} \alpha \dot{\to} \beta & \text{pro } \beta \le \gamma, \\ \alpha \dot{\to} \gamma & \text{pro } \beta > \gamma, \end{cases}$$

Tedy pravá strana první rovnosti se rovná levé. Podobně bychom ověřili ostatní rovnosti.

4.48 — Reflexivita: $\mu_R(x,x) = \mu_R(x,x)$. Symetrie: $\mu_R(x,y) = \mu_R(y,x)$, pak $\mu_R(y,x) = \mu_R(x,y)$. Antisymetrie: $(R^{-1})^{-1} = R$ a platí: $R \mathbin{\dot\cap} R^{-1} \subseteq \delta$, pak $R^{-1} \mathbin{\dot\cap} R \subseteq \delta$. Tranzitivita: $\forall y \in \langle 0,1\rangle : \mu_R(x,y) \mathbin{\dot\wedge} \mu_R(y,z) \le \mu_R(x,z)$ pak $\forall y \in \langle 0,1\rangle : \mu_R(z,y) \mathbin{\dot\wedge} \mu_R(y,x) \le \mu_R(z,x)$.

4.49 — Musí $R \in \mathcal{F}(A \times B)$ a $S \in \mathcal{F}(B \times A)$. Uvažujme $R,S \in \mathcal{F}(\{1,2\}^2)$ a nechť $\mu_R(2,1) = \mu_S(1,2) = 1$ a jinde jsou hodnoty nulové. Pak

$$\mu_{R \circ S}(1,1) = \sup\{\mu_R(1,1) \mathbin{\dot\wedge} \mu_S(1,1), \mu_R(1,2) \mathbin{\dot\wedge} \mu_S(2,1)\} = 0$$

$$\mu_{S \circ R}(1,1) = \sup\{\mu_S(1,1) \mathbin{\dot\wedge} \mu_R(1,1), \mu_S(1,2) \mathbin{\dot\wedge} \mu_R(2,1)\} = 1$$

Na fuzzy konjunkci v tomto příkladě nezáleží.

4.50 — Postupujeme podobně, jako v příkladu 4.9. Vzdáleně to připomíná násobení matic.

$R \circ_S S$:

	0	1	2
0	0,30	0,10	0,30
1	0,60	0,40	0,60
2	0,90	0,50	0,80

$S \circ_S R$:

	0	1	2
0	0,50	0,50	0,50
1	0,70	0,80	0,90
2	0,70	0,70	0,70

$R \circ_P S$:

	0	1	2
0	0,30	0,05	0,21
1	0,60	0,20	0,50
2	0,90	0,35	0,80

$S \circ_P R$:

	0	1	2
0	0,35	0,40	0,45
1	0,70	0,80	0,90
2	0,49	0,56	0,63

$R \circ_L S$:

	0	1	2
0	0,30	0,00	0,20
1	0,60	0,00	0,50
2	0,90	0,20	0,80

$S \circ_L R$:

	0	1	2
0	0,20	0,30	0,40
1	0,70	0,80	0,90
2	0,40	0,50	0,60

$R \circ_D S$:

	0	1	2
0	0,30	0,00	0,20
1	0,60	0,00	0,50
2	0,90	0,00	0,80

$S \circ_D R$:

	0	1	2
0	0,00	0,00	0,00
1	0,70	0,80	0,90
2	0,10	0,20	0,30

4.51 — Je užitečné ve vzorci pro relaci S přeznačit proměnné:

$$\mu_S(y,z) = \begin{cases} \frac{y+z}{2} & \text{pro } y \in \langle 1,2\rangle \text{ a } z \in \langle -1,0\rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

$$\mu_{R\circ S}(x,z) = \sup_{y\in\mathbb{R}}\{\mu_R(x,y) \mathbin{\hat{\wedge}} \mu_S(y,z)\} = \sup_{y\in\{1,2\}}\{\mu_R(x,y) \mathbin{\hat{\wedge}} \mu_S(y,z)\} =$$

$$= \max\{\mu_R(x,1) \mathbin{\hat{\wedge}} \mu_S(1,z), \mu_R(x,2) \mathbin{\hat{\wedge}} \mu_S(2,z)\},$$

protože kladné supremum dostaneme jen pro $y \in \{0,1,2\}$ a $y \in \langle 1,2\rangle$, tedy $y \in \{1,2\}$.

Nenulový výsledek dostaneme jen pro $x \in \{0,1,2\}$ a $z \in \langle -1,0\rangle$, takže předpokládejme $z \in \langle -1,0\rangle$ a počítejme pro tři různá x:

$$x = 0: \quad \mu_{R\circ S}(0,z) = \max\left\{0{,}2 \mathbin{\hat{\wedge}} \frac{1+z}{2}; 0{,}3 \mathbin{\hat{\wedge}} \frac{2+z}{2}\right\} = 0{,}3 \mathbin{\hat{\wedge}} \frac{2+z}{2},$$

$$x = 1: \quad \mu_{R\circ S}(1,z) = \max\left\{0{,}5 \mathbin{\hat{\wedge}} \frac{1+z}{2}; 0{,}6 \mathbin{\hat{\wedge}} \frac{2+z}{2}\right\} = 0{,}6 \mathbin{\hat{\wedge}} \frac{2+z}{2},$$

$$x = 2: \quad \mu_{R\circ S}(2,z) = \max\left\{0{,}8 \mathbin{\hat{\wedge}} \frac{1+z}{2}; 0{,}9 \mathbin{\hat{\wedge}} \frac{2+z}{2}\right\} = 0{,}9 \mathbin{\hat{\wedge}} \frac{2+z}{2}.$$

Ve všech případech byl druhý prvek množiny větší, protože jsou větší oba argumenty konjunkce $\hat{\wedge}$. Nezáleží tedy na konkrétní fuzzy konjunkci. Dosadit za fuzzy konjunkci $\underset{S}{\wedge}$, $\underset{P}{\wedge}$, $\underset{L}{\wedge}$ zvládne již čtenář sám.

V ostatních případech je $\mu_{R\circ S}(x,z) = 0$.

4.52 —

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = y = 0 \\ \dfrac{\min(x,y)}{\max(x,y)} & \text{jindy.} \end{cases}$$

Nechť $x \neq 0, z \neq 0$ a bez újmy na obecnosti předpokládejme $x \leq z$.

$$\mu_{R\underset{S}{\circ}R}(x,z) = \sup_{y\in\langle 0,1\rangle}\left\{\frac{\min(x,y)}{\max(x,y)} \underset{S}{\wedge} \frac{\min(y,z)}{\max(y,z)}\right\} = \frac{\sqrt{xz}}{z}.$$

Pro $y \in \langle 0,x\rangle$ má levý zlomek hodnotu $\frac{y}{x}$ a pravý hodnotu $\frac{y}{z}$. Minimum (výsledek konjunkce $\underset{S}{\wedge}$) je $\frac{y}{z}$. Pro $y \in \langle z,1\rangle$ má levý zlomek hodnotu $\frac{x}{y}$ a pravý hodnotu $\frac{z}{y}$ a minimum je $\frac{x}{y}$. Uprostřed pro $y \in \langle x,z\rangle$ má levý zlomek hodnotu $\frac{x}{y}$ a pravý hodnotu $\frac{y}{z}$ a tyto funkce se protínají v bodě $\sqrt{xz}$. Vlevo od tohoto bodu je menší $\frac{y}{z}$ a vpravo $\frac{x}{y}$. Vidíme tedy, že funkce $\frac{\min(x,y)}{\max(x,y)} \underset{S}{\wedge} \frac{\min(y,z)}{\max(y,z)}$ v proměnné y roste lineárně až po bod $\sqrt{xz}$ a pak klesá. Maximum této funkce je rovno hledanému suprému a jeho hodnota je $\frac{\sqrt{xz}}{z}$.

Pro $x \geq z$ vychází analogicky $\frac{\sqrt{xz}}{x}$.

Nechť nyní $x = 0, z > 0$. Pak $\mu_R(x,y)$ má hodnotu 0 všude jinde než v bodě $y = 0$, kde $\mu_R(x,y) = 1$ Stačí tedy vyhodnotit supremum pro $y = 0$:

$$\mu_{R\underset{S}{\circ}R}(0,z) = 1 \mathbin{\hat{\wedge}} \frac{\min(1,z)}{\max(1,z)} = z.$$

Analogicky pro $x > 0, z = 0$ vychází $\mu_{R \circ R}(x, 0) = x$.

Konečně pro $x = z = 0$ je suprémum nabyto v bodě $y = 0$ a jeho hodnota je 1. Máme tedy $\mu_{R \circ R}(0, 0) = 1$.

4.53 — $\mu_R(x, y) = 1 - |x - y|$. Relace je zřejmě reflexivní a symetrická. Zkoumejme $\dot{\wedge}$-tranzitivitu:

$$(1 - |x - y|) \mathbin{\dot{\wedge}} (1 - |y - z|) \leq 1 - |x - z| \,.$$

Nechť $x = 0, y = \frac{1}{2}, z = 1$. Pak máme

$$\frac{1}{2} \mathbin{\dot{\wedge}} \frac{1}{2} \leq 0$$

a to neplatí pro $\underset{S}{\wedge}$ ani pro $\underset{P}{\wedge}$. Relace tedy není S-ekvivalencí ani P-ekvivalencí. Po dosazení $\underset{L}{\wedge}$ dostáváme:

$$1 - |x - y| + 1 - |y - z| - 1 = 1 - (|x - y| + |y - z|) \leq 1 - |x - z| \,,$$

tedy: $|x - y| + |y - z| \geq |x - z|$ a to je trojúhelníková nerovnost. Relace tedy je L-ekvivalencí.

4.54 — Musíme zjistit, kdy $\mathcal{R}_{R \circ S}(\alpha) = \mathcal{R}_R(\alpha) \circ \mathcal{R}_S(\alpha)$, tj.:

$$\{(x, z); \mu_{R \circ S}(x, z) \geq \alpha\} = \{(x, y); \mu_R(x, y) \geq \alpha\} \circ \{(y, z); \mu_S(y, z) \geq \alpha\}$$

Pravá množina se dá rozepsat takto:

$$\{(x, z); \exists y : \mu_R(x, y) \geq \alpha \wedge \mu_S(y, z) \geq \alpha\} = \{(x, z); \exists y : \min(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z)) \geq \alpha\}$$

Nechť dále množina, ve které se pohybuje y, je konečná (suprémum je nabýváno). Bez tohoto předpokladu není ani standardní skládání řezově konzistentní, viz 4.23 a 4.24. Levou množinu rozepíšeme takto:

$$\{(x, z); \sup_{y \in Y}(\mu_R(x, y) \mathbin{\dot{\wedge}} \mu_S(y, z)) \geq \alpha\} = \{(x, z); \exists y : \mu_R(x, y) \mathbin{\dot{\wedge}} \mu_S(y, z) \geq \alpha\}$$

Vidíme, že levá množina se rovná pravé jen tehdy, když použijeme standardní fuzzy konjunkci.

4.55 — Máme ověřit, zda R je $\dot{\wedge}$-antisymetrická $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}_R(\alpha)$ je antisymetrická $\forall \alpha \in (0, 1\rangle$. Nechť $x \neq y$. Víme, že R je $\dot{\wedge}$-antisymetrická právě tehdy, když $\mu_R(x, y) \mathbin{\dot{\wedge}} \mu_R(y, x) = 0$. Dále s antisymetrií řezu $\mathcal{R}_R(\alpha)$ je ekvivalentní $\mu_R(x, y) \geq \alpha \wedge \mu_R(y, x) \geq \alpha = 0 \, \forall \alpha \in (0, 1\rangle$. Łukasiewiczova antisymetrie: stačí zvolit $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x) = \frac{1}{2}$ a je zřejmé, že výroky nejsou ekvivalentní: ostrá konjunkce nedává nulu pro $\alpha = \frac{1}{2}$. Součinová antisymetrie: platí, protože oba výroky jsou ekvivalentí s tím, že aspoň jedno z čísel $\mu_R(x, y)$, $\mu_R(y, x)$ musí být nulové.

4.56 — Máme zjistit, kdy platí ekvivalence:

$$R \text{ je } \bullet\text{-tranzitivní} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{R}_R(\alpha) \text{ je tranitivní } \forall\alpha \in (0,1).$$

To je totéž, jako:

$$\forall y : \mu_R(x,y) \mathbin{\dot\wedge} \mu_R(y,z) \le \mu_R(x,z) \;\Leftrightarrow\; \forall\alpha > 0 : \mu_R(x,y) \ge \alpha \wedge \mu_R(y,z) \ge \alpha \Rightarrow \mu_R(x,z) \ge \alpha.$$

Výrok na pravé straně lze přepsat: $\forall\alpha > 0 : \min\bigl(\mu_R(x,y), \mu_R(y,z)\bigr) \ge \alpha \Rightarrow \mu_R(x,z) \ge \alpha$ a to je ekvivalentní s: $\min\bigl(\mu_R(x,y), \mu_R(y,z)\bigr) \le \mu_R(x,z)$. Vidíme tedy, že ekvivalenci výroků lze splnit jen pro standardní konjunkci.

Tento dokument zatím není úplný. Postupně jej budu doplňovat, jakmile se přinutím znovu zabývat se skripty „Základy fuzzy množin“.

Najde-li zde někdo chybu, prosím, informujte mě o ní na `petr@olsak.net`.

Děkuji.

29. 5. 2005 *Petr Olšák*