

Petr Olšák

Úvod do algebry, zejména lineární

FEL ČVUT Praha, 2007



Významná část tohoto textu je od roku 2000 šířena volně pod jménem *Lineární algebra* podle licence <ftp://math.feld.cvut.cz/pub/olsak/linal/licence.txt>.

Na rozdíl od volně šířené předlohy je zde doplněna rozsáhlá sbírka úloh pro každou kapitolu a dále je přidána kapitola o polynomech.



Příprava tohoto učebního textu byla spolufinancována evropským sociálním fondem, státním rozpočtem ČR a rozpočtem hl. m. Prahy.

Lektor: prof. RNDr. Pavel Pták, DrSc.

Toto skriptum vyšlo nákladem Fakulty elektrotechnické ČVUT.

Autor upozorňuje nakladatelství ČVUT, že dnes je zcela obvyklé kromě knižního vydání díla zveřejnit k volnému použití třeba i doslovný text díla na internetu. Pokud to ediční rada ČVUT přehlédla, můžeme uvést třeba [4], [9], [17], [19]. Příkladů paralelního vydání papírového a internetového by se našlo více.

Za jazykovou a věcnou správnost obsahu odpovídá autor.

Copyright © RNDr. Petr Olšák, 2007

ISBN 978-80-01-03775-1

Motto: *Velkou knihu přírody mohou číst jen ti, kteří rozumějí jazyku, jímž byla napsána.
A tím jazykem je matematika.* Galileo Galilei

Předmluva

Skriptum je určeno především studentům prvního ročníku Elektrotechnické fakulty ČVUT, ale může posloužit i studentům prvních ročníků jiných fakult a škol, případně každému, kdo se chce seznámit se základy algebry, zejména tedy lineární algebry. Znalosti v tomto oboru jsou (v duchu motto v záhlaví této stránky) základem skoro každého vysokoškolského vzdělání. Důraz je zde kladen na metody uvažování a způsob postupného budování exaktních pojmů, které jeden na druhý navazují.

Lineární algebra má tu výhodu, že nepředpokládá žádné hlubší znalosti jiných matematických disciplín a vše, co se v této teorii buduje, lze relativně jednoduše zdůvodnit a obhájit. Není tedy potřeba se uchylovat k vynechávání důkazů kvůli jejich složitosti. Právě naopak, důkazy umožní čtenáři lépe proniknout do způsobu uvažování v matematice. To je možná nejcennější věc, kterou může člověk během studia získat. Je tedy rozumné důkazy nepřeskakovat. Jedině tak může čtenář postupně prohlédnout, jak jednotlivé kostičky do sebe zapadají, a může lépe poznat smysl zaváděných pojmů.

Na WWW stránce <http://math.feld.cvut.cz/olsak/linal.html> je již od roku 2000 zveřejněn text k přednáškám předmětu Úvod do algebry. Tento text posloužil jako základ i pro tuto skripta. Přidána byla navíc kapitola o polynomech a ke každé kapitole byla připojena rozsáhlá cvičení. Tato rozšíření prozatím nejsou na internetu k dispozici, takže čtenář, který si koupí skripta, může tyto texty považovat za bonus oproti čtenáři, který pracuje jen s internetem.

Text na internetu má číslované definice a věty. Rozhodl jsem se jednou zveřejněné číslování pokud možno ctít a bezdůvodně je neměnit. Například věta 4.21 bude mít ve všech pozdějších verzích textu číslo 4.21. Abych toho dosáhl, musel jsem nové partie, které vycházely z nových požadavků a osnov, přepisovat na konce jednotlivých kapitol nebo přidávat kapitoly další. Existují proto témata, která by si zasloužila samostatnou kapitolu (například vlastní vektory a vlastní čísla), ale stala se jen součástí kapitol jiných. Věřím, že čtenář pochopí důvod tohoto opatření a bude členění do kapitol dané mnohaletým vývojem internetové verze textu tolerovat.

Tato skripta nepokrývají jen látku přednášenou v jednom semestru, ale mají několik odboček, které výrazně zvětšují rozsah textu. Hned v první kapitole po „povinném“ seznámení s definicí lineárního prostoru následuje dodatkový text věnující se grupám a tělesům jako dalším příkladům abstraktních algebraických struktur, které tvoří základ moderní algebry. Znalosti z tohoto dodatku se ovšem nepředpokládají nikde v dalším textu skript, takže tento dodatek můžeme považovat za „nepovinný“. Podobně je na tom třeba zmínka o pozitivně definitních maticích nebo o vlastních číslech a vlastních vektorech. Kapitoly 9 a 10 obsahují dva významné příklady užití lineární algebry v praktických aplikacích: v geometrii a v kódování. Na FEL ČVUT nyní probíhá výuka ve dvou studijních programech, které se mimo jiné liší v tom, zda mají v osnovách úvodu do algebry zahrnutu kapitolu o geometrických aplikacích nebo o kódování. Takže student jednoho programu použije při přípravě na zkoušku jen jednu z těchto dvou kapitol. Právě proto, že skripta svým rozsahem významně přesahují látku jedné přednášky, mohli bychom spíše mluvit o učebnici. Je na učiteli, aby studentům naznačil, které partie považuje za důležité a které za méně významné.

Některé čtenáře může zaskočit hustota informace na jednotku plochy papíru. Ano, tento text by se dal formátovat „vzdušněji“ tak, že bude mít dohromady asi 400 stránek. Přidáme-li k tomu barevnou a pevnou obálku, vzniká učebnice. Cílem ovšem bylo vytvořit učební pomůcku cenově co nejdostupnější. Protože cena tisku skript je odvozena od počtu stránek, zůstal jsem u způsobu formátování, které se osvědčilo u internetové verze, a nevytvářel „variantu kniha“, která by možná byla líbivější, ale cenově méně dostupná.

V tomto vydání nejsou u cvičení uvedeny výsledky. Ty budou zveřejněny na internetu. Důvod tohoto opatření najdete tamtéž, jmenovitě na WWW stránce skript <http://math.feld.cvut.cz/skripta/ua.html>. Na stejné stránce je možné najít aktuální seznam známých chyb v textu (tzv. errata). Člověk je tvor

omylný a chybám se neumí stoprocentně vyhnout. Vítám proto upozornění čtenářů na případné nedostatky a nejasnosti v textu. Díky takovým čtenářům se podařilo odhalit už nejednu chybu z doby, kdy byl text zveřejněn jen na internetu.

Studenti často volají po příkladech užití algebry v praxi. Je zřejmé, že nejzasvěceněji mohou tyto příklady podat lidé, kteří se příslušnými aplikacemi profesionálně zabývají. Není asi rozumné jim fušovat do řemesla. Dovolil jsem si porušit tuto zásadu jen v případě popisu afinních transformací pomocí tzv. homogenních souřadnic. Toto téma je zde zařazeno jako cvičení v kapitole o lineárních zobrazeních. V praxi se s ním můžeme setkat především v počítačové grafice [26]. Kromě zmíněných kapitol o geometrii a kódování se čtenář může seznámit s mnoha dalšími zajímavými a nečekanými aplikacemi lineární algebry ve volně dostupném textu na internetu [16].

Na tomto místě bych rád poděkoval kolegům z katedry matematiky FEL ČVUT, především prof. RNDr. Pavlu Ptákovi, DrSc., prof. RNDr. Marii Demlové, CSc., Dr. Mgr. Aleně Gollové, doc. Petru Habalovi, Ph.D., doc. RNDr. Josefu Tkadlecovi, CSc., prof. Ing. Mirko Navarovi, DrSc., RNDr. Liboru Nentvichovi a RNDr. Aleši Němečkovi, kteří mi pomohli řadou připomínek a námětů udělat toto skriptum lepší. Také chci poděkovat zástupcům FEL z jejího minulého i současného vedení, že umožnili vydání těchto skriptů nákladem FEL za rozumnou koncovou cenu. Ediční rada ČVUT totiž odmítla vydat skriptum běžnou cestou v nakladatelství ČVUT, protože část textu je zveřejněna na internetu.

V Praze dne 27. června 2007

Petr Olšák

Obsah

Gaussova eliminační metoda	9
Úvodní příklad	9
Další příklad	10
Popis metody	11
Diskuse po převedení matice	12
Příklad, kdy soustava nemá řešení	12
1. Lineární prostor, grupa, těleso	13
Definice	13
Věta	13
Důkaz	13
Definice lineárního prostoru	14
Prostor \mathbf{R}^2	15
Prostor \mathbf{R}^n	16
Prostor funkcí	16
Prostor polynomů	17
Lineární podprostor	17
Průnik prostorů	18
Prostor orientovaných úseček	18
Triviální prostor	19
Grupa	20
Pologrupa, grupoid	22
Podgrupa	22
Těleso	22
Galoisovo těleso se dvěma prvky	22
$\text{GF}(p)$, \mathbf{Z}_p	23
Lineární prostor nad tělesem	24
Cvičení	25
2. Lineární závislost a nezávislost, lineární obal, báze, dimenze	29
Lineární kombinace	29
Triviální lineární kombinace	29
Lineární závislost skupiny	29
Lineární nezávislost skupiny	30
Základní vlastnosti lineární (ne)závislosti	32
Jeden vektor je lineární kombinací ostatních	33
Závislost orientovaných úseček	34
Lineární (ne)závislost nekonečných množin	34
Lineární obal	35
Prvek lineárního obalu	35
Vlastnosti lineárního obalu	36
Lineární obal je podprostor	36
Rozšíření LN množiny	37
Charakteristika LN množiny	37
Báze	37
Existence a jednoznačnost báze	38
Báze jsou stejně velké	39
Dimenze prostoru	40
Dimenze podprostoru	40
Počet prvků v LN množině	40
Cvičení	40
Matematická indukce	43
3. Matice	44
Definice matice	44
Lineární prostor matic	44

Symetrie relace „ \sim “	45
Gaussova eliminace zachovává obal	46
Hodnost matice	46
Trojúhelníkové matice	46
Numericky nestabilní matice	47
Transponovaná matice	47
Násobení matic	48
Komutující matice	50
Matice vektorů	51
Jednotková matice	51
Inverzní matice	52
Regulární, singulární matice	52
Výpočet inverzní matice eliminací	52
Hodnost součinu matic	54
Cvičení	55
4. Determinant	60
Permutace	60
Znaménko permutace	61
Definice determinantu	62
Základní vlastnosti	64
Metoda počítání determinantu	65
Rozvoj determinantu	66
Součin determinantů	68
Existence inverzní matice	68
Cvičení	70
5. Soustavy lineárních rovnic	74
Frobeniova věta	74
Princip eliminační metody	75
Řešení homogenní soustavy	75
Řešení nehomogenní soustavy	76
Strojové řešení soustav	77
Nejednoznačnost zápisu řešení	78
Soustavy se čtvercovou maticí	79
Dodatky k řešení soustav	81
Soustava lineárních soustav	82
Cvičení	83
6. Více o lineárních prostorech konečné dimenze	87
Spojení prostorů	87
Dimenze průniku a spojení	87
Souřadnice vektoru	89
Existence a jednoznačnost souřadnic	89
Matice přechodu	90
Souřadnice vektoru a matice přechodu	91
Přechod od báze (B) přes (C) k (D)	92
Sestavení matic přechodu	92
Cvičení	94
7. Lineární zobrazení	96
Definice zobrazení	96
Zobrazení „na“	96
Prosté zobrazení	96
Definice lineárního zobrazení	96
Princip superpozice	96
Zachování obalů	97
Jádro zobrazení	97

Defekt a hodnost zobrazení	98
Souřadnice jako lineární zobrazení	99
Lineární zobrazení na bázi	99
Zobrazení lineárně nezávislých vektorů	100
Složené zobrazení	101
Inverzní zobrazení	101
Izomorfismus	102
Matice lineárního zobrazení	102
Hodnost matice zobrazení	103
Zobrazení souřadnic	103
Defekt + hodnost zobrazení	105
Matice složeného zobrazení	105
Matice identity	106
Zobrazení do stejného prostoru	107
Vlastní číslo, vlastní vektor	107
Podobnost s diagonální maticí	110
Cvičení	112
Homogenní souřadnice	117
Cvičení k vlastním číslům a podobnosti matic	119
8. Lineární prostory se skalárním součinem	121
Definice skalárního součinu	121
Skalární součiny na \mathbf{R}^n	122
Symetrické a pozitivně definitní matice	122
Velikost vektoru	123
Úhel dvou vektorů	123
Vzdálenost vektorů	124
Kolmé vektory	125
Ortonormální báze	125
Ortogonalizační proces	127
Cvičení	127
9. Aplikace lineární algebry v geometrii	132
Euklidovský prostor	132
Souřadnice orientovaných úseček	132
Skalární součin orientovaných úseček	132
Kolmý průmět vektoru na vektor	133
Ortonormální báze v U_O	133
Kladně orientovaná báze	134
Vektorový součin	134
Smišený součin	136
Prostor V_3 volných vektorů	137
Součet bodu s vektorem	138
Přímka a rovina	138
Souřadnicový systém v \mathbf{E}_3	138
Rovnice přímky	140
Vzájemná poloha dvou přímek	141
Rovnice roviny	142
Vzájemná poloha přímky a roviny	144
Vzájemná poloha dvou rovin	144
Souměrné body	145
Tři roviny	146
Cvičení	146
10. Lineární algebra v teorii kódování	149
Těleso \mathbf{Z}_2	149
Počítání v \mathbf{Z}_2	150
Kód, kódové slovo	151

Kódování s detekcí a opravou chyb	151
Lineární kód	152
Generující a kontrolní matice	154
Kodér lineárního kódu	155
Dekodér lineárního kódu	156
Hammingův kód	158
Rozšířený Hammingův kód	159
Cvičení	160
11. Polynomy	163
Definice polynomu	163
Jednoznačnost koeficientů	163
Stupeň polynomu	165
Součet a násobek polynomů	165
Součin polynomů	166
Stupeň součtu, násobku a součinu	166
Částečný podíl polynomů	167
Hornerovo schéma	168
Kořen polynomu	169
Hledáme kořeny polynomu	171
Rozklad na kořenové činitele	173
Reálný rozklad	176
Ireducibilní polynomy	178
Cvičení	179
12. Literatura	182
13. Rejstřík	183