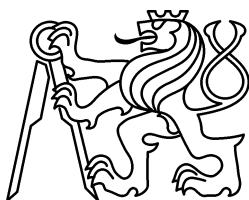


Petr Olšák

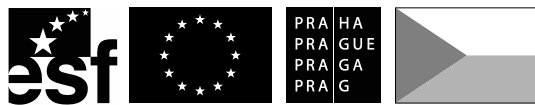
Úvod do algebry, zejména lineární

FEL ČVUT Praha, 2007



Významná část tohoto textu je od roku 2000 šířena volně pod jménem *Lineární algebra* podle licence <ftp://math.feld.cvut.cz/pub/olsak/linal/licence.txt>.

Na rozdíl od volně šířené předlohy je zde doplněna rozsáhlá sbírka úloh pro každou kapitolu a dále je přidána kapitola o polynomech.



Příprava tohoto učebního textu byla spolufinancována evropským sociálním fondem, státním rozpočtem ČR a rozpočtem hl. m. Prahy.

Lektor: prof. RNDr. Pavel Pták, DrSc.

Toto skriptum vyšlo nákladem Fakulty elektrotechnické ČVUT.

Autor upozorňuje nakladatelství ČVUT, že dnes je zcela obvyklé kromě knižního vydání díla zveřejnit k volnému použití třeba i doslovný text díla na internetu. Pokud to ediční rada ČVUT přehlédla, můžeme uvést třeba [4], [9], [17], [19]. Příkladů paralelního vydání papírového a internetového by se našlo více.

Za jazykovou a věcnou správnost obsahu odpovídá autor.

Copyright © RNDr. Petr Olšák, 2007

ISBN 978-80-01-03775-1

Motto: *Velkou knihu přírody mohou číst jen ti, kteří rozumějí jazyku, jímž byla napsána.  
A tím jazykem je matematika.* Galileo Galilei

## Předmluva

Skriptum je určeno především studentům prvního ročníku Elektrotechnické fakulty ČVUT, ale může posloužit i studentům prvních ročníků jiných fakult a škol, případně každému, kdo se chce seznámit se základy algebry, zejména tedy lineární algebry. Znalosti v tomto oboru jsou (v duchu motto v záhlaví této stránky) základem skoro každého vysokoškolského vzdělání. Důraz je zde kladen na metody uvažování a způsob postupného budování exaktních pojmů, které jeden na druhý navazují.

Lineární algebra má tu výhodu, že nepředpokládá žádné hlubší znalosti jiných matematických disciplín a vše, co se v této teorii buduje, lze relativně jednoduše zdůvodnit a obhájit. Není tedy potřeba se uchylovat k vynechávání důkazů kvůli jejich složitosti. Právě naopak, důkazy umožní čtenáři lépe proniknout do způsobu uvažování v matematice. To je možná nejcennější věc, kterou může člověk během studia získat. Je tedy rozumné důkazy nepřeskakovat. Jedině tak může čtenář postupně prohlédnout, jak jednotlivé kostičky do sebe zapadají, a může lépe poznat smysl zaváděných pojmů.

Na WWW stránce <http://math.feld.cvut.cz/olsak/linal.html> je již od roku 2000 zveřejněn text k přednáškám předmětu Úvod do algebry. Tento text posloužil jako základ i pro tuto skripta. Přidána byla navíc kapitola o polynomech a ke každé kapitole byla připojena rozsáhlá cvičení. Tato rozšíření prozatím nejsou na internetu k dispozici, takže čtenář, který si koupí skripta, může tyto texty považovat za bonus oproti čtenáři, který pracuje jen s internetem.

Text na internetu má číslované definice a věty. Rozhodl jsem se jednou zveřejněné číslované pokud možno ctít a bezdůvodně je neměnit. Například věta 4.21 bude mít ve všech pozdějších verzích textu číslo 4.21. Abych toho dosáhl, musel jsem nové partie, které vycházely z nových požadavků a osnov, přepisovat na konce jednotlivých kapitol nebo přidávat kapitoly další. Existují proto témata, která by si zasloužila samostatnou kapitolu (například vlastní vektory a vlastní čísla), ale stala se jen součástí kapitol jiných. Věřím, že čtenář pochopí důvod tohoto opatření a bude členění do kapitol dané mnohaletým vývojem internetové verze textu tolerovat.

Tato skripta nepokrývají jen látku přednášenou v jednom semestru, ale mají několik odboček, které výrazně zvětšují rozsah textu. Hned v první kapitole po „povinném“ seznámení s definicí lineárního prostoru následuje dodatkový text věnující se grupám a tělesům jako dalším příkladům abstraktních algebraických struktur, které tvoří základ moderní algebry. Znalosti z tohoto dodatku se ovšem nepředpokládají nikde v dalším textu skript, takže tento dodatek můžeme považovat za „nepovinný“. Podobně je na tom třeba zmínka o pozitivně definitních maticích nebo o vlastních číslech a vlastních vektorech. Kapitoly 9 a 10 obsahují dva významné příklady užití lineární algebry v praktických aplikacích: v geometrii a v kódování. Na FEL ČVUT nyní probíhá výuka ve dvou studijních programech, které se mimo jiné liší v tom, zda mají v osnovách úvodu do algebry zahrnutu kapitolu o geometrických aplikacích nebo o kódování. Takže student jednoho programu použije při přípravě na zkoušku jen jednu z těchto dvou kapitol. Právě proto, že skripta svým rozsahem významně přesahují látku jedné přednášky, mohli bychom spíše mluvit o učebnici. Je na učiteli, aby studentům naznačil, které partie považuje za důležité a které za méně významné.

Některé čtenáře může zaskočit hustota informace na jednotku plochy papíru. Ano, tento text by se dal formátovat „vzdušněji“ tak, že bude mít dohromady asi 400 stránek. Přidáme-li k tomu barevnou a pevnou obálku, vzniká učebnice. Cílem ovšem bylo vytvořit učební pomůcku cenově co nejdostupnější. Protože cena tisku skript je odvozena od počtu stránek, zůstal jsem u způsobu formátování, které se osvědčilo u internetové verze, a nevytvářel „variantu kniha“, která by možná byla líbivější, ale cenově méně dostupná.

V tomto vydání nejsou u cvičení uvedeny výsledky. Ty budou zveřejněny na internetu. Důvod tohoto opatření najdete tamtéž, jmenovitě na WWW stránce skript <http://math.feld.cvut.cz/skripta/ua.html>. Na stejné stránce je možné najít aktuální seznam známých chyb v textu (tzv. errata). Člověk je tvor

omylný a chybám se neumí sto procentně vyhnout. Vítám proto upozornění čtenářů na případné nedostatky a nejasnosti v textu. Díky takovým čtenářům se podařilo odhalit už nejednu chybu z doby, kdy byl text zveřejněn jen na internetu.

Studenti často volají po příkladech užití algebry v praxi. Je zřejmé, že nejzasvěceněji mohou tyto příklady podat lidé, kteří se příslušnými aplikacemi profesionálně zabývají. Není asi rozumné jim fušovat do řemesla. Dovolil jsem si porušit tuto zásadu jen v případě popisu afinních transformací pomocí tzv. homogenních souřadnic. Toto téma je zde zařazeno jako cvičení v kapitole o lineárních zobrazeních. V praxi se s ním můžeme setkat především v počítačové grafice [26]. Kromě zmíněných kapitol o geometrii a kódování se čtenář může seznámit s mnoha dalšími zajímavými a nečekanými aplikacemi lineární algebry ve volně dostupném textu na internetu [16].

Na tomto místě bych rád poděkoval kolegům z katedry matematiky FEL ČVUT, především prof. RNDr. Pavlu Ptákovi, DrSc., prof. RNDr. Marii Demlové, CSc., Dr. Mgr. Aleně Gollové, doc. Petru Habalovi, Ph.D., doc. RNDr. Josefu Tkadlecovi, CSc., prof. Ing. Mirko Navarovi, DrSc., RNDr. Liboru Nentvichovi a RNDr. Aleši Němečkovi, kteří mi pomohli řadou připomínek a námětů udělat toto skriptum lepší. Také chci poděkovat zástupcům FEL z jejího minulého i současného vedení, že umožnili vydání těchto skriptů nákladem FEL za rozumnou koncovou cenu. Ediční rada ČVUT totiž odmítla vydat skriptum běžnou cestou v nakladatelství ČVUT, protože část textu je zveřejněna na internetu.

V Praze dne 27. června 2007

*Petr Olšák*

## Obsah

Gaussova eliminační metoda . . . . .	9
Úvodní příklad . . . . .	9
Další příklad . . . . .	10
Popis metody . . . . .	11
Diskuse po převedení matice . . . . .	12
Příklad, kdy soustava nemá řešení . . . . .	12
1. Lineární prostor, grupa, těleso . . . . .	13
Definice . . . . .	13
Věta . . . . .	13
Důkaz . . . . .	13
Definice lineárního prostoru . . . . .	14
Prostor $\mathbf{R}^2$ . . . . .	15
Prostor $\mathbf{R}^n$ . . . . .	16
Prostor funkcí . . . . .	16
Prostor polynomů . . . . .	17
Lineární podprostor . . . . .	17
Průnik prostorů . . . . .	18
Prostor orientovaných úseček . . . . .	18
Triviální prostor . . . . .	19
Grupa . . . . .	20
Pologrupa, grupoid . . . . .	22
Podgrupa . . . . .	22
Těleso . . . . .	22
Galoisovo těleso se dvěma prvky . . . . .	22
$\text{GF}(p)$ , $\mathbf{Z}_p$ . . . . .	23
Lineární prostor nad tělesem . . . . .	24
Cvičení . . . . .	25
2. Lineární závislost a nezávislost, lineární obal, báze, dimenze . . . . .	29
Lineární kombinace . . . . .	29
Triviální lineární kombinace . . . . .	29
Lineární závislost skupiny . . . . .	29
Lineární nezávislost skupiny . . . . .	30
Základní vlastnosti lineární (ne)závislosti . . . . .	32
Jeden vektor je lineární kombinací ostatních . . . . .	33
Závislost orientovaných úseček . . . . .	34
Lineární (ne)závislost nekonečných množin . . . . .	34
Lineární obal . . . . .	35
Prvek lineárního obalu . . . . .	35
Vlastnosti lineárního obalu . . . . .	36
Lineární obal je podprostor . . . . .	36
Rozšíření LN množiny . . . . .	37
Charakteristika LN množiny . . . . .	37
Báze . . . . .	37
Existence a jednoznačnost báze . . . . .	38
Báze jsou stejně velké . . . . .	39
Dimenze prostoru . . . . .	40
Dimenze podprostoru . . . . .	40
Počet prvků v LN množině . . . . .	40
Cvičení . . . . .	40
Matematická indukce . . . . .	43
3. Matice . . . . .	44
Definice matice . . . . .	44
Lineární prostor matic . . . . .	44

Symetrie relace „ $\sim$ “	45
Gaussova eliminace zachovává obal	46
Hodnost matice	46
Trojúhelníkové matice	46
Numericky nestabilní matice	47
Transponovaná matice	47
Násobení matic	48
Komutující matice	50
Matice vektorů	51
Jednotková matice	51
Inverzní matice	52
Regulární, singulární matice	52
Výpočet inverzní matice eliminací	52
Hodnost součinu matic	54
Cvičení	55
<b>4. Determinant</b>	<b>60</b>
Permutace	60
Znaménko permutace	61
Definice determinantu	62
Základní vlastnosti	64
Metoda počítání determinantu	65
Rozvoj determinantu	66
Součin determinantů	68
Existence inverzní matice	68
Cvičení	70
<b>5. Soustavy lineárních rovnic</b>	<b>74</b>
Frobeniova věta	74
Princip eliminační metody	75
Řešení homogenní soustavy	75
Řešení nehomogenní soustavy	76
Strojové řešení soustav	77
Nejednoznačnost zápisu řešení	78
Soustavy se čtvercovou maticí	79
Dodatky k řešení soustav	81
Soustava lineárních soustav	82
Cvičení	83
<b>6. Více o lineárních prostorech konečné dimenze</b>	<b>87</b>
Spojení prostorů	87
Dimenze průniku a spojení	87
Souřadnice vektoru	89
Existence a jednoznačnost souřadnic	89
Matice přechodu	90
Souřadnice vektoru a matice přechodu	91
Přechod od báze $(B)$ přes $(C)$ k $(D)$	92
Sestavení matic přechodu	92
Cvičení	94
<b>7. Lineární zobrazení</b>	<b>96</b>
Definice zobrazení	96
Zobrazení „na“	96
Prosté zobrazení	96
Definice lineárního zobrazení	96
Princip superpozice	96
Zachování obalů	97
Jádro zobrazení	97

Defekt a hodnost zobrazení . . . . .	98
Souřadnice jako lineární zobrazení . . . . .	99
Lineární zobrazení na bázi . . . . .	99
Zobrazení lineárně nezávislých vektorů . . . . .	100
Složené zobrazení . . . . .	101
Inverzní zobrazení . . . . .	101
Izomorfismus . . . . .	102
Matice lineárního zobrazení . . . . .	102
Hodnost matice zobrazení . . . . .	103
Zobrazení souřadnic . . . . .	103
Defekt + hodnost zobrazení . . . . .	105
Matice složeného zobrazení . . . . .	105
Matice identity . . . . .	106
Zobrazení do stejného prostoru . . . . .	107
Vlastní číslo, vlastní vektor . . . . .	107
Podobnost s diagonální maticí . . . . .	110
Cvičení . . . . .	112
Homogenní souřadnice . . . . .	117
Cvičení k vlastním číslům a podobnosti matic . . . . .	119
<b>8. Lineární prostory se skalárním součinem . . . . .</b>	<b>121</b>
Definice skalárního součinu . . . . .	121
Skalární součiny na $\mathbf{R}^n$ . . . . .	122
Symetrické a pozitivně definitní matice . . . . .	122
Velikost vektoru . . . . .	123
Úhel dvou vektorů . . . . .	123
Vzdálenost vektorů . . . . .	124
Kolmé vektory . . . . .	125
Ortonormální báze . . . . .	125
Ortogonalizační proces . . . . .	127
Cvičení . . . . .	127
<b>9. Aplikace lineární algebry v geometrii . . . . .</b>	<b>132</b>
Euklidovský prostor . . . . .	132
Souřadnice orientovaných úseček . . . . .	132
Skalární součin orientovaných úseček . . . . .	132
Kolmý průmět vektoru na vektor . . . . .	133
Ortonormální báze v $U_O$ . . . . .	133
Kladně orientovaná báze . . . . .	134
Vektorový součin . . . . .	134
Směšený součin . . . . .	136
Prostor $V_3$ volných vektorů . . . . .	137
Součet bodu s vektorem . . . . .	138
Přímka a rovina . . . . .	138
Souřadnicový systém v $\mathbf{E}_3$ . . . . .	138
Rovnice přímky . . . . .	140
Vzájemná poloha dvou přímek . . . . .	141
Rovnice roviny . . . . .	142
Vzájemná poloha přímky a roviny . . . . .	144
Vzájemná poloha dvou rovin . . . . .	144
Souměrné body . . . . .	145
Tři roviny . . . . .	146
Cvičení . . . . .	146
<b>10. Lineární algebra v teorii kódování . . . . .</b>	<b>149</b>
Těleso $\mathbf{Z}_2$ . . . . .	149
Počítání v $\mathbf{Z}_2$ . . . . .	150
Kód, kódové slovo . . . . .	151

Kódování s detekcí a opravou chyb . . . . .	151
Lineární kód . . . . .	152
Generující a kontrolní matice . . . . .	154
Kodér lineárního kódu . . . . .	155
Dekodér lineárního kódu . . . . .	156
Hammingův kód . . . . .	158
Rozšířený Hammingův kód . . . . .	159
Cvičení . . . . .	160
11. Polynomy . . . . .	163
Definice polynomu . . . . .	163
Jednoznačnost koeficientů . . . . .	163
Stupeň polynomu . . . . .	165
Součet a násobek polynomů . . . . .	165
Součin polynomů . . . . .	166
Stupeň součtu, násobku a součinu . . . . .	166
Částečný podíl polynomů . . . . .	167
Hornerovo schéma . . . . .	168
Kořen polynomu . . . . .	169
Hledáme kořeny polynomu . . . . .	171
Rozklad na kořenové činitele . . . . .	173
Reálný rozklad . . . . .	176
Irreducibilní polynomy . . . . .	178
Cvičení . . . . .	179
12. Literatura . . . . .	182
13. Rejstřík . . . . .	183