Vážení studenti,

tento dokument obsahuje řešení ke cvičením, která najdete ve skriptu *Úvod od algebry, zejména lineární.* Zatím nejsou uvedena řešení všechna, ovšem postupně během semestru budu přidávat další. V textu se znovu neopakuje zadání cvičení, abychom ušetřili místo na papíru. V případě, že byste si to chtěli tisknout, jistě uvítáte, že je stránek co nejméně. Ze stejného důvodu je text psán velmi stručně a „hustě“, takže v žádném případě nemůže sloužit jako ukázka, jak má vypadat dobrá typografie. Šlo mi skutečně hlavně o úsporu místa.

Po pravé straně každého čísla příkladu (jako horní index) je uveden číselný údaj v rozsahu 0–5, kterým naznačuji důležitost tohoto příkladu v našem předmětu *Úvod do algebry.* Pětka znamená příklad zásadní důležitosti a nula znamená, že příklad můžete ignorovat. Proč jsou ve skriptech příklady „nulové důležitosti“? Skripta totiž obsahují věci, které se dají použít později v dalších předmětech souvisejících s algebrou, ale nejsou součástí osnovy našeho úvodního předmětu.

Čísla označující důležitost příkladu v sobě zahrnují do jisté míry i obtížnost příkladu. Lapidárně se dá říci, že pokud neumíte samostatně odpovědět na cvičení označené číslem 5, pak je zbytečné chodit na zkoušku. S účastí na zkoušce byste si to měli rozmyslet i při problémech se cvičeními označenými číslem 4. Cvičení s čísly 3 a 2 by neměla uniknout Vaší pozornosti, pokud chcete získat větší přehled o předmětu a chcete u zkoušky dosáhnout na lepší známku než 3.

Tento text (narozdíl od skript samotných) neprošel redakční úpravou. Dá se bohužel tedy předpokládat, že v něm budou i nějaké chyby a překlepy. Prosím o toleranci k těmto jevům a o případné upozornění na chyby, abych je pak mohl v další verzi textu opravit.

Verze textu: 6. 1. 2008 Petr Olšák

1.72.[3] **Řešení.**

→ (a) Platí $\oplus: \mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\odot: \mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, (1) $\oplus$ je zřejmě komutativní, (2) $(x\oplus y)\oplus z = (x+y+3)\oplus z = x+y+3+z+3 = x\oplus(y\oplus z)$, (3) $\alpha\odot(\beta\odot x) = \alpha(\beta\odot x)+3\alpha-3 = \alpha(\beta x+3\beta-3)+3\alpha-3 = \alpha\beta x+3\alpha\beta-3 = (\alpha\beta)\odot x$, (4) $\alpha\odot(x\oplus y) = \alpha(x\oplus y)+3\alpha-3 = \alpha(x+y+3)+3\alpha-3 = \alpha x+\alpha y+6x-3 = (\alpha x+3\alpha-3)\oplus(\alpha y+3\alpha-3) = (\alpha\odot x)\oplus(\alpha\odot y)$, (5) $(\alpha+\beta)\odot x = (\alpha+\beta)x+3(\alpha+\beta)-3 = (\alpha x+3\alpha-3)+(\beta x+3\beta-3)+3 = (\alpha\odot x)\oplus(\beta\odot x)$, (6) $1\odot x = 1x+3\cdot 1-3 = x$, (7) $0x+3\cdot 0-3 = -3$, nulovým vektorem je číslo -3. $\mathbf{R}$ s operacemi $\oplus$, $\odot$ tvoří lineární prostor.

→ (b) (5) $(1+1)x = 2x \neq 1\cdot x\oplus 1\cdot x = x\oplus x = 2x+3$, není to lineární prostor.

→ (c) (5) $(1+1)\odot x = 2\odot x = 2x+6-3 \neq 1\odot x+1\odot x = x+x = 2x$, není to lineární prostor.

1.73.[2] **Řešení.** Platí $\oplus: \mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $\odot: \mathbf{R}\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, (1) $\oplus$ je komutativní, protože $a+c = c+a$, $b+d = d+b$, (2) $((a,b)\oplus(c,d))\oplus(e,f) = (a+c-2^b-2^d+2^b2^d, b+d)\oplus(e,f) = (a+c-2^b-2^d+2^{b+d}+e-2b+d-2^f+2^{b+d}2^f, b+d+f) = (a+c+e-2^b-2^d-2^f+2^{b+d+f}, b+d+f) = (a,b)\oplus((c,d)\oplus(e,f))$, (3) $\alpha\odot(\beta\odot(a,b)) = \alpha\odot(\beta a-\beta 2^b+2^{\beta b}, \beta b) = (\alpha\beta a-\alpha\beta 2^b+\alpha 2^{\beta b}-\alpha 2^{\beta b}+\alpha 2^{\alpha\beta b}, \alpha\beta b), = (\alpha\beta a-\alpha\beta 2^b+2^{\alpha\beta b}, \alpha\beta b) = (\alpha\beta)\odot(a,b)$, (4) $\alpha\odot((a,b)\oplus(c,d)) = \alpha\odot(a+c-2^b-2^d+2^{b+d}, b+d) = (\alpha a+\alpha c-\alpha 2^b-\alpha 2^d+\alpha 2^{b+d}-\alpha 2b+d+2^{\alpha(b+d)}, \alpha(b+d)) = (\alpha a+\alpha c-\alpha 2b-\alpha 2^d+2^{\alpha b+\alpha d}, \alpha b+\alpha d) = (\alpha\odot(a,b))\oplus(\alpha\odot(c,d))$, (5) $(\alpha+\beta)\odot(a,b) = (\alpha a+\beta a-\alpha 2^b-\beta 2^b+2^{(\alpha+\beta)b}, (\alpha+\beta)b) = (\alpha\odot(a,b))\oplus(\beta\odot(a,b))$, (6) $1\odot(a,b) = (1a-1\cdot 2^b+2^{1b}, 1b) = (a,b)$, (7) $0(a,b) = (0a-0\cdot 2^b+2^0, 0b) = (1,0)$, nulový vektor je dvojice $(1,0)$.

1.74.[3] **Řešení.** Součet posloupností je posloupnost, α-násobek posloupnosti je posloupnost. Vlastnosti (1)–(7) ověříme stejně, jako v příkladě 1.9. Ukážu jen ověření vlastnosti (3), ostatní si propočítá laskavý čtenář sám. Posloupnost (a_i) je pro větší názornost označena jako $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Platí: $\alpha(\beta(a_0, a_1, a_2, \ldots)) = \alpha(\beta a_0, \beta a_1, \beta a_2, \ldots) = (\alpha\beta a_0, \alpha\beta a_1, \alpha\beta a_2, \ldots) = (\alpha\beta)(a_0, a_1, a_2, \ldots)$.

1.75.[3] **Řešení.** M jsou ve všech případech podmnožiny lineárního prostoru všech posloupností. Stačí tedy ověřit, zda součet prvků z M leží v M a α-násobek prvku z M leží v M.

→ (a) Součet posloupností s limitou 3 je posloupnost s limitou 6, tj. neleží v M, tj. M není lineární podprostor.

→ (b) Součet posloupností s limitou 0 je posloupnost s limitou 0, α-násobek taky. M je lineární podprostor.

→ (c) Součet konvergentních posloupností je konvergentní posloupnost, α-násobek taky (je to cvičení spíše do úvodního kurzu matematické analýzy). M je lineární podprostor.

→ (d) Součet posloupností s konečným nosičem K_1 a K_2 má konečný nosič, který je podmnožinou $K_1\cup K_2$. α-násobek posloupnosti s konečným nosičem má (pro $\alpha\neq 0$) stejný nosič a pro $\alpha = 0$ je nosičem prázdná množina. Tedy nosič je konečný. M je lineární podprostor.

→ (e) Nechť (c_i) a (d_i) jsou posloupnosti, které splňují $c_{i+2} = c_i + c_{i+1}$, $d_{i+2} = d_i + d_{i+1}$. Pak $c_{i+2} + d_{i+2} = c_i + d_i + c_{i+1} + d_{i+1}$, tedy $(c + d)_{i+2} = (c + d)_i + (c + d)_{i+1}$. Také $\alpha c_{i+2} = \alpha c_i + \alpha c_{i+1}$. Takže M je lineární podprostor.

→ (f) Nechť $c_i = c_0 p^i$, $d_i = d_0 q^i$. Pro $p \neq q$ není součet $(c_i) + (d_i)$ geometrická posloupnost. M není lineární podprostor. Kdyby M_q byla množina všech geometrických posloupností se stejným kvocientem q, pak M_q tvoří lineární podprostor.

→ (g) M není lineární podprostor: stačí nenulovou posloupnost násobit číslem -1.

→ (h) Součet posloupností omezených konstantami K_1, K_2 je posloupnost omezená konstantou $K_1 + K_2$, také α-násobek posloupnosti omezené konstantou K_1 je posloupnost omezená konstantou $|\alpha|\, K_1$. Takže M tvoří lineární podprostor.

→ (i) $(x, y, z, x, y, z, \ldots) + (a, b, c, a, b, c, \ldots) = (x+a, y+b, z+c, x+a, y+b, z+c, \ldots)$, $\alpha(x, y, z, x, y, z, \ldots) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha x, \alpha y, \alpha z, \ldots)$, tedy M je lineární podprostor.

1.76.[4] **Řešení.** Součet komplexních čísel je komplexní číslo. Reálný násobek komplexního čísla je komplexní číslo. Komplexní číslo $a + ib$ lze zapsat ve tvaru dvojice (a, b), přičemž součet a reálný násobek pak odpovídají operacím (1.1) a (1.2).Vlastnosti (1)–(7) je pak možné ověřit stejně jako v příkladě 1.9.

1.77.[3] **Řešení.** Je to důsledek cvičení 1.76 a 1.78. Nebo můžeme argumentovat přímo: Součet uspořádaných n-tic komplexních čísel je uspořádaná n-tice komplexních čísel. Reálný násobek uspořádané n-tice komplexních čísel je uspořádaná n-tice komplexních čísel. Vlastnosti (1)–(7) dokážeme podobně, jako v příkladu 1.9, přičemž se využije toho, že tyto vlastnosti splňuje sčítání komplexních čísel a násobení komplexního čísla reálným skalárem (to je výsledek cvičení 1.76).

1.78.[3] **Řešení.** Součet uspořádaných n-tic vektorů z L je uspořádaná n-tice vektorů z L. Reálný násobek uspořádané n-tice vektorů z L je uspořádaná n-tice vektorů z L. Při ověřování vlastností (1)–(7) se využije toho, že tyto vlastnosti splňuje lineární prostor L. Ověřím jen vlastnost (4), ostatní vlastnosti si propočítá laskavý čtenář sám. $\alpha \odot \big((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \oplus (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n)\big) = \alpha \odot (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{y}_n) = \big(\alpha \cdot (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1), \alpha \cdot (\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2), \ldots, \alpha \cdot (\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{y}_n)\big) = \big(\alpha \cdot \boldsymbol{x}_1 + \alpha \cdot \boldsymbol{y}_1, \alpha \cdot \boldsymbol{x}_2 + \alpha \cdot \boldsymbol{y}_2, \ldots, \alpha \cdot \boldsymbol{x}_n + \alpha \cdot \boldsymbol{y}_n\big) = (\alpha \cdot \boldsymbol{x}_1, \alpha \cdot \boldsymbol{x}_2, \ldots, \alpha \cdot \boldsymbol{x}_n) \oplus (\alpha \cdot \boldsymbol{y}_1, \alpha \cdot \boldsymbol{y}_2, \ldots, \alpha \cdot \boldsymbol{y}_n) = \alpha \odot (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \oplus \alpha \odot (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n)$. V prvních dvou rovnostech je použita definice operací $\oplus$ a $\odot$, ve třetí rovnosti je využito toho, že vlastnost (4) platí na lineárním prostoru L a poslední dvě rovnosti znovu využívají jen definici operací $\oplus$ a $\odot$. Nulový vektor lineárního prostoru L^n má tvar $(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{o}, \ldots, \boldsymbol{o})$ – je to uspořádaná n-tice nulových vektorů $\boldsymbol{o} \in L$.

1.79.[3] **Řešení.** Nad rovnítky je uvedeno číslo vlastnosti z definice 1.6, která byla v daném okamžiku použita. Je-li použita vlastnost z věty 1.7, je číslo uvozeno pro odlišení písmenem „V“.

→ (a) $-(-\boldsymbol{x}) = (-1)\big((-1)\boldsymbol{x}\big) \overset{(3)}{=} \big((-1)(-1)\big)\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x} \overset{(6)}{=} \boldsymbol{x}$.

→ (b) Předpokládám $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$. Pak $\boldsymbol{y} \overset{(V1)}{=} \boldsymbol{y} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{y} + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y} + \big(\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{y}\big) \overset{(1)}{=} \boldsymbol{y} + \big((-1)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}\big) \overset{(2)}{=} \big(\boldsymbol{y} + (-1)\boldsymbol{y}\big) + \boldsymbol{x} \overset{(6)}{=} \big(1\boldsymbol{y} + (-1)\boldsymbol{y}\big) + \boldsymbol{x} \overset{(5)}{=} \big(1 + (-1)\big)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \overset{(7)}{=} \boldsymbol{o} + \boldsymbol{x} \overset{(1)}{=} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{o} \overset{(V1)}{=} \boldsymbol{x}$. Předpokládám $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Pak $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$. Poslední rovnost byla podrobně dokázána pomocí vlastností (6), (5) a (7) v předchozím výpočtu.

→ (c) Předpokládám, že $\alpha\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y}$. Dokážu, že pokud $\alpha \neq 0$, pak $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Platí $\frac{1}{\alpha}(\alpha\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\alpha}(\alpha\boldsymbol{y})$, tj. dle (3): $\left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)\boldsymbol{x} = \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)\boldsymbol{y}$, tj. $1\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{y}$, tj. dle (6): $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Nyní obráceně, přepokládám $\alpha = 0$, pak dle (7) $\alpha\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} = \alpha\boldsymbol{y}$. Konečně předpokládám $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Pak $\alpha\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y}$.

→ (d) Předpokládám $\alpha\boldsymbol{x} = \beta\boldsymbol{x}$. Dokážu, že pokud $\alpha \neq \beta$, pak $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. Dle (b) je $\alpha\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$. Takže $\boldsymbol{o} = \alpha\boldsymbol{x} + (-1)\beta\boldsymbol{x} \overset{(3)}{=} \alpha\boldsymbol{x} + (-\beta)\boldsymbol{x} \overset{(5)}{=} (\alpha - \beta)\boldsymbol{x}$. Dle (V3) musí být $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. Obráceně, z předpokladu $\alpha = \beta$ zjevně plyne $\alpha\boldsymbol{x} = \beta\boldsymbol{x}$. Je-li $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, pak podle $V2$ je $\alpha\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} = \beta\boldsymbol{x}$.

→ (e) Předpokládám $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$. Pak $\boldsymbol{x} \overset{(V1)}{=} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{o} \overset{(b)}{=} \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}) \overset{(2)}{=} (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}) - \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) - \boldsymbol{z} \overset{(2)}{=} \boldsymbol{y} + (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}) \overset{(b)}{=} \boldsymbol{y} + \boldsymbol{o} \overset{(V1)}{=} \boldsymbol{y}$. Obráceně, z předpokladu $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ plyne $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ okamžitě po dosazení $\boldsymbol{x}$ za $\boldsymbol{y}$.

1.80.[2] **Řešení.** $(1 + 1)(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \overset{(5,6)}{=} (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \overset{(2)}{=} \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}$, ovšem také: $(1 + 1)(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \overset{(4)}{=} (1 + 1)\boldsymbol{x} + (1 + 1)\boldsymbol{y} \overset{(5,6)}{=} (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}) \overset{(2)}{=} \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{y}$. Zprava z obou výrazů odečtu $\boldsymbol{y}$ a zleva $\boldsymbol{x}$. Zůstává jen „prostřední závorka“, tj. $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$. Odečtení vektoru $\boldsymbol{y}$ zprava lze provést díky výsledku cvičení 1.79 (případ e). K odečtení zleva nelze přímo použít výsledek cvičení 1.79 (případ e), protože nemáme komutativní zákon (ten dokazujeme). Je tedy potřeba zformulovat alternativní případ: „$\boldsymbol{z} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{v}$ právě když $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$“ a dokázat jej bez použití komutativního zákona. To již přenechám čtenáři.

1.81.[2] **Řešení.** Předpokládám nejprve, že $M \subseteq N$ nebo $N \subseteq M$. V prvním případě $M \cup N = N$ a to je podprostor a ve druhém $M \cup N = M$ a to je také podprostor. Obrácené tvrzení dokážu nepřímo. Předpokládám, že $M \not\subseteq N$ a také $N \not\subseteq M$ To znamená, že existují vektory $\boldsymbol{x} \in M \setminus N$ a $\boldsymbol{y} \in N \setminus M$. Protože $\boldsymbol{x} \in M$ a $\boldsymbol{y} \notin M$, je $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \notin M$ (množina M je totiž podprostor a kdyby v ní ležel součet a první sčítanec, musí v ní ležet i druhý sčítanec, který tam ale neleží). Protože $\boldsymbol{x} \notin N$ a $\boldsymbol{y} \in N$, je také $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \notin N$. Takže $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \notin M \cup N$. Nemůže tedy $M \cup N$ být podprostor.

1.82.[5] **Řešení.** $(a, b, a) + (c, d, c) = (a + c, b + d, a + c) \in M$, $\alpha(a, b, a) = (\alpha a, \alpha b, \alpha a) \in M$.

1.83.[5] **Řešení.** $(0, 0, 0) \notin M$, přitom $(0, 0, 0)$ musí ležet v každém podprostoru lineárního prostoru $\mathbf{R}^3$.

1.84.[5] **Řešení.**

→ (a) M je podprostor: $(2x_2, x_2, 4x_4, x_4) + (2y_2, y_2, 4y_4, y_4) = \big(2(x_2 + y_2), x_2 + y_2, 4(x_4 + y_4), x_4 + y_4\big) \in M$, $\alpha(2x_2, x_2, 4x_4, x_4) = (2\alpha x_2, \alpha x_2, 4\alpha x_4, \alpha x_4) \in M$.

→ (b) M není podprostor, protože $(0, 0, 0, 0) \notin M$,

→ (c) M není podprostor, protože $(0, 0, 0, 0) \notin M$,

→ (d) M není podprostor, protože $(0, 0, 0, 0) \notin M$,

→ (e) M je podprostor: Označím $\boldsymbol{u} = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4)$ pro $x_1 = x_2+x_3-x_4$ a $y_1 = y_2+y_3-y_4$. Mám ověřit, že $\boldsymbol{u} \in M$. Protože $x_1 + y_1 = x_2 + x_3 - x_4 + y_2 + y_3 - y_4 = (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) - (x_4 + y_4)$, je $\boldsymbol{u} \in M$. Dále označím $\boldsymbol{v} = \alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4)$ pro $x_1 = x_2 + x_3 - x_4$. Mám ověřit, že $\boldsymbol{v} \in M$ Protože $\alpha x_1 = \alpha(x_2 + x_3 - x_4) = \alpha x_2 + \alpha x_3 - \alpha x_4$, je $\boldsymbol{v} \in M$.

→ (f) M je podprostor: Označím $\boldsymbol{u} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$ pro $x_1 = x_2 + x_3 - x_4$, $x_2 = x_3 + x_4$ a $y_1 = y_2 + y_3 - y_4$, $y_2 = y_3 + y_4$. Mám ověřit, že $\boldsymbol{u} \in M$. Protože $x_1 + y_1 = x_2 + x_3 - x_4 + y_2 + y_3 - y_4 = (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) - (x_4 + y_4)$ a $x_2 + y_2 = x_3 + x_4 + y_3 + y_4 = (x_3 + y_3) + (x_4 + y_4)$, je $\boldsymbol{u} \in M$. Dále označím $\boldsymbol{v} = \alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4)$ pro $x_1 = x_2 + x_3 - x_4$, $x_2 = x_3 + x_4$. Mám ověřit, že $\boldsymbol{v} \in M$ Protože $\alpha x_1 = \alpha(x_2 + x_3 - x_4) = \alpha x_2 + \alpha x_3 - \alpha x_4$ a $\alpha x_2 = \alpha(x_3 + x_4) = \alpha x_3 + \alpha x_4$, je $\boldsymbol{u} \in M$.

→ (g) M je podprostor: $(0, x_2, x_3, x_4) + (0, y_2, y_3, y_4) = (0, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4) \in M$, $\alpha(0, x_2, x_3, x_4) = (0, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4) \in M$.

→ (h) M je podprostor: $(a, a, a, a)+(b, b, b, b) = (a+b, a+b, a+b, a+b) \in M$, $\alpha(a, a, a, a) = (\alpha a, \alpha a, \alpha a, \alpha a) \in M$.

→ (i) M je podprostor pro $a = 0$: Označím $\boldsymbol{u} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$ pro $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ a $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$. Je $0 = x_1+x_2+x_3+x_4+y_1+y_2+y_3+y_4 = (x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)+(x_4+y_4)$, takže $\boldsymbol{u} \in M$. Označím $\boldsymbol{v} = \alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4)$ pro $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Je $0 = \alpha \cdot 0 = \alpha(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \alpha x_4$, takže $\boldsymbol{v} \in M$. M není podprostor pro $a \neq 0$, protože $(0, 0, 0, 0) \notin M$.

→ (j) M není podprostor: $(1, -1, 0, 0) \in M$, $(1, 1, 0, 0) \in M$, ale $(1, -1, 0, 0) + (1, 1, 0, 0) = (2, 0, 0, 0) \notin M$. Přitom $(0, 0, 0, 0) \in M$. Tento příklad ilustruje, že tomu, aby byl M podprostor to nestačí.

1.85.[4] **Řešení.** M je podprostor: $(\alpha \sin x + \beta \cos x) + (\gamma \sin x + \delta \cos x) = (\alpha + \gamma) \sin x + (\beta + \delta) \cos x \in M$, $k \in \mathbf{R}$: $k(\alpha \sin x + \beta \cos x) = (k\alpha) \sin x + (k\beta) \cos x \in M$.

1.86.[5] **Řešení.** Označím danou množinu polynomů M. M není podprostor: $(x^2+x+1)+(-x^2+1) = x+2 \notin M$.

1.87.[2] **Řešení.**

→ (a) Ano. Součet spojitých funkcí je spojitá funkce, α-násobek spojité funkce je spojitá funkce.

→ (b) Ano. $(f + g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$, $(\alpha f)^{(k)} = \alpha\big(f^{(k)}\big)$.

→ (c) Ano. $\int_I (f + g)(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx + \int_I g(x)\,dx$, $\int_I (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int_I f(x)\,dx$.

→ (d) Ano. Je-li $|f(x)| \leq K_1$, $|g(x)| \leq K_2$ pro všechna $x \in (a, b)$, pak $|(f + g)(x)| \leq K_1 + K_2$ a $|(\alpha f)(x)| \leq |\alpha|\, K_1$ pro všechna $x \in (a, b)$.

→ (e) Ano. Součet po částech lineární funkce je po částech lineární funkce a α-násobek taky.

→ (f) Ano. Nechť f má body nespojitosti v konečné množině M_1 a g má body nespojitosti v konečné množině M_2. Pak množina bodů nespojitosti $f + g$ je podmnožinou $M_1 \cup M_2$ a množina bodů nespojitosti αf je podmnožinou M_1, což jsou konečné množiny.

1.88.[2] **Řešení.** $(e^{\alpha x}\big(p_1(x) \cos(\beta x) + q_1(x) \sin(\beta x)\big) + (e^{\alpha x}\big(p_2(x) \cos(\beta x) + q_2(x) \sin(\beta x)\big) =$ $(e^{\alpha x}\big((p_1(x) + p_2(x)) \cos(\beta x) + (q_1(x) + q_2(x) \sin(\beta x)\big)$, $\delta(e^{\alpha x}\big(p(x) \cos(\beta x) + q(x) \sin(\beta x)\big) =$ $(e^{\alpha x}\big(\delta p(x) \cos(\beta x) + \delta q(x) \sin(\beta x)\big)$. Nyní stačí využít toho, že součet polynomů je polynom a δ-násobek polynomu je polynom.

1.89.[3] **Řešení.**

→ (a) Součet t-periodických funkcí je t-periodická. α-násobek taky.

→ (b) Tvrzení neplatí, protože $2t$ periodické funkce netvoří podmnožinu množiny všech t-periodických funkcí. Ale naopak: t-periodické funkce tvoří podmnožinu množiny všech $2t$-periodických funkcí. Autor zřejmě měl na mysli tvrzení: množina t-periodických funkcí je podprostorem lineárního prostoru všech $2t$-periodických funkcí. Toto tvrzení platí, argumentace je stejná, jako v případě a).

→ (c) Tvrzení neplatí. Například pro $k = 2$ máme stejný problém, jako v případě b). Tvrzení zřejmě mělo být formulováno ve tvaru: množina t_1-periodických funkcí je lineárním podprostorem lineárního prostoru všech t-periodických funkcí právě tehdy, když existuje k přirozené, že $kt_1 = t$. Důkaz: Nechť nejprve t_1 periodické funkce jsou podprostorem t-periodických. Pak musejí být podmnožinou t periodických funkcí. To je možné jen tehdy, pokud $t_1 = t/k$, kde k je přirozené. Jedině taková t_1 periodická funkce je zároveň t periodická. Obráceně: existuje-li k přirozené, že $t_1 = t/k$, pak t_1 periodické funkce tvoří podmnožinu t-periodických funkcí. Že se jedná o podprostor plyne z argumentace uvedené v případě a).

1.90.[4] **Řešení.** Volím $\boldsymbol{x} \in M$, $\boldsymbol{y} \in M$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$. Nechť nejprve M je podprostor, tj. $\alpha\boldsymbol{x} \in M$, $\beta\boldsymbol{y} \in M$, takže také $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in M$. Nechť nyní platí $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in M$. Při volbě $\alpha = 1$, $\beta = 1$ vychází $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in M$. Při volbě $\beta = 0$ vychází $\alpha\boldsymbol{x} \in M$.

1.92.[0] **Řešení.**

→ (a) $x, y, z \in \mathbf{C}$: $(x+y)+z = x+(y+z)$, $0+x = x+0 = x$, $\forall x \in \mathbf{C} \exists -x \in \mathbf{C}$ tak, že $(-x)+x = x+(-x) = 0$.

→ (b) $(xy)z = x(yz)$, $1x = x \cdot 1x$, $\forall x \exists \frac{1}{x}$ tak, že $\frac{1}{x}x = x\frac{1}{x} = 1$.

→ (c) Platí: $x, y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ pak $xy \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Je zřejmé, že $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ tvoří s danou operací grupu (argumentace stejná jako v b) a dále $\mathbf{R} \setminus \{0\} \subseteq \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

→ (d) Platí: x, y jsou celá sudá, pak $x + y$ je celé sudé. Dále 0 je celé sudé a $-x$ je celé sudé pro každé x celé sudé.

→ (e) Nechť x je celé liché a y je celé liché. Pak xy je celé liché, 1 (neutrální prvek) je celé liché číslo, ale $\frac{1}{x}$ nemusí být celé! Není to grupa. Jde jen o grupoid.

→ (f) Viz e).

→ (g) Agrumentace je stejná, jako v případě a). Jen písmeno $\mathbf{C}$ zaměníme za písmeno $\mathbf{Q}$.

1.93.[1] **Řešení.** Permutace z $\{1, 2, 3\}$ je uspořádaná trojice prvků z $\{1, 2, 3\}$ tak, že žádný se neopakuje. Množina všech permutací z $\{1, 2, 3\}$ je $\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$. Na každou permutaci (a, b, c) můžeme pohlížet jednak jako na uspořádanou trojici a jednak jako na zobrazení z $\{1, 2, 3\}$ na $\{1, 2, 3\}$, které přiřazuje: $1 \to a$, $2 \to b$, $3 \to c$. V tomto kontextu můžeme zapsat permutaci ve dvouřádkové notaci: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$, kde zobrazení jednotlivých prvků čteme po sloupcích a na pořadí sloupců při tomto zápisu nezáleží. Tento zápis lépe umožní vyhodnotit skládání permutací jako skládání odpovidajících zobrazení: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$, protože $1 \to a \to x$, $2 \to b \to y$ a $3 \to c \to z$. V následující tabulce všech složených permutací $A \circ A$ jsou v záhlaví tabulky permutace A (které se v rámci složeného zobrazení realizují dříve) a vlevo po strane permutace B. Permutace jsou zapsány jen jako uspořádané trojice (pro přepis na dvouřádkový tvar může čtenář nad každou trojici připsat čísla $1, 2, 3$).

$A \circ B$	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(2,1,3)$	$(2,3,1)$	$(3,1,2)$	$(3,2,1)$
$(1,2,3)$	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(2,1,3)$	$(2,3,1)$	$(3,1,2)$	$(3,2,1)$
$(1,3,2)$	$(1,3,2)$	$(1,2,3)$	$(3,1,2)$	$(3,2,1)$	$(2,1,3)$	$(2,3,1)$
$(2,1,3)$	$(2,1,3)$	$(2,3,1)$	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(3,2,1)$	$(3,1,2)$
$(2,3,1)$	$(2,3,1)$	$(2,1,3)$	$(3,2,1)$	$(3,1,2)$	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$
$(3,1,2)$	$(3,1,2)$	$(3,2,1)$	$(1,3,2)$	$(1,2,3)$	$(2,3,1)$	$(2,1,3)$
$(3,2,1)$	$(3,2,1)$	$(3,1,2)$	$(2,3,1)$	$(2,1,3)$	$(1,3,2)$	$(1,2,3)$

Jednotkovým prvkem je permutace $(1, 2, 3)$, která odpovídá identickému zobrazení. Ke každé permutaci je inverzní permutace stejná. Pouze permutace $(2, 3, 1)$ má inverzní permutaci $(3, 1, 2)$ a naopak.

1.94.[0] **Řešení.**

→ (a) $(a \circ b) \circ (b^{-1} \circ a^{-1}) = a \circ (b \circ b^{-1}) \circ a^{-1} = a \circ e \circ a^{-1} = a \circ a^{-1} = e$.

→ (b) Označím $a^{-1} = y$ a ukážu, že $y^{-1} = a$, neboli, že $a \circ y = e$. $a \circ y = a \circ a^{-1} = e$. Podle věty 1.44 je a jediný prvek, který splňuje $a \circ y = e$.

1.95.[0] **Řešení.** Složím lineární funkci $Ax + B$ s funkcí $ax + b$: $A \cdot (ax + b) + B = (Aa)x + (b + B)$, to je lineární funkce. Skládání jakýchkoli zobrazení je asociativní. Jednotkový prvek: $1x + 0$. K prvku $ax + b$ je inverzní prvek $\frac{1}{a}x + (-b)$.

→ (a) Je to pologrupa, ne grupa. Neexistuje inverzní prvek k prvku $0x + b$.
→ (b) Ano.
→ (c) Ano.
→ (d) $1 \cdot (1 \cdot x + b) + B = 1 \cdot 1 \cdot x + (b + B)$. Je to grupoid. Inverzní prvek k $1x + b$ je $1x + (-b)$, takže to je navíc grupa.
→ (e) Ano, protože se stejnou operací je sama grupou.

1.96.^{0} **Řešení.** $2 \oplus 1 = 3$, $1 \ominus 3 = -2 \bmod 4 = 2$, $2 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 2 = 8 \bmod 4 = 0$.

1.97.^{0} **Řešení.** $+$ splňuje vlastnosti komutativní grupy. Také $M \backslash \{(0,0,0)_*\}$ s operací $\cdot$ je komutativní grupa (viz příklad 1.40). Distributivní zákon by bylo potřeba propočítat pro všechny možné případy, ale v souladu s posledním odstavcem příkladu 1.65 to dělat nebudu.

1.98.^{0} **Řešení.** Množinu všech kvaternionů označím M. Tato množina s operací $+$ tvoří komutativní grupu (zřejmé), nulový prvek je $0 + 0i + 0j + 0k$. Dále platí $(a + bi + cj + dk)(A + Bi + Cj + Dk) = (aA - bB - cC - dD) + (aB + bA + cD - dC)i + (aC - bD + cA + dB)j + (aD + bC - cB + dA)k$. Jednotkovým prvkem je $1 + 0i + 0j + 0k$. Inverzní prvek k prvku $a + bi + cj + dk$ je takový $A + Bi + Ci + Dk$, kde A, B, C, D jsou řešením soustavy lineárních rovnic s maticí:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} a & -b & -c & -d & 1 \\ b & a & -d & c & 0 \\ c & d & a & -b & 0 \\ d & -c & b & a & 0 \end{array}\right)$$

Protože matice soustavy má determinant $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$, který je nenulový pro nenulový prvek $a + bi + cj + dk$, řešení vždy existuje a je navíc jediné. Inverzní prvek tedy existuje. (Poznámka: pojem determinant a souvislosti s řešením soustav jsou vyloženy až v kapitolách 4 a 5.) Máme tedy ověřeno, že M s operací $\cdot$ tvoří grupu. Tato grupa je nekomutativní, protože například $ij = k$, ale $ji = -k$. Chybí ověřit distributivní zákon, což přenechám čtenáři. Více o kvaternionech např. v [26].

1.99.^{1} **Řešení.**
→ (a) $a + b = a + c$, tj. $(-a) + a + b = (-a) + a + c$, tj. $b = c$,
→ (b) viz cvičení 1.94,
→ (c) pro grupu platí $e \circ e = e$, tj. nulový prvek je opačný sám sobě,
→ (d) přímo v definici tělesa se praví, že $T \setminus \{0\}$ má být grupou vzhledem k operaci $\cdot$, tj. jednotkový prvek leží v množině $T \setminus \{0\}$,
→ (e) nejprve ukážu, že $a = (-1)a$. Platí $a + (-1)a =$ (protože 1 je jednotkový) $= 1a + (-1)a =$ (distrib. zákon) $= (1 + (-1))a = 0a =$ (věta 1.57) $= 0$, takže $-a = (-1)a$. Nyní dokážu vlastní tvrzení: $-(a + b) = (-1)(a + b) = (-1)a + (-1)b = (-a) + (-b)$,
→ (f) $(a + b)(c + d) =$ (distr. zákon) $= (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd$,
→ (g) Předpokládám, že $a \cdot a = 1$, tj. $a \cdot a - 1 = 0$. Z distrib. zákona: $(a+1)(a+(-1)) = a \cdot a + a - a + (-1) == a \cdot a - 1 = 0$. Z věty 1.57 musí $(a + 1) = 0$ nebo $(a + (-1)) = 0$, takže $a = -1$ nebo $a = 1$. Obráceně: $1 \cdot 1 = 1$ a $(-1) \cdot (-1) = x$, přitom: $(-1) + x = (1 + (-1)) \cdot (-1) = 0 \cdot (-1) = 0$. Takže x je opačný k -1 a protože $1 + (-1) = 0$, je 1 opačný k -1, takže $x = 1$.

1.100.^{1} **Řešení.** Zkoumanou množinu značím M. $(a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) = ac + (ad + bc)\sqrt{3} + 3bd \in M$, $0 \in M$ (nulový prvek), $1 \in M$ (jednotkový prvek), pro $a + b\sqrt{3}$ je $-a + (-b)\sqrt{3}$ opačný prvek a $\frac{a}{D} - \frac{b}{D}\sqrt{3}$ inverzní prvek (je $D = a^2 - 3b^2 \neq 0$, protože $a, b \in \mathbf{Q}$ a $a \neq 0$, $b \neq 0$).

1.101.^{1} **Řešení.** $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}$, $x, y, z \in \mathbf{R}$: $x + y \in \mathbf{R}$, $\alpha x \in \mathbf{R}$, (1) $x + y = yx$, (2) $x + (y + z) = (x + y) + z$, (3) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, (4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, (5) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, (6) $1x = x$, (7) $0x = 0$.

1.102.^{1} **Řešení.** $\alpha, \beta \in T$, $x, y, z \in T$: $x + y \in T$, $\alpha x \in T$, (1), (2) protože T s operací $+$ je komutativní grupa, (3) protože T s operací $\cdot$ je grupa (tj. splňuje asociativní zákon), (4), (5) protože T splňuje distributivní zákon, (6) protože 1 je jednotkový prvek vzhledem k operaci $\cdot$, (7) plyne z věty 1.57.

2.67.^{5} **Řešení.**
→ (a) $\alpha(1, 2, 0) + \beta(0, -1, 3) + \gamma(5, 7, -2) = (\alpha + 5\gamma, 2\alpha - \beta + 7\gamma, 3\beta - 2\gamma)$,
→ (b) $\alpha(1, 3, 0, -1) + \beta(0, 2, -1, 4) + \gamma(1, -5, 7, -2) = (\alpha + \gamma, 3\alpha + 2\beta - 5\gamma, -\beta + 7\gamma, -\alpha + 4\beta - 2\gamma)$,
→ (c) $\alpha(x^2 + 2x - 1) + \beta(2x^3 - 3x + 2) + \gamma(-4x^3 + x^2 + 8x - 5) = (2\beta - 4\gamma)x^3 + (\alpha + \gamma)x^2 + (2\alpha - 3\beta + 8\gamma)x + (-\alpha + 2\beta - 5\gamma)$,
→ (d) $\alpha \sin x + \beta \cos^2 x + \gamma(x^2 - 1)$,

→ (e) $\alpha(2+i)+\beta(2-i)+\gamma(3+5i)=(2\alpha+2\beta+3\gamma)+(\alpha-\beta+5\gamma)i$,
→ (f) $\alpha(i,1,1+i)+\beta(2,2+i,0)+\gamma(0,3-3i,7)=\big(2\beta+\alpha i,(\alpha+2\beta+3\gamma)+(\beta-3\gamma)i,(\alpha+7\gamma)+\alpha i\big)$,
→ (g) $2\alpha+5\beta$,
→ (h) $\alpha\odot 2\oplus\beta\odot 5=2^\alpha\oplus 5^\beta=2^\alpha\cdot 5^\beta$,
→ (i) $\alpha(2,1)+\beta(1,0)=(2\alpha+\beta,\alpha)$,
→ (j) $\alpha\odot(2,1)\oplus\beta\odot(1,0)=(\alpha\cdot 2-\alpha\cdot 2^1+2^{\alpha\cdot 1},\alpha\cdot 1)\oplus(\beta\cdot 1-\beta\cdot 2^0+2^{\beta\cdot 0},\beta\cdot 0)=(2^\alpha,\alpha)\oplus(1,0)=(2^\alpha+1-2^\alpha-2^0+2^\alpha\cdot 2^0,\alpha+0)=(2^\alpha,\alpha)$, $\beta\odot(1,0)=(1,0)$ také proto, že $(1,0)$ je nulový vektor v daném lineárním prostoru.

2.68.[5] **Řešení.**
→ (a) $(\alpha+5\gamma,2\alpha-\beta+7\gamma,3\beta-2\gamma)=(0,0,0)$, tj. $\alpha+5\gamma=0$, $2\alpha-\beta+7\gamma=0$, $3\beta-2\gamma=0$. Jediné řešení: $\alpha=\beta=\gamma=0$, vektory jsou LN.
→ (b) $(\alpha+\gamma,3\alpha+2\beta-5\gamma,-\beta+7\gamma,-\alpha+4\beta-2\gamma)=(0,0,0,0)$, tj. $\alpha+\gamma=0$, $3\alpha+2\beta-5\gamma=0$, $-\beta+7\gamma=0$, $-\alpha+4\beta-2\gamma=0$. Jediné řešení: $\alpha=\beta=\gamma=0$, vektory jsou LN.
→ (c) $(2\beta-4\gamma)x^3+(\alpha+\gamma)x^2+(2\alpha-3\beta+8\gamma)x+(-\alpha+2\beta-5\gamma)=0\ \forall x\in\mathbf{R}$, tj. polynom musí být nulový. Podle věty 11.10 tedy musí $2\beta-4\gamma=0$, $\alpha+\gamma=0$, $2\alpha-3\beta+8\gamma=0$, $-\alpha+2\beta-5\gamma=0$. Soustava má nekonečně mnoho řešení, například $\alpha=-1$, $\beta=2$, $\gamma=1$. Lze tedy sestavit netriviální lin. kombinaci, která je rovna nulovému polynomu. Vektory jsou LZ.
→ (d) $\alpha\sin x+\beta\cos^2 x+\gamma(x^2-1)=0\ \forall x\in\mathbf{R}$, rovnost tedy musí platit i pro $x\in\left\{0,\frac{\pi}{2},\pi\right\}$, po dosazení: $\beta+\gamma(-1)=0$, $\alpha+\gamma\left(\frac{\pi^2}{4}-1\right)=0$, $\beta+\gamma(\pi^2-1)=0$. Jediné řešení: $\alpha=\beta=\gamma=0$, vektory jsou LN.
→ (e) $(2\alpha+2\beta+3\gamma)+(\alpha-\beta+5\gamma)i=0+0i$, tj. $2\alpha+2\beta+3\gamma=0$, $\alpha-\beta+5\gamma=0$. Nekonečně mnoho řešení, nenulové řešení je např. $\alpha=-13$, $\beta=7$, $\gamma=4$, vektory jsou LZ.
→ (f) $\big(2\beta+\alpha i,(\alpha+2\beta+3\gamma)+(\beta-3\gamma)i,(\alpha+7\gamma)+\alpha i\big)=(0+0i,0+0i,0+0i)$, tj. $2\beta=0$, $\alpha=0$, $\alpha+2\beta+3\gamma=0$, $\beta-3\gamma=0$, $\alpha+7\gamma=0$, $\alpha=0$. Jediné řešení: $\alpha=\beta=\gamma=0$, vektory jsou LN.
→ (g) $2\alpha+5\beta=0$, netriviální řešení například. $\beta=2$, $\alpha=-5$, vektory jsou LZ.
→ (h) $2^\alpha\cdot 5^\beta=1$ (nulový vektor daného lineárního prostoru je 1). Po zlogaritmování: $\ln 2^\alpha+\ln 5^\beta=\ln 1$, tj. $\alpha\ln 2+\beta\ln 5=0$. Netriviální řešení je například $\alpha=-\ln 5$, $\beta=\ln 2$, vektory jsou LZ.
→ (i) $(2\alpha+\beta,\alpha)=(0,0)$, tj. $2\alpha+\beta=0$, $\alpha=0$. Jediné řešení: $\alpha=\beta=0$, vektory jsou LN.
→ (j) $(2^\alpha,\alpha)=(1,0)$, protože $(1,0)$ je nulový vektor daného lineárního prostoru. Je tedy $2^\alpha=1,\alpha=0$, β libovolné. Např. pro $\alpha=0$, $\beta=17$ máme netiviální lineární kombinaci rovnu nulovému vektoru. Vektory jsou LZ. Jiná argumentace: skupina vektorů obsahující nulový vektor je nutně LZ, viz větu 2.17, případ (2).

2.69.[5] **Řešení.**
→ (a) $\alpha(1,1,2,2)+\beta(4,3,0,1)+\gamma(-2,1,4,2)=(0,0,0,0)$, tj. $(\alpha+4\beta-2\gamma,\alpha+3\beta+\gamma,2\alpha+4\gamma,2\alpha+\beta+2\gamma)=(0,0,0,0)$, tj. $\alpha+4\beta-2\gamma=0$, $\alpha+3\beta+\gamma=0$, $2\alpha+4\gamma=0$, $2\alpha+\beta+2\gamma=0$. Soustava má jediné řešení $\alpha=\beta=\gamma=0$, takže vektory jsou LN.
→ (b) $\alpha(1,2,3,4)+\beta(2,1,-3,3)+\gamma(1,5,12,9)=(\alpha+2\beta+\gamma,2\alpha+\beta+5\gamma,3\alpha-3\beta+12\gamma,4\alpha+3\beta+9\gamma)=(0,0,0,0)$, tj. $\alpha+2\beta+\gamma=0$, $2\alpha+\beta+5\gamma=0$, $3\alpha-3\beta+12\gamma=0$, $4\alpha+3\beta+9\gamma=0$. Soustava má nekonečně mnoho řešení, netriviální řešení je například $\alpha=-3$, $\beta=1$, $\gamma=1$, takže vektory jsou LZ.
→ (c) $\alpha(1,0,1,0)+\beta(0,1,0,1)+\gamma(1,2,2,0)=(\alpha+\gamma,\beta+2\gamma,\alpha+2\gamma,\beta)=(0,0,0,0)$, tj. $\alpha+\gamma=0$, $\beta+2\gamma=0$, $\alpha+2\gamma=0$, $\beta=0$. Soustava má jediné řešení $\alpha=\beta=\gamma=0$, takže vektory jsou LN.

2.70.[5] **Řešení.**
→ (a) $(1,2,-3)=\alpha(2,1,1)+\beta(3,2,1)+\gamma(1,0,1)=(2\alpha+3\beta+\gamma,\alpha+2\beta,\alpha+\beta+\gamma)$, tj. $2\alpha+3\beta+\gamma=1$, $\alpha+2\beta=2$, $\alpha+\beta+\gamma=3$. Soustava nemá řešení, tj. vektor $\boldsymbol{a}$ nelze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$.
→ (b) $x^2-1=\alpha(x-1)+\beta(x+1)+\gamma(x+1)^2=\gamma x^2+(\alpha+\beta+2\gamma)x+(-\alpha+\beta+\gamma)\ \forall x\in\mathbf{R}$, tj. $\gamma=1$, $\alpha+\beta+2\gamma=0$, $-\alpha+\beta+\gamma=-1$. Soustava má řešení $\alpha=0$, $\beta=-2$, $\gamma=1$, takže $x^2-1=0(x-1)-2(x+1)+1(x+1)^2$.
→ (c) $(1,2,2)=\alpha(2,1,3)+\beta(3,2,1)+\gamma(1,1,-2)$, tj. $2\alpha+3\beta+\gamma=1$, $\alpha+2\beta+\gamma=2$, $3\alpha+\beta-2\gamma=2$. Soustava nemá řešení, tj. vektor $\boldsymbol{a}$ nelze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$.

2.71.[2] **Řešení.** V definici lineárního prostoru je použit pojem „lineární kombinace“, který má smysl jen když platí vlastnosti (1), (2). Dále se v důkazu pracuje s přičtením vektoru $-\alpha_r\boldsymbol{x}_r$. Levá strana rovnosti: $\alpha_r\boldsymbol{x}_r+(-\alpha_r\boldsymbol{x}_r)$ + ostatní vektory $\overset{(6)}{=}$ $1\alpha_r\boldsymbol{x}_r+(-1)\alpha_r\boldsymbol{x}_r$ + ostatní vektory $\overset{(5)}{=}$ $(1-1)\alpha_r\boldsymbol{x}_r$ + ostatní vektory $=$ $0\alpha_r\boldsymbol{x}_r$ + ostatní vektory $\overset{(7)}{=}$ $\boldsymbol{o}$ + ostatní vektory $\overset{(V\ 1.7:\ 1)}{=}$ ostatní vektory. Pravá strana rovnosti: $\boldsymbol{o}+(-\alpha_r\boldsymbol{x}_r)$ $\overset{(V\ 1.7:\ 1)}{=}$ $-\alpha_r\boldsymbol{x}_r$. V dalším kroku důkazu se obě strany rovnosti násobí koeficientem $-1/\alpha_r$.

Levá strana rovnosti: $\frac{-1}{\alpha_r}\sum_{i\neq r}\alpha_i\boldsymbol{x}_i \overset{(4)}{=} \sum_{i\neq r}\frac{-1}{\alpha_r}\alpha_i\boldsymbol{x}_i \overset{(3)}{=} \sum_{i\neq r}\frac{\alpha_i}{-\alpha_r}\boldsymbol{x}_i$. Pravá strana: $\frac{-1}{\alpha_r}(-\alpha_r\boldsymbol{x}_r) \overset{(3)}{=} \left(\frac{-1}{\alpha_r}(-\alpha_r)\right)\boldsymbol{x}_r = 1\boldsymbol{x}_r \overset{(6)}{=} \boldsymbol{x}_r$. V druhé části důkazu dohledá použití axiomů definice 1.6 už čtenář sám.

2.72.[4] **Řešení.**

→ (a) $(-1,2,0,1) = \beta(1,0,2,1)+\gamma(3,1,2,1)+\delta(1,5,2,3)$, tj. $\beta+3\gamma+\delta=-1$, $\gamma+5\delta=2$, $2\beta+2\gamma+2\delta=0$, $\beta+\gamma+3\delta=1$. Soustava má řešení $\beta=0$, $\gamma=-\frac{1}{2}$, $\delta=\frac{1}{2}$, takže $\boldsymbol{a}=0\boldsymbol{b}+\left(\frac{-1}{2}\right)\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{d}$.

→ (b) $(1,0,2,1)=\alpha(-1,2,0,1)+\gamma(3,1,2,1)+\delta(1,5,2,3)$, tj. $-\alpha+3\gamma+\delta=1$, $2\alpha+\gamma+5\delta=0$, $2\gamma+2\delta=2$, $\alpha+\gamma+3\delta=1$. Soustava nemá řešení, takže $\boldsymbol{b}$ není žádnou lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$.

→ (c) Stačí upravit rovnost, která vyšla v případě a). $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{b}+1\boldsymbol{d}$.

→ (d) Znovu jen upravím předchozí rovnost. $\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{b}+1\boldsymbol{c}$.

→ (e) Existuje aspon jeden vektor (např. c), který je lineární kombinací ostatních. Vektory $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ tedy jsou dle věty 2.21 lineárně závislé. Nevadí, že $\boldsymbol{b}$ není lineární kombinací ostatních vektorů.

→ (f) Jsou LZ, viz e).

2.73.[3] **Řešení.**

→ (a) $\boldsymbol{a}=(1,2,3)$, $\boldsymbol{b}=(1,1,1)$, $\boldsymbol{c}=(0,1,1)$, $\boldsymbol{d}=(0,0,1)$. Pak $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

→ (b) Viz cvičení 2.72.

→ (c) $\boldsymbol{a}=(1,0,0)$, $\boldsymbol{b}=(2,0,0)$, $\boldsymbol{c}=(0,1,0)$, $\boldsymbol{d}=(0,0,1)$. Vektor $\boldsymbol{c}$ není lineární kombinací ostatních, $\boldsymbol{d}$ také není lineární kombinací ostatních. Ale $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{c}+0\boldsymbol{d}$, takže vektory jsou LZ.

2.74.[4] **Řešení.**

→ (a) $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\beta(2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})+\gamma(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})=\boldsymbol{o}$, tj. $(\alpha+2\beta)\boldsymbol{x}+(\alpha+\beta)\boldsymbol{y}+(\beta-\gamma)\boldsymbol{z}=\boldsymbol{o}$. Protože $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ jsou lineárně nezávislé vektory, je uvedená lineární kombinace triviální, takže $\alpha+2\beta=0$, $\alpha+\beta=0$, $\beta-\gamma=0$. Tato soustava má jen jediné řešení $\alpha=\beta=\gamma=0$, takže vektory $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}$ jsou LN.

→ (b) $\alpha(\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})+\beta(2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+5\boldsymbol{z})+\gamma(3\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+8\boldsymbol{z})=\boldsymbol{o}$, tj. $(\alpha+2\beta+3\gamma)\boldsymbol{x}+(2\alpha+\beta+\gamma)\boldsymbol{y}+(\alpha+5\beta+8\gamma)\boldsymbol{z}=\boldsymbol{o}$. Protože $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ jsou lineárně nezávislé vektory, je uvedená lineární kombinace triviální, takže $\alpha+2\beta+3\gamma=0$, $2\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha+5\beta+8\gamma=0$. Tato soustava má nekonečně mnoho řešení, například $\alpha=1$, $\beta=-5$, $\gamma=3$. Takže existuje netriviální lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$, $2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+5\boldsymbol{z}$, $3\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+8\boldsymbol{z}$, která je rovna nulovému vektoru. Zkoumané vektory jsou LZ.

2.75.[4] **Řešení.** $\alpha(\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y})+\beta(2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{z})+\gamma(\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})=\boldsymbol{o}$, tj. $(\alpha+2\beta+\gamma)\boldsymbol{x}+(2\alpha+\lambda\gamma)\boldsymbol{y}+(3\beta-\gamma)\boldsymbol{z}\boldsymbol{o}$. Protože $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ jsou lineárně nezávislé vektory, je uvedená lineární kombinace triviální, takže $\alpha+2\beta+\gamma=0$, $2\alpha+\lambda\gamma=0$, $3\beta-\gamma=0$.

→ (a) Pro $\lambda=\frac{10}{3}$ existuje nekonečně mnoho řešení uvedené sosutavy, například $\alpha=-5$, $\beta=1$, $\gamma=3$. To jsou koeficienty nertiviálni kineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru. Zkoumané vektory jsou LZ.

→ (b) Pro $\lambda\neq\frac{10}{3}$ má uvedená soustava jediné řešení $\alpha=\beta=\gamma=0$, takže jen triviální lineární kombinace je rovna nulovému vektoru. Zkoumané vektory jsou LN.

2.76.[3] **Řešení.** $\alpha_1(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)+\alpha_2(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3)+\cdots+\alpha_{n-1}(\boldsymbol{x}_{n-1}+\boldsymbol{x}_n)+\alpha_n(\boldsymbol{x}_n+\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{o}$, tj. $(\alpha_1+\alpha_n)\boldsymbol{x}_1+(\alpha_1+\alpha_2)\boldsymbol{x}_2+\cdots+(\alpha_{n-1}+\alpha_n)\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{o}$.

→ (a) Pro sudá n stačí volit $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-1$, $\alpha_3=1$, …, $\alpha_n=-1$. Vektory jsou LZ.

→ (b) Pro lichá n předpokládám, že $\alpha_1=c$ (bez újmy na obecnosti). Pak $\alpha_2=-c$, $\alpha_3=c$, $\alpha_4=-c$, …, $\alpha_n=c$. Dále musí $0=\alpha_n+\alpha_1=c+c=2c$, takže $c=0$. Pouze triviální lineární kombinace je rovna nulovému vektoru. Zkoumané vektory jsou LN.

2.77.[3] **Řešení.**

→ (a) $\alpha(x^3-x^2+x-1)+\beta(x^2-2)+\gamma(2x^3+x^2+1)=0\ \forall x\in\mathbf{R}$, tj. $(\alpha+2\gamma)x^3+(-\alpha+\beta+\gamma)x^2+\alpha x+(-\alpha-2\beta+\gamma)=0\ \forall x\in\mathbf{R}$. Podle věty 11.10 musí mít nulový polynom všechny koeficienty nulové, tedy $\alpha+2\gamma=0$, $-\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha=0$, $-\alpha-2\beta+\gamma=0$. Tato soustava má jediné řešení $\alpha=0,\beta=0,\gamma=0$, takže vektory jsou LN.

→ (b) $\alpha(x^3+2x^2+2x+1)+\beta(2x^3+x^2+3x+1)+\gamma(x^3+5x^2+3x+2)=0\ \forall x\in\mathbf{R}$, tj. $(\alpha+2\beta+\gamma)x^3+(2\alpha+\beta+5\gamma)x^2+(2\alpha+3\beta+3\gamma)x+(\alpha+\beta+2\gamma)=0\ \forall x\in\mathbf{R}$. Podle věty 11.10 musí mít nulový polynom všechny koeficienty nulové, tedy $\alpha+2\beta+\gamma=0$, $2\alpha+\beta+5\gamma=0$, $2\alpha+3\beta+3\gamma=0$, $\alpha+\beta+2\gamma=0$. Tato soustava má nekonečně mnoho řešení, například $\alpha=-3$, $\beta=1$, $\gamma=1$. To jsu koeficienty netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému polynomu, tedy polynomy jsou LZ.

→ (c) $\alpha e^x+\beta e^{2x}+\gamma e^{3x}=0\ \forall x\in\mathbf{R}$. Zkusím volit $x\in\{0,\ln 2,\ln 3\}$. Vychází soustava $\alpha+\beta+\gamma=0$, $2\alpha+4\beta+8\gamma=0$, $3\alpha+9\beta+27\gamma=0$, která má pouze nulové řešení. Vektory jsou LN.

→ (d) $\alpha\cos 2x + \beta\sin^2 x + \gamma e^{0x} = 0\ \forall x \in \mathbf{R}$. Protože je $e^{0x} = 1$ a $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x\ \forall x \in \mathbf{R}$, je uvedená podmínka ekvivalentní s: $\alpha(\cos^2 x - \sin^2 x) + \beta\sin^2 x + \gamma = 0\ \forall x \in \mathbf{R}$. To platí například pro $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -1$. Vektory tedy jsou LZ.

→ (e) Například při volbě $x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \pi, -\pi\right\}$ dostávám soustavu rovnic, která má jen triviální řešení. Vektory jsou LN.

→ (f) Například při volbě $x \in \{1, -1, 2\}$ dostávám soustavu rovnic, která má jen triviální řešení. Vektory jsou LN.

2.78.[4] **Řešení.**

→ (a) $\alpha(1,2,3,4) + \beta(2,2,0,1) + \gamma(1,2,a,2) = (0,0,0,0)$, tj. $\alpha + 2\beta + \gamma = 0, 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0, 3\alpha + a\gamma = 0, 4\alpha + \beta + 2\gamma = 0$. Soustava má pouze nulové řešení pro libovolné $a \in \mathbf{R}$, takže pro všechna $a \in \mathbf{R}$ jsou vektory LN.

→ (b) $a \neq \frac{19}{9}$, (c) $a \neq \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{217}}{14}$, (d) $a \neq 0$.

2.79.[4] **Řešení.**

→ (a) $x^3 + 2x^2 + ax + 2 = \alpha(x^3 + 2x^2 + 3x + 4) + \beta(2x^3 + x^2 + 4x + 2)\ \forall x \in \mathbf{R}$, tj. $(\alpha + 2\beta - 1)x^3 + (2\alpha + \beta - 2)x^2 + (3\alpha + 4\beta - a)x + (4\alpha + 2\beta - 2) = 0\ \forall x \in \mathbf{R}$. Podle věty 11.10 musí mít nulový polynom všechny koeficienty nulové, tedy $\alpha + 2\beta = 1$, $2\alpha + \beta = 2$, $3\alpha + 4\beta = a$, $4\alpha + 2\beta = 2$. Soustava nemá řešení, takže polynom $x^3 + 2x^2 + ax + 2$ neleží v obalu daných polynomů pro žádné $a \in \mathbf{R}$.

→ (b) $x^3 + 2x^2 + ax + 2 = \alpha(x^3 + 2x^2 + 3x + 4) + \beta(2x^3 + x^2 + 4x + 2) + \gamma(x^2 + x)\ \forall x \in \mathbf{R}$. Argumentace stejná, jako v případě a). Soustava $\alpha + 2\beta = 1$, $2\alpha + \beta + \gamma = 2$, $3\alpha + 4\beta + \gamma = a$, $4\alpha + 2\beta = 2$ má řešení jen pro $a = \frac{10}{3}$, takže polynom je v obalu daných polynomů pro $a = \frac{10}{3}$.

→ (c) $x^3 + 2x^2 + ax + 2 = \alpha(x^3 + 2x^2 + 3x + 4) + \beta(2x^3 + x^2 + 4x + 2) + \gamma(x^3 - x^2 + x - 2)$. Argumentace stejná, jako v případě a). Soustava $\alpha + 2\beta + \gamma = 1$, $2\alpha + \beta - \gamma = 2$, $3\alpha + 4\beta + \gamma = a$, $4\alpha + 2\beta - 2\gamma = 2$ nemá řešení pro žádné $a \in \mathbf{R}$, takže polynom neleží v obalu daných polynomů pro žádné $a \in \mathbf{R}$.

2.80.[4] **Řešení.** Neplatí. Například tři vektory v rovině, žádné dva z nich neleží na společné přímce, je lineárně závislá množina. Další příklady si čtenář jistě najde sám.

2.81.[3] **Řešení.** Je $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} \subseteq \langle M\rangle$. Podle věty 2.34 je $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \subseteq \langle\langle M\rangle\rangle$ a podle věty 2.35 (tvrzení 2) je $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \subseteq \langle\langle M\rangle\rangle = \langle M\rangle$.

2.82.[5] **Řešení.**

→ (a) Příklad báze: $\{1\}$, dimenze: 1.

→ (b) Příklad báze: $\{2\}$, dimenze: 1.

→ (c) Příklad báze: $\{1, i\}$, dimenze: 2.

→ (d) Příklad báze: $\big\{(1,0,\ldots,0), (i,0,\ldots,0), (0,1,\ldots,0), (0,i,\ldots,0), \ldots, (0,0,\ldots,1), (0,0,\ldots,i)\big\}$, dimenze: $2n$.

→ (e) Příklad báze: $\big\{(0,1), (1,1)\big\}$, dimenze: 2.

→ (f) Příklad báze: $\{\sin x, \cos x\}$, dimenze: 2.

2.83.[4] **Řešení.**

→ (a) M je LN, protože má jen dva vektory a jeden není násobkem druhého. Příklad báze: $\big\{(3,4,2,7),\ (1,2,1,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)\big\}$.

→ (b) Příklad báze: $\{(x+1)^2,\ (x-1)^2,\ x^2\}$.

2.84.[4] **Řešení.**

→ (a), b) Je $\dim L = 3$. První tři vektory z množiny M jsou v obou případech lineárně nezávislé (je možné ověřit), takže $\dim\langle M\rangle \geq 3$. Ovšem $\langle M\rangle \subseteq L$, takže $\dim\langle M\rangle = 3$. Podle věty 2.64, (případ 3) tedy je $\langle M\rangle = L$. První tři vektory z M tvoří bázi, ostatní vektory je možné odebrat.

2.85.[2] **Řešení.** Dá se lehce ověřit, že $(1,1,3,0) = 1\,(1,2,2,4) + 0\,(3,2,3,1) + 0\,(2,1,0,1) + (-1)\,(0,1,-1,4)$, $(1,0,-3,1) = (-2)\,(1,2,2,4) + 1\,(3,2,3,1) + 0\,(2,1,0,1) + 2\,(0,1,-1,4)$, takže $N \subseteq \langle M\rangle$. K množině M přidám vektor $(1,1,3,0)$ a odebrat nemůžeme vektor $(3,2,3,1)$ ani $(2,1,0,1)$, protože koeficient lineární kombinace je u tohoto vektoru nulový. Odeberu tedy například $(1,2,2,4)$. Dostávám (zatím) množinu $\big\{(1,1,3,0), (3,2,3,1), (2,1,0,1), (0,1,-1,4)\big\}$. Je $(1,0,-3,1) = (-2)\,(1,1,3,0) + 1\,(3,2,3,1) + 0\,(2,1,0,1) + 0\,(0,1,-1,4)$, takže přidám $(1,0,-3,1)$ a odeberu $(3,2,3,1)$. Dostávám výslednou množinu $P = \big\{(1,1,3,0), (1,0,-3,1), (2,1,0,1), (0,1,-1,4)\big\}$. Platí $\langle P\rangle = \langle M\rangle$.

2.86.[2] **Řešení.** B je lineárně nezávislá, neboť každá její konečná podmnožina je lineárně nezávislá (argumentuje se podobně, jako v příkladě 2.28).

→ (a) Každá posloupnost s konečným nosičem je lineární kombinací prvků z B: $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, 0, 0, \dots) = a_0\boldsymbol{b}_0 + a_1\boldsymbol{b}_1 + a_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{b}_k$.
→ (b) Posloupnost $(1, 1, 1, 1, \dots)$ nelze vyjádřit jako lineární kombinaci konečně mnoha prvků z B. Takže $(1, 1, 1, 1, \dots) \notin \langle B\rangle$, tj. B není bází lineárního prostoru všech posloupností.

2.87.[3] **Řešení.** Příklad báze: $\{(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots), (1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)\}$. Dimenze: 2.

2.88.[1] **Řešení.** Množina všech násobků jednoho vektoru je v tomto lineárním prostoru spočetná. Množina všec lineárních kombinací konečně mnoha vektorů je spočetná. Přitom $\mathbf{R}$ je nespočetná. Takže lineární obal žádné konečné množiny nemůže pokrývat celé $\mathbf{R}$. Tedy nemůže existovat konečná báze. Dimenze prostoru je nekonečno.

2.89.[3] **Řešení.** Například: $\{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{o}, \dots, \boldsymbol{o}), (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{o}, \dots, \boldsymbol{o}), \dots, (\boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{o}, \dots, \boldsymbol{o}), (\boldsymbol{o}, \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{o}), (\boldsymbol{o}, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{o}), \dots, (\boldsymbol{o}, \boldsymbol{b}_k, \dots, \boldsymbol{o}), \dots, (\boldsymbol{o}, \boldsymbol{o}, \dots, \boldsymbol{b}_1), (\boldsymbol{o}, \boldsymbol{o}, \dots, \boldsymbol{b}_2), \dots (\boldsymbol{o}, \boldsymbol{o}, \dots, \boldsymbol{b}_k)\}$, $\dim L^n = kn$.

2.90.[3] **Řešení.** Tvrzení není pravdivé. Například množina $M = \{0, x^2, x^4, x^6, x^8, \dots\}$ není bází lineárního prostoru všech polynomů, protože třeba $x^3 \notin \langle M\rangle$.

2.91.[5] **Řešení.**
→ (a) Ano, protože je LN a tříprvková. Přitom je zámo, že dimenze prostoru polynomů nejvýše druhého stupně je 3.
→ (b) Ano, protože je LN a tříprvková a je $\dim \mathbf{R}^3 = 3$.
→ (c) Ano, protože je LN a dvouprvková a je $\dim \mathbf{C} = 2$.
→ (d) Ověřím lineární nezávislost. $\alpha(1, i) + \beta(2, 1 + i) + \gamma(1 + i, 2 + i) + \delta(i, 1) = (0 + 0i, 0 + 0i)$, tj. $\alpha + 2\beta + (1 + i)\gamma + i\delta = 0 + 0i$, $i\alpha + (1 + i)\beta + (2 + i)\gamma + \delta = 0 + 0i$, tj. reálná část první rovnice: $\alpha + 2\beta + \gamma = 0$, imaginární část první rovnice: $\gamma + \delta = 0$, reálná část druhé rovnice: $\beta + 2\gamma + \delta = 0$, imaginární část druhé rovnice: $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Tyto čtyři rovnice tvoří soustavu, která má pouze triviální řešení, takže množina B je LN. Protože $\dim \mathbf{C}^2 = 4$ a B je čtyřprvková lineárně nezávislá, je B bází lineárního prostoru $\mathbf{C}^2$.
→ (e) Ano, B je LN a je tříprvková a dimenze protoru polynomů nejvýše druhého stupně je tři.
→ (f) B není báze, protože má jen dva prvky, a přitom $\dim \mathbf{R}^3 = 3$.
→ (g) B není báze, protože má 4 prvky, a přitom $\dim \mathbf{R}^3 = 3$. Množina B musí podle věty 2.64 být nutně lineárně závislou množinou.

2.92.[5] **Řešení.**
→ (a) $B = \{(1, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 4)\}$, $\dim M = 2$.
→ (e) $B = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$, $\dim M = 3$.
→ (f) $B = \{(2, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$, $\dim M = 2$.
→ (g) $B = \{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$, $\dim M = 3$.
→ (h) $B = \{(1, 1, 1, 1)\}$, $\dim M = 1$.
→ (i) Jen pro $a = 0$. $B = \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}$, $\dim M = 3$.

2.93.[3] **Řešení.** Všechny lineární kombinace polynomů z M jsou tvaru $ax^2 + bx + a$ a obráceně, každý takový polynom lze získat jako lineární kombinaci prvků z M: $ax^2 + bx + a = a(x^2 + \frac{b}{a}x + 1)$ pro $a \neq 0$ a $0x^2 + bx + 0 = (x^2 + bx + 1) + (-1)(x^2 + 0x + 1)$. Takže $\langle M\rangle = \{ax^2 + bx + a,\ a, b \in \mathbf{R}\}$. Báze je například $\{x^2 + 1, x\}$, $\dim\langle M\rangle = 2$.

2.94.[3] **Řešení.** Je $K \subseteq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m\rangle$, $\dim\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m\rangle \le m$. Protože dimenze je maximální počet lineárně nezávislých vektorů, nemůže $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m\rangle$ obsahovat množinu K lineárně nezávislých vektorů s větším počtem prvků než m.

2.96.[3] **Řešení.**
→ (a) [1] $n = 1$: $1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. [2] Předpokládám, že platí $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ a dokážu, že $1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Je $1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
→ (b) [1] $n = 1$: $2 = \frac{1\cdot(3+1)}{2} = 2$. [2] Předpokládám, že platí $V(n)$ a dokážu platnost $V(n + 1)$, tj. dokážu $2 + 5 + \cdots + (3n - 1) + (3(n + 1) - 1) = \frac{(n+1)(3(n+1)+1)}{2}$. Je $2 + 5 + \cdots + (3n - 1) + (3(n + 1) - 1) = \frac{n(3n+1)}{2} + \frac{6(n+1)-2}{2} = \frac{3n^2+n+6n+4}{2} = \frac{(n+1)(3(n+1)+1)}{2}$.
→ (c) [1] 12 je dělitelné šesti. [2] Předpokládám, že $n^3 + 11n$ je dělitelné šesti a dokážu, že $(n+1)^3 + 11(n+1)$ je dělitelné šesti. Je $(n + 1)^3 + 11(n + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 11n + 11 = (n^3 + 11n) + 3(n^2 + n) + 12$. První sčítanec je dělitelný šesti dle indukčního předpokladu, poslední sčítanec (dvanáctka) je také dělitelný šesti. Zbývá ověřit dělitelnost $3(n^2 + n)$. Pro n sudé je $n^2 + n = \text{sudé} \cdot \text{sudé} + \text{sudé} = \text{sudé číslo}$. Pro n

liché je $n^2 + n =$ liché $\cdot$ liché $+$ liché $=$ liché $+$ liché $=$ sudé číslo. Trojnásobek sudého čísla je dělitelný šesti.

→ (d) [1] $7^1 1 = 1977326743$, zbytek po dělení tohoto čísla jedenácti je 7. [2] Předpokládám platnost $V(n)$ (tedy $7^{10n+1} = 11k + 7$ pro nějaké k přirozené) a dokážu, že $7^{10(n+1)+1}$ má zbytek po dělení jedenácti 7. Je $7^{10(n+1)+1} = 7^{10n+10+1} = 7^{10n+1} \cdot 7^1 0 = (11k + 7) \cdot 7^1 0 = 7^1 0 \cdot 11k + 7^1 1$. Číslo $7^1 0 \cdot 11k$ je dělitelné jedenácti a $7^1 1$ má zbytek po dělení jedenácti 7, jak jsem ověřil v kroku [1].

→ (e) [1] $1 \cdot 2^0 = 0 \cdot 2^1 + 1$. [2] Předpokládám platnost $V(n)$, dokážu $(n-1)2^n + 1 + (n+1)2^n = n \cdot 2^{n+1} + 1$. Levá strana tohoto vztahu je rovna $2^n(n - 1 + n + 1) + 1 = 2^n \cdot 2n + 1$ což je rovno pravé straně vztahu.

→ (f) [1] $n = 4$: $2^4 = 16 < 4! = 24$. [2] Nechť platí $V(n)$, tj. $2^n < n!$, dokážu $2^{n+1} < (n + 1)!$. Je $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2n! < (n + 1)n! = (n + 1)!$.

→ (g) Lze ukázat přímo, bez použití indukce, ale procvičujeme indukci. [1] $\{1\}$ obsahuje dvě podmnožiny: $\emptyset$, $\{1\}$. [2] Nechť $V(n)$ platí, dokážu, že $\{1, 2, \dots, n, n + 1\}$ má 2^{n+1} podmnožin. Existuje 2^n podmnožin z $\{1, 2, \dots, n\}$ a stejný počet podmnožin, které obsahují navíc prvek $n+1$. Takže $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

→ (h) [1] Je-li $x + \frac{1}{x}$ celé, pak $x^1 + \frac{1}{x^1}$ je celé. Výrok $V(1)$ tedy platí. V indukčním kroku budu předpokládat platnost $V(n)$ a $V(n - 1)$, takže nyní potřebuji ještě ověřit, že $V(0)$ platí. Ovšem $x^0 + \frac{1}{x^0} = 2$ je celé číslo. [2] Nechť $V(n)$ a $V(n - 1)$ platí. Dokážu, že je-li $x + \frac{1}{x}$ celé, pak $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ je celé. Protože $x + \frac{1}{x}$, $x^n + \frac{1}{x^n}$ a $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$ jsou celá čísla, je celé taky $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$.

→ (i) [1] $a + b = a^1 + b^1$. [2] Nechť $V(n)$ platí.
$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\left(\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n}b^n\right) = a^{n+1} + b^{n+1} + a^n b\left(\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right) + a^{n-1}b^2\left(\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right) + \dots + ab^n\left(\binom{n}{n}\binom{n}{n-1}\right)$. Nyní stačí ukázat, že $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$. Je $\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k)n! + (k+1)n!}{k!(k+1)(n-k-1)!(n-k)} = \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$.

→ (j) Na tento typ úlohy nelze použít indukci. Stačí ale roznásobit pravou stranu.

→ (k) [1] Pro $n = 1$ je rovnost zřejmá. [2] Nechť $V(n)$ platí. Dokážu $V(n + 1)$. $(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = (\cos\varphi\cos n\varphi - \sin\varphi\sin n\varphi) + i(\cos\varphi\sin n\varphi + \sin\varphi\cos n\varphi) = \cos(n + 1)\varphi + i\sin(n + 1)\varphi$. V poslední rovnosti byly použity součtové vzorce.

2.97.^{2} **Řešení.**

→ (a) Zde se indukce zřejmě nedá použít.

→ (b) Tvrzení $V(n)$: Nulový polynom musí mít nulové koeficienty $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. [1] $n = 0$: Je $a_0 = 0$, viz první část důkazu za větou 11.10. [2] Nechť $V(n)$ platí, dokážu, že pak i a_{n+1} je nulový koeficient. Předpokládám, že polynom má koeficienty $a_0, \dots a_m$, přičemž $m > n$. Kdyby $m \le n$, pak není co dokazovat. $p(x) = x^{n+1}(a_{n+1} + a_{n+2}x + \dots + a_m x^{m-n-1}) = x^{n+1}q(x)$. Protože je $\lim_{x\to 0} q(x) = 0$ a q je spojitý polynom, musí $q(0) = 0$ a tedy q musí mít nulový absolutní člen, tj. koeficient a_{n+1}.

2.98.^{3} **Řešení.** Indukční krok od $V(1)$ k $V(2)$ nefunguje.

3.62.^{5} **Řešení.**

→ (a) $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 0 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -6 & 1 & -7 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 2\alpha+3\beta & 2\beta & \beta \\ \alpha & 3\alpha & 4\alpha+7\beta \end{pmatrix}$.

3.63.^{4} **Řešení.** Součet matic typu (m, n) je matice typu (m, n). α-násobek matic typu (m, n) je rovněž matice (m, n). (1) sčítání matic je komutativní, protože sčítání jedotlivých prvků matic je komutativní. Tatáž argumentace se použije při ověření asociativního zákona. Nechť $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ a $\mathbf{B} = (b_{i,j})$ jsou reálné matice typu (m, n) a $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Pak (3) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha(\beta a_{i,j})) = ((\alpha\beta)a_{i,j}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$, (4) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\alpha(a_{i,j} + b_{i,j})) = (\alpha a_{i,j} + \alpha b_{i,j}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$, (5) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = ((\alpha + \beta)a_{i,j}) = (\alpha a_{i,j} + \beta a_{i,j}) = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$, (6) $1\mathbf{A} = (1a_{i,j}) = (a_{i,j}) = \mathbf{A}$, (7) $0\mathbf{A} = (0a_{i,j}) =$ nulová matice. Ta je nulovým vektorem daného lineárního prostoru.

3.64.^{4} **Řešení.** $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+2\beta+3\gamma & \alpha+\beta \\ 2\alpha+2\beta+\gamma & 2\alpha+\beta+2\gamma \end{pmatrix}$. Čísla $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ musejí splňovat soustavu rovnic s maticí $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \lambda \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1-\lambda \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 4 & 2-\lambda \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{array}\right)$. Tj. $\gamma = \frac{2}{7}$, $2 - \lambda = 4 \cdot \frac{2}{7}$, $\lambda = 2 - \frac{8}{7} = \frac{6}{7}$, $\beta = \frac{-5}{7}$, $\alpha = \frac{11}{7}$.

3.65.^{4} **Řešení.**

→ (a) $\alpha\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Toto vede na soustavu rovnic s neznámými $\alpha, \beta\gamma, \delta$ a s parametrem x. Tato soustava má netriviální řešení pro $x = 2$ nebo $x = -6$. Pro tyto hodnoty jsou matice lineárně závislé.

→ (b) $-1\begin{pmatrix} 0 & -1 & 11 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x = 3$.

3.66.[4] **Řešení.**
→ (a) Báze: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim = 4$.
→ (b) Označím $\mathbf{A}_{i,j}$ matici typu (m, n), která má všude nuly, jen prvek $a_{i,j}$ je roven jedné. Příkladem báze je pak množina $\{\mathbf{A}_{1,1}, \mathbf{A}_{1,2}, \ldots, \mathbf{A}_{1,n}, \mathbf{A}_{2,1}, \mathbf{A}_{2,2}, \ldots, \mathbf{A}_{2,n}, \ldots, \mathbf{A}_{m,1}, \mathbf{A}_{m,2}, \ldots, \mathbf{A}_{m,n}\}$, $\dim = mn$.

3.67.[5] **Řešení.**
→ (a) hod = 4, (b) hod = 3, (c) hod = 3, (d) hod = 1.

3.68.[5] **Řešení.** Namátkou (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & -5 \\ 3 & 3 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Ano, matice mají stejnou hodnost jako ve cvičení 3.67. Čtenář si to může na těchto příkladech prakticky vyzkoušet.

3.69.[4] **Řešení.** (a) hod = 1 pro $\alpha = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, (b) hod = 3 pro všechna $\alpha \in \mathbf{R}$, (c) hod = 3 pro $\alpha = 3$, (d) hod = 3 pro $\alpha = 0$ nebo $\alpha = -2$, (e) hod = 4 pro $\alpha \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, (f) hod = 2 pro $\alpha = 3$, (g) hod = 1 pro $\alpha = 6$.

3.70.[4] **Řešení.**
→ (a) Pro $c - 2a + 3b = 0$ je hod = 2, pro $c - 2a + 3b \neq 0$ je hod = 3.
→ (b) Pro $a = 1$ je hod = 1, pro $a = -\frac{1}{2}$ je hod = 2 a pro $a \notin \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$ je hod = 3.
→ (c) Pro $a \neq 0$ a b, c libovolná je hod = 3, pro $a = 0$ a $b \neq 0$ a c libovolné je hod = 2, pro $a = 0$, $b = 0$ a $c \neq 0$ je hod = 1 a konečně pro $a = 0$, $b = 0$ a $c = 0$ je hod = 0.

3.71.[4] **Řešení.** Nechť nejprve $\operatorname{hod} \mathbf{A} = k$. Tedy $\dim\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \rangle = k$. Pak podle věty 2.64 (vlastnost 3) je $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ lineárně nezávislá množina. Nechť nyní obráceně vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ jsou LN. Pak je to báze svého lineárního obalu a nutně jeho dimenze je rovna k.

3.72.[5] **Řešení.**
Cvičení 2.69 (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 16 & 15 \end{pmatrix}$, hod = 3, vektory jsou LN.
→ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 5 & 12 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$, hod = 2, vektory jsou LZ.
→ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, hod = 3, vektory jsou LN.
Cvičení 2.78 se dělá obdobně.

3.73.[5] **Řešení.**
→ (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a \\ a & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 3-a & 3-2a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^2-5a+3 \end{pmatrix}$, hod = 2 pro $a^2 - 5a + 3 = 0$, neboli $a = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$. Tehdy jsou vektory LZ. V opačném případě, tj. $a \notin \left\{ \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}, \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \right\}$ jsou vektory LN.
→ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & a-4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & a-4 \\ 0 & 0 & 2a-7 \end{pmatrix}$, hod = 3 pro $2a - 7 \neq 0$, tj. pro $a \neq \frac{7}{2}$. Vektory jsou LN pro $a \neq \frac{7}{2}$.

3.74.[3] **Řešení.** Podle věty 2.51 existuje báze $B \subseteq \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ lineárního prostoru $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \rangle$. Ta má podle definice hodnosti $\operatorname{hod} \mathbf{A}$ prvků a je $\langle B \rangle = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \rangle$. Nechť nejprve $\boldsymbol{y} \in \langle B \rangle$. Pak $B \cup \{\boldsymbol{y}\}$ je lineárně závislá množina, takže $\operatorname{hod} \mathbf{B} = \dim\langle B \cup \{\boldsymbol{y}\}\rangle = \dim\langle B \rangle = \operatorname{hod} \mathbf{A}$. Obráceně, nechť $\dim\langle B \cup \{\boldsymbol{y}\}\rangle = \dim\langle B \rangle$. Pak nutně $B \cup \{\boldsymbol{y}\}$ nemůže být bází svého lineárního obalu, takže je lineárně závislá. Protože B je lineárně nezávislá, musí $\boldsymbol{y}$ být lineární kombinací prvků z B, neboli $\boldsymbol{y} \in \langle B \rangle$.

3.75.[5] **Řešení.**
→ (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & a-4 \end{pmatrix}$, takže hod = 3 $\forall a \in \mathbf{R}$. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & a-4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & a-4 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-7a+7 \end{pmatrix}$, takže hod = 3 právě tehdy, když $a^2 - 7a + 7 = 0$, tj. $a = \pm\sqrt{21}/2 - 7/2$. To jsou hodnoty parametru a, pro který leží daný vektor v daném lineárním obalu.
→ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, takže hod = 3. Dále $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ a & 2 & 2 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3-a & 0 \end{pmatrix}$, takže hod = 3 pro $a = 3$. Pro tuto hodnotu a leží daný vektor v daném lineárním obalu.
→ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, takže hod = 3. Dále $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ a & 2 & 2 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, takže hod = 4 a daný vektor neleží v daném lineárním obalu pro žádnou hodnotu parametru a.

3.77.[5] **Řešení.** Cv. 3.64) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7\lambda-6 \end{pmatrix}$, takže hod $= 3$ pro $\lambda = \frac{6}{7}$ a to je hodnota, pro kterou $\mathbf{P} \in \langle \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle$.

Cv. 3.65, a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2x & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 4 & x+2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+4x-12 & 0 \end{pmatrix}$, takže hod $= 3$ pro $x^2 + 4x - 12 = 0$, tj. $x = 2$ nebo $x = -6$. Tehdy jsou dané matice lineárně závislé. Analogicky případ b).

Cv. 2.79, a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & a & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & a-3 & 2 \end{pmatrix}$. hod $= 3$ nezávisle na a, takže daný polynom neleží v daném lineárním obalu pro žádné $a \in \mathbf{R}$. Analogicky případy b) a c).

3.78.[5] **Řešení.**

→ (a) $\begin{pmatrix} 10 & 11 & 15 & 17 & 37 \\ 10 & 13 & 15 & 17 & 34 \\ 4 & 1 & 4 & 11 & 21 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 16 \end{pmatrix}$,

→ (b) nedefinováno, počet sloupců první se nerovná počtu řádků druhé matice,

→ (c) $\begin{pmatrix} 8 & 7 & 15 & 22 \\ 6 & 8 & 13 & 22 \\ 6 & 1 & 11 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 12 \end{pmatrix}$,

→ (d) nedefinováno, počet sloupců první se nerovná počtu řádků druhé matice,

→ (e) nedefinováno, počet sloupců první se nerovná počtu řádků druhé matice,

→ (f) $\begin{pmatrix} 69 \\ 51 \\ 24 \\ 29 \end{pmatrix}$, (g) (55), (h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{pmatrix}$, (i) $\begin{pmatrix} 49 & -7 & 4 \\ 42 & -13 & -6 \\ 28 & 1 & 3 \\ 21 & -17 & -5 \end{pmatrix}$.

3.79.[4] **Řešení.** $\mathbf{X}_a^2$: typ $(5,5)$, $\mathbf{X}_a\mathbf{X}_a^T$: typ $(5,5)$, $\mathbf{X}_a\mathbf{X}_b$: typ $(5,3)$, $\mathbf{X}_a\mathbf{B}^T$: typ $(5,4)$, $\mathbf{X}_a\mathbf{C}^T$: typ $(5,1)$, $\mathbf{X}_a\mathbf{D}$: typ $(5,1)$, $\mathbf{X}_a^T\mathbf{X}_a$: typ $(5,5)$, $\mathbf{X}_a^T{\mathbf{X}_a}^T$: typ $(5,5)$, $\mathbf{X}_a^T\mathbf{X}_b$: typ $(5,3)$, $\mathbf{X}_a^T\mathbf{B}^T$: typ $(5,4)$, $\mathbf{X}_a^T\mathbf{C}^T$: typ $(5,1)$, $\mathbf{X}_a^T\mathbf{D}$: typ $(5,1)$, $\mathbf{X}_b\mathbf{X}_b^T$: typ $(5,5)$, $\mathbf{X}_b\mathbf{X}_d$: typ $(5,2)$, $\mathbf{X}_b^T\mathbf{X}_a$: typ $(3,5)$, $\mathbf{X}_b^T\mathbf{X}_a^T$: typ $(3,5)$, $\mathbf{X}_b^T\mathbf{X}_b$: typ $(3,3)$, $\mathbf{X}_b^T\mathbf{B}^T$: typ $(3,4)$, $\mathbf{X}_b^T\mathbf{C}^T$: typ $(3,1)$, $\mathbf{X}_b^T\mathbf{D}$: typ $(3,1)$, $\mathbf{X}_c\mathbf{X}_c^T$: typ $(4,4)$, $\mathbf{X}_c^T\mathbf{X}_c$: typ $(7,7)$, $\mathbf{X}_c^T\mathbf{A}$: typ $(7,4)$, $\mathbf{X}_c^T\mathbf{A}^T$: typ $(7,4)$, $\mathbf{X}_c^T\mathbf{B}$: typ $(7,5)$, $\mathbf{X}_d\mathbf{X}_d^T$: typ $(3,3)$, $\mathbf{X}_d^T\mathbf{X}_b^T$: typ $(2,5)$, $\mathbf{X}_d^T\mathbf{X}_d$: typ $(2,2)$, $\mathbf{A}\mathbf{X}_c$: typ $(4,7)$, $\mathbf{A}^2$: typ $(4,4)$, $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$: typ $(4,4)$, $\mathbf{A}\mathbf{B}$: typ $(4,5)$, $\mathbf{A}^T\mathbf{X}_c$: typ $(4,7)$, $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$: typ $(4,4)$, $(\mathbf{A}^T)^2$: typ $(4,4)$, $\mathbf{A}^T\mathbf{B}$: typ $(4,5)$, $\mathbf{B}\mathbf{X}_a$: typ $(4,5)$, $\mathbf{B}\mathbf{X}_a^T$: typ $(4,5)$, $\mathbf{B}\mathbf{X}_b$: typ $(4,3)$, $\mathbf{B}\mathbf{B}^T T$: typ $(4,4)$, $\mathbf{B}\mathbf{C}^T$: typ $(4,1)$, $\mathbf{B}\mathbf{D}$: typ $(4,1)$, $\mathbf{B}^T\mathbf{X}_c$: typ $(5,7)$, $\mathbf{B}^T\mathbf{A}$: typ $(5,4)$, $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$: typ $(5,4)$, $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$: typ $(5,5)$, $\mathbf{C}\mathbf{X}_a$: typ $(1,5)$, $\mathbf{C}\mathbf{X}_a^T$: typ $(1,5)$, $\mathbf{C}\mathbf{X}_b$: typ $(1,3)$, $\mathbf{C}\mathbf{B}^T$: typ $(1,4)$, $\mathbf{C}\mathbf{C}^T$: typ $(1,1)$, $\mathbf{C}\mathbf{D}$: typ $(1,1)$, $\mathbf{C}^T\mathbf{C}$: typ $(5,5)$, $\mathbf{C}^T\mathbf{D}^T$: typ $(5,5)$, $\mathbf{D}\mathbf{C}$: typ $(5,5)$, $\mathbf{D}\mathbf{D}^T$: typ $(5,5)$, $\mathbf{D}^T\mathbf{X}_a$: typ $(1,5)$, $\mathbf{D}^T\mathbf{X}_a^T$: typ $(1,5)$, $\mathbf{D}^T\mathbf{X}_b$: typ $(1,3)$, $\mathbf{D}^T\mathbf{B}^T$: typ $(1,4)$, $\mathbf{D}^T\mathbf{C}^T$: typ $(1,1)$, $\mathbf{D}^T\mathbf{D}$: typ $(1,1)$, ostatní zde neuvedené součiny zadaných matic nejsou definovány.

3.80.[5] **Řešení.** Nechť $\mathbf{A}$ je typu (m,n) a $\mathbf{B}$ je typu (p,q).

→ (a) Protože $\mathbf{AB}$ je definováno, musí $n = p$. Protože $\mathbf{BA}$ je definováno, musí $m = q$, takže $\mathbf{B}$ je typu (n,m). $\mathbf{AB}$ je pak typu (m,m) a $\mathbf{BA}$ je typu (n,n). To jsou čtvercové matice.

→ (b) Jako v případu (a), navíc zde máme podmínku $m = n$, takže skutečně $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ jsou matice typu (n,n).

3.81.[4] **Řešení.** $(\mathbf{AA})\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{AA})$, protože při násobení matic platí asociativní zákon (věta 3.38).

3.82.[4] **Řešení.** $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 21 & 10 & -14 \\ 6 & 9 & -5 \\ 10 & 8 & -7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 87 & 44 & -59 \\ 29 & 29 & -22 \\ 44 & 30 & -31 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^3 - 7\mathbf{A}^2 + 13\mathbf{A} - 5\mathbf{E} = \mathbf{O}$ (nulová matice).

3.83.[4] **Řešení.** $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$, $a_{1,1} = a^2 + bc - a(a+d) + (ad - bc) = 0$, $a_{1,2} = ab + bd - b(a+d) + 0 = 0$, $a_{2,1} = a_{2,2} = 0$ (ověřím analogicky).

3.84.[3] **Řešení.** Protože matice $\mathbf{A}^2$ je lineární kombinací matic $\mathbf{E}$ a $\mathbf{A}$. Matice $\mathbf{A}^3 = (a+d)\,\mathbf{A}^2 - (ad - bc)\,\mathbf{A}$ je lineární kombinací matic $\mathbf{A}^2$ a $\mathbf{A}$, takže je lineární kombinací matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{E}$. Množina $\{\mathbf{E}, \mathbf{A}\}$ je bází daného libneárního obalu, pokud $\mathbf{E}$, $\mathbf{A}$ jsou lineárně nezávislé matice. To platí právě tehdy, když $\mathbf{A}$ není násobkem matice $\mathbf{E}$.

3.85.[4] **Řešení.**

→ (a) (b) Komutující matici předpokládám ve tvaru $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Z rovnosti $\mathbf{CA} = \mathbf{AC}$ plynou čtyři rovnice s neznámými a, b, c, d, dimenze prostoru řešení je 2. To platí v případě (a) i (b). Protože $\dim\langle \mathbf{E}, \mathbf{A} \rangle = 2$ a $\mathbf{E}$ i $\mathbf{A}$ komutují s $\mathbf{A}$, je prostor komutujících matic roven obalu $\langle \mathbf{E}, \mathbf{A} \rangle$.

→ (c) Komutující matici předpokládám ve tvaru $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Z rovnosti $\mathbf{CA} = \mathbf{AC}$ plyne, že $2c = 0$, $b = b$, $c = c$, $2f = 0$, $e = e$, $f = f$, $2a = 2i$, $2b = 0$, $2c = 0$, takže $a = i$, $b = c = f = 0$ a ostatní proměnné mohou být libovolné. Obecná komutující matice tedy je $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & a \end{pmatrix}$. Bázi prostoru komutujících matic tvoří např. matice, které mají jedinou jedničku pod hlavní diagonálou, nebo jedničku uprostřed hlavní diagonály nebo dvě jedničky na krajích hlavní diagonály, jinde mají nuly. Dimenze tohoto prostoru je 5.

→ (d) Podobným postupem, jako v (c) zjistím, že obecná komutující matice je $\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$, takže dimenze hledaného prostoru je 3 a bázi si najde čtenář sám.

→ (e) Podobně jako v předchozích případech odhalím obecnou komutující matici ve tvaru $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ ) & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, takže dimenze hledaného prostoru je 4. Bázi si zapíše každý sám.

3.86.[2] **Řešení.** Tvrzení platí pro všechny matice $\mathbf{A}$ typu $(2,2)$ s výjimkou matic tvaru $\alpha\mathbf{E}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, které komutují se všemi maticemi typu $(2,2)$. K důkazu tohoto tvrzení nestačí argumentovat výsledkem cvičení 3.84, protože není snadné dokázat, že neexistuje komutující matice mimo lineární prostor $\langle \mathbf{E}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \ldots \rangle$. Je tedy potřeba pracovat s obecnou maticí $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a komutující matici předpokládat třeba ve tvaru $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ a vyjít z rovnic, které plynou z $\mathbf{CA} = \mathbf{AC}$.

3.87.[3] **Řešení.** Matici předpokládám ve tvaru $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

→ (a) $a^2 + bc = 0$, $ab + bd = 0$, $ac + cd = 0$, $d^2 + bc = 0$. Protože $a^2 = -bc = d^2$, musí $a = \pm d$. Nejprve předpokládám $a = d$. Pak $2ab = 0$, takže $a = 0$ nebo $b = 0$. Také $2ac = 0$, takže $a = 0$ nebo $c = 0$. Předpokádám nejdříve $a = 0$. Pak $bc = 0$, takže $b = 0$ nebo $c = 0$, což odpovídá maticím $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$. Nechť nyní $a \neq 0$ a $a = d$. Pak $b = 0$ a současně $c = 0$, ovšem pak z první rovnice i $a^2 = 0 = a$. Takže tato možnost nevede k výsledku. Konečně nechť $a = -d$. Pak druhá a třetí rovnice je vždy splněna a z první rovnice musí $bc = -a^2$, neboli $c = -a^2/b$. Z toho vychází $\begin{pmatrix} a & b \\ -a^2/b & -a \end{pmatrix}$.

→ (b) $a^2 + bc = 1$, $ab + bd = 0$, $ac + cd = 0$, $d^2 + bc = 1$. Protože $a^2 = 1 - bc = d^2$, musí $a = \pm d$. Nechť nejprve $a = d = 0$, Pak $bc = 1$, takže $b \neq 0$ a $c = b/c$, což odpovídá matici $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1/b & 0 \end{pmatrix}$. Dále předpokládejme $a = d \neq 0$, pak musí $b = 0$ a $c = 0$, takže $a = d = \pm 1$, což odpovídá matici $\pm\mathbf{E}$. Konečně nechť $a = -d \neq 0$, pak $bc = 1 - a^2$. Je-li $|a| = |d| = 1$, pak b může být libovolné a $c = 0$ nebo $b = 0$ a c je libovolné. To odpovídá maticím $\begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ c & \mp 1 \end{pmatrix}$. Je-li $|a| = |d| \neq 1$, pak b a c jsou nenulové, $c = (1 - a^2)/b$, což odpovídá matici $\begin{pmatrix} a & b \\ (1-a^2)/b & -a \end{pmatrix}$.

→ (c) $a^2 + bc = a$, $ab + bd = b$, $ac + cd = c$, $d^2 + bc = d$. Z druhé a třetí rovnice při $b \neq 0$ nebo $c \neq 0$ plyne $a + d = 1$. Z poslední rovnice je $d = (1/2)(1 \pm \sqrt{1 - 4bc})$, přičemž reálné řešení je možné jen pro $bc \leq 1/4$. Z předchozí rovnosti $a + d = 1$ pak máme $a = (1/2)(1 \mp \sqrt{1 - 4bc})$. Po dosazení do první rovnice shledáme, že ta je nadbytečná. Shrnuto: pro $b \neq 0$ a $c \neq 0$ musí $bc \leq 1/4$ a matice jsou tvaru $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \mp \sqrt{1-4bc} & 2b \\ 2c & 1 \pm \sqrt{1-4bc} \end{pmatrix}$. Je-li $b = c = 0$, pak $a^2 = a$ a $d^2 = d$, takže $a = 0$ nebo $a = 1$ a $d = 0$ nebo $d = 1$. Tyto případy jsou obsaženy v obecné matici uvedené před chvílí.

3.88.[4] **Řešení.**

→ (a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} + \mathbf{B}^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$, protože $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

→ (b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{AB} + \mathbf{BA} - \mathbf{B}^2 = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$, protože $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

→ (c) $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} = (\mathbf{AB})\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{BA}) = \mathbf{AB} = \mathbf{A}$, $\mathbf{B}^2 = \mathbf{BB} = (\mathbf{BA})\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{AB}) = \mathbf{BA} = \mathbf{B}$.

3.89.[4] **Řešení.** Cv. 3.67: (a) singulární (hod < 5), ostatní matice nejsou čtvercové.
Cv. 3.78: hod $\mathbf{A} = 4$, takže $\mathbf{A}$ je regulární. $\mathbf{A}^2$ je regulární, protože má inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{CD}$ je zjevně regulární a $\mathbf{DC}$ je zjevně singulární. Ostatní matice nejsou definovány nebo nejsou čtvercové.
Cv. 3.69 (a) $\alpha \neq \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, (b) pro všechna $\alpha \in \mathbf{R}$, (c) není čtvercová, (d) není čtvercová,

→ (e) $\alpha \notin \{1, 2, 3, 4, 5\}$, (f) není čtvercová, (g) není regulární, $\alpha \in \mathbf{R}$ nemá vliv.

3.90.[3] **Řešení.** Obě matice jsou inverzními maticemi k $\mathbf{A}^T$. První je tak definována a pro druhou platí: $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^T = \mathbf{E}^T = \mathbf{E}$, $(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^T = (\mathbf{AA}^{-1})^T = \mathbf{E}^T = \mathbf{E}$. Byl využit vztah (5) věty 3.38 a dále věta 3.49 o jednoznačnosti inverzní matice.

3.91.[5] **Řešení.**

→ (a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} d/D & -b/D \\ -c/D & a/D \end{pmatrix}$, kde $D = ad - bc$, (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

(e) $\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/3 & 1/6 \\ 1 & 2/3 & -4/3 \end{pmatrix}$, (f) matice je singulární, (g) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (h) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (j) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, (k) $\begin{pmatrix} 13/4 & -9/4 & 1 & 0 \\ -21/2 & 13/2 & -2 & -1 \\ 37/4 & -21/4 & 1 & 2 \\ -9/4 & 5/4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, (l) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -p & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p^2 & -p & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pm p^{n-1} & \mp p^{n-2} & \pm p^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$,

(m) $\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$,

3.92.[4] **Řešení.** $\mathbf{P}_1\mathbf{A}$ je jako $\mathbf{A}$, jen s přehozeným prvním a druhým řádkem, $\mathbf{P}_2\mathbf{A}$ je jako $\mathbf{A}$, jen druhý řádek je pronásoben číslem α, $\mathbf{P}_3\mathbf{A}$ je jako $\mathbf{A}$, jen k druhému řádku je přičten α-násobek prvního. Při násobení zprava to dopadne stejně, jen místo řádků matice $\mathbf{A}$ se odpovídajícím způsobem mění její sloupce.

3.93.[3] **Řešení.**

→ (a) Ve výsledném součinu se prohodí také i-tý řádek s j-tým,

→ (b) Ve výsledném součinu se také i-tý řádek pronásobí konstantou α,

→ (c) Ve výsledném součinu se také přičte α-násobek i-tého řádku k j-tému,

→ (d) Ve výsledném součinu se prohodí také prohodí i-tý sloupec s j-tým,

→ (e) Ve výsledném součinu se také i-tý sloupec pronásobí konstantou α,

→ (f) Ve výsledném součinu se také přičte α-násobek i-tého sloupce k j-tému.

3.94.[4] **Řešení.**

→ (a) $\mathbf{X} = \frac{1}{2}\mathbf{B} - \frac{3}{2}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & -2 \\ -1/2 & -1/2 & 2 \\ -1 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}$,

→ (b) $(\mathbf{A}^2 - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{B}$, tj. $\mathbf{X} = (\mathbf{A}^2 - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 4 & 9/2 & 13/2 \\ -1 & -1/4 & -5/4 \end{pmatrix}$,

→ (c) $\mathbf{X}(\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}) = \mathbf{B}$, tj. $\mathbf{X} = \mathbf{B}(\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3/4 & 13/4 & -5/4 \end{pmatrix}$,

→ (d) $\mathbf{X} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 160 & 600 & -392 \\ -80 & -272 & 152 \\ -44 & -188 & 148 \end{pmatrix}$,

→ (e) $(\mathbf{E} - \mathbf{B})\mathbf{X} = \mathbf{A}$, tj. $\mathbf{X} = (\mathbf{E} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 4/3 \\ -1/3 & 1/3 & -4/3 \\ 1/6 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$,

→ (f) $\mathbf{X}(\mathbf{E} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}$, tj. $\mathbf{X} = \mathbf{A}(\mathbf{E} - \mathbf{B})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$,

→ (g) $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{X} = 2\mathbf{A}$, tj. $\mathbf{X} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^{-1}(2\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3.96.[3] **Řešení.**

→ (a) $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$. Indukce. krok 1: pro $n = 1$ je zřejmě splněno. Krok 2: předpokládám $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$ a dokážu, že $\mathbf{A}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n+1)a & 1 \end{pmatrix}$. Je $\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n+1)a & 1 \end{pmatrix}$.

→ (b) $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$,

→ (c) v tomto případě $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$, takže $\mathbf{A}^{2k} = \mathbf{E}$, $\mathbf{A}^{2k+1} = \mathbf{A}$ pro všechna $k \in \mathbf{N}$,

→ (d) $\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4^n \end{pmatrix}$,

→ (e) $\begin{pmatrix} 1 & ua & va^2 & wa^3 \\ 0 & 1 & ua & va^2 \\ 0 & 0 & 1 & ua \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, kde $u = \binom{n}{1} = n$, $v = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2(n-2)!}$, $w = \binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!}$, když $n = 2$, pak $w = 0$.

3.97.[3] **Řešení.** Krok 1: pro $n = 1$ rovnost zřejmě platí. Krok 2: Předpokládám, že platí rovnost pro n a dokážu ji pro $n + 1$. Je $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(n+1)\varphi & -\sin(n+1)\varphi \\ \sin(n+1)\varphi & \cos(n+1)\varphi \end{pmatrix}$. V důkazu byly použity součtové vzorečky pro funkce sin a cos.

3.98.[4] **Řešení.** Je $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$, tj. $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^5 = \mathbf{A}^7 = \mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^6 = \mathbf{E}$, takže $\mathbf{C} = \mathbf{B} + 3\mathbf{E} + 4\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 4\alpha \\ 0 & 7 & 4\alpha \\ -\alpha & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Pro $\alpha = \pm 2$ je $\operatorname{hod}\mathbf{C} = 2$. Pro $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{2, -2\}$ je $\operatorname{hod}\mathbf{C} = 3$.

3.99.[2] **Řešení.** Je-li $\mathbf{A}$ typu (m, n), musí být $\mathbf{B}$ typu (n, m), jinak by uvedené součiny nebylyu definovány. $\mathbf{AB}$ je pak typu (m, m) a $\mathbf{BA}$ je typu (n, n). Označím $\mathbf{A} = (a_{i,j})$, $\mathbf{B} = (b_{l,k})$, kde $i, k \in \{1, \ldots, m\}$ a $j, l \in \{1, \ldots, n\}$. Nechť dále $\mathbf{C} = \mathbf{AB} = (c_{i,k})$ a $\mathbf{D} = \mathbf{BA} = (d_{l,j})$. Je $c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k}$, takže stopa $\mathbf{C}$ je rovna $\sum_{k=1}^{m} c_{k,k} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} b_{j,k}$. Protože $d_{j,l} = \sum_{k=1}^{m} b_{j,k} a_{k,l}$, je stopa $\mathbf{D}$ rovna $\sum_{j=1}^{n} d_{j,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_{j,k} a_{k,j}$. Nyní stačí využít toho, že $a_{k,j} b_{j,k} = b_{j,k} a_{k,j}$ a prohodit pořadí sum (o prohození sum viz též důkaz věty 3.38).

3.100.[3] **Řešení.** Protože $\mathbf{AB}$ a $\mathbf{BA}$ mají stejnou stopu, je stopa matice $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ nulová. Přitom stopa matice $\mathbf{E}$ je rovna n (počtu řádků matice), takže není nulová.

3.101.[3] **Řešení.** Nechť $\mathbf{B}$ je typu (m, n), pak $\mathbf{B}^T$ je typu (n, m). Označím $\mathbf{B} = (b_{i,j})$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dále označím $\mathbf{C} = \mathbf{BB}^T = (c_{i,k})$. Je $c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} b_{k,j}$, takže $c_{k,i} = \sum_{j=1}^{n} b_{j,j} b_{i,j}$. Protože $c_{i,k} = c_{k,i}$, je matice $\mathbf{C}$ symetrická.

Symetrické matice stejného typu tvoří lineární prostor, protože součet symetrických matic je symetrická matice a α-násobek symetrické matice je symetrická matice.

3.102.[3] **Řešení.**

→ (a) Protože vektory z M_1 jsou lineárními kombinacemi vektorů z M_2, je $\langle M_1 \rangle \subseteq \langle M_2 \rangle$. Protože vektory z M_2 jsou lineárními kombinacemi vektorů z M_1, je $\langle M_2 \rangle \subseteq \langle M_1 \rangle$. Takže $\langle M_1 \rangle = \langle M_2 \rangle$. Obráceně: z $\langle M_1 \rangle = \langle M_2 \rangle$ plyne, že vektory z M_1 jsou lineárními kombinacemi vektorů z M_2 a naopak.

→ (b) Nechť $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$. Z věty 3.13 plyne, že $\langle M_1 \rangle = \langle M_2 \rangle$. Obráceně: je-li vektor lineární kombinací řádků matice $\mathbf{A}$, pak lze vytvořit matici B, pro kterou je $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, a přitom $\mathbf{B}$ uvedený vektor obsahuje: přidáme nulový řádek a k němu přičteme potřebnou lineární kombinaci ostatních řádků.

→ (c) Je-li $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, pak podle věty 3.17 je $\operatorname{hod} \mathbf{A} = \operatorname{hod} \mathbf{B}$. Protože $\langle M_1 \rangle = \langle M_2 \rangle$, musí $\langle M_1 \cup M_2 \rangle = \langle M_1 \rangle$, takže také $\operatorname{hod} \mathbf{A} = \operatorname{hod} \mathbf{C}$. Nechť nyní $\operatorname{hod} \mathbf{A} = \operatorname{hod} \mathbf{B} = \operatorname{hod} \mathbf{C}$. Protože $\operatorname{hod} \mathbf{C} = \operatorname{hod} \mathbf{A}$, všechny řádky matice $\mathbf{B}$ jsou lineárními kombinacemi řádků matice $\mathbf{A}$. Protože $\operatorname{hod} \mathbf{C} = \operatorname{hod} \mathbf{B}$, všechny řádky matice $\mathbf{A}$ jsou lineárními kombinacemi řádků matice $\mathbf{B}$.

→ (d) Je-li $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, pak podle věty 3.55 existuje $\mathbf{P}$ požadovaných vlastností. Obráceně, existuje-li regulární $\mathbf{P}$, že $\mathbf{A} = \mathbf{PB}$, pak podle věty 3.60 je $\operatorname{hod} \mathbf{A} = \operatorname{hod} \mathbf{B}$. Také matice $\operatorname{diag}(\mathbf{E}, \mathbf{P})$ je regulární, takže $\operatorname{hod} \mathbf{B} = \operatorname{hod} \binom{\mathbf{B}}{\mathbf{B}} = \operatorname{hod} \operatorname{diag}(\mathbf{E}, \mathbf{P}) \binom{\mathbf{B}}{\mathbf{B}} = \operatorname{hod} \binom{\mathbf{B}}{\mathbf{PB}} = \operatorname{hod} \binom{\mathbf{B}}{\mathbf{A}} = \operatorname{hod} \mathbf{C}$. Podle (c) z toho plyne, že $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

→ (e) M_1 a M_2 jsou dvě báze stejného lineárního podprostoru $\langle M_1 \rangle = \langle M_2 \rangle$. Podle věty 2.59 musí $k = m$.

4.42.[4] **Řešení.**

→ (a) sudá, inverze jsou: $(3, 2)$, $(4, 2)$, $(6, 2)$, $(6, 5)$.

→ (b) lichá, inverze jsou: $(*, 1)$.

→ (c) lichá, $(6, *)$: 5 inverzí, $(5, *)$: 4 inverze, $(4, *)$: 3 inverze, $(3, *)$: 2 inverze, $(2, 1)$: 1 inverze.

→ (d) 1 inverze $(2, *)$, 2 inverze $(4, *)$, …, n inverzí $(2n, *)$, celkem $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ inverzí. Permutace je tedy pro $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ postupně lichá, lichá, sudá, sudá, lichá, lichá, atd. neboli je-li zbytek po dělení čísla n čtyřmi 1 nebo 2, je premutace lichá, a pro ostatní případy sudá.

4.43.[3] **Řešení.** Maximální počet inverzí má permutace $(n, n-1, \ldots, 2, 1)$. Celkový počet inverzí této permutace je $(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{(n-1)n}{2}$.

4.44.[2] **Řešení.**

→ (a) $(1, 4, 6, 5, 3, 2)$. Podrobněji viz b).

→ (b) Permutace pro větší názornost zapíšu ve dvouřádkové notaci, tj. $\binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6}{1\ 3\ 4\ 6\ 2\ 5} \circ \binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6}{2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 1}$. Čísla na prvním řádku jsou permutací zobrazena na čísla na druhém řádku. Skládání zobrazení $\circ$ je definováno „zprava doleva“, tj. nejprve provedu zobrazení podle pravé parmutace a pak podle levé. Jednotlivá čísla se permutacemi zobrazují takto: $1 \to 2 \to 3$, $2 \to 3 \to 4$, $3 \to 4 \to 6$, $4 \to 5 \to 2$, $5 \to 6 \to 5$, $6 \to 1 \to 1$. Výsledná permutace tedy je $(3, 4, 6, 2, 5, 1)$.

→ (c) $(2, 4, 5, 1, 3, 6)$.

4.45.[3] **Řešení.** (a) $(1, 5, 2, 3, 6, 4)$, (b) $(6, 1, 2, 3, 4, 5)$, (c) $(6, 5, 4, 3, 2, 1)$, (d) $(n+1, 1, n+2, 2, \ldots, 2n, n)$.

4.46.[3] **Řešení.** $a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4} - a_{1,1}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,4} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,2} + a_{1,1}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,3} - a_{1,1}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,3} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,4} + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,4} - a_{1,2}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,1} - a_{1,2}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,3} + a_{1,2}a_{2,4}a_{3,3}a_{4,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}a_{4,4} - a_{1,3}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,4} + a_{1,3}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,1} + a_{1,3}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,2} - a_{1,3}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,1} - a_{1,4}a_{2,1}a_{3,2}a_{4,3} + a_{1,4}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,2} + a_{1,4}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,3} - a_{1,4}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,1} - a_{1,4}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,2} + a_{1,4}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,1}$.

4.47.[3] **Řešení.**

→ (a) $a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4} - a_{1,1}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,4} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,2} + a_{1,1}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,3} - a_{1,1}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,3} = a_{1,1} \det \mathbf{A}_{1,1}$. (b) $-a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,4} + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,4} - a_{1,2}a_{2,3}a_{3,4}a_{4,1} - a_{1,2}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,3} + a_{1,2}a_{2,4}a_{3,3}a_{4,1} = -a_{1,2} \det \mathbf{A}_{1,2}$. (c) $a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}a_{4,4} - a_{1,3}a_{2,1}a_{3,4}a_{4,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,4} + a_{1,3}a_{2,2}a_{3,4}a_{4,1} + a_{1,3}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,2} - a_{1,3}a_{2,4}a_{3,2}a_{4,1} = a_{1,3} \det \mathbf{A}_{1,3}$. (d) $-a_{1,4}a_{2,1}a_{3,2}a_{4,3} + a_{1,4}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,2} + a_{1,4}a_{2,2}a_{3,1}a_{4,3} - a_{1,4}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,1} - a_{1,4}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,2} + a_{1,4}a_{2,3}a_{3,2}a_{4,1} = -a_{1,4} \det \mathbf{A}_{1,4}$.

4.48.[4] **Řešení.**

→ (a) Sčítanec odpovídá permutaci $(2, 5, 1, 3, 6, 4)$, ta má 5 inverzí, znaménko $-$.

→ (b) Sčítanec odpovídá permutaci $(5, 1, 2, 3, 4, 6)$, ta má 4 inverze, znaménko $+$.

→ (c) Nejedná se o sčítanec z definice determinantu.

→ (d) Jsou zapsány dva sčítance (viz a,b), celkem je sčítaců $6! = 720$, takže chybí ještě napsat 718 sčítanců.

4.49.[4] **Řešení.** Daná funkce je polynomem v proměnné x, protože podle definice determinantu je $p(x)$ rovno součtu součinů různě vybíraných prvků dané matice. Součinem vybraných prvků získáme funkci tvaru cx^k a součtem takových funkcí je obecně polynom. V součinech se vyskytují vždy 4 prvky matice, takže $k \le 4$ a polynom musí být nejvýše čtvrtého stupně.

Podle definice determinantu vyberu všechny takové sčítance, které jsou tvaru cx^4, jejich součtem odhalím koeficient a_4. Všechny prvky v součinu musejí obsahovat proměnnou x. V prvním řádku je tedy možné vzít prvek jen z prvního sloupce a ve třetím řádku ze třetího a ve čtvrtém z druhého sloupce. Tím jednoznačně vychází, že z druhého řádku je možné vzít prvek jen ze čtvrtého sloupce. Součin $x(3x)x(2x) = 6x^4$ odpovídá permutaci $(1, 4, 3, 2)$, která je lichá, takže $a_4 = -6$. Dále vyberu sčítance, které mají v součinu třikrát proměnou x. Kdbych z prvního řádku vybral jiný než první prvek, pak musím v některém z ostatních řádků použít první sloupec a tím mám součin už dvou konstant. Ze zbylého součinu dosáhnu nejvýše na druhou mocninu x, ovšem já potřebuji x^3. Takže z prvního řádku musím vybrat první prvek. Mocninu x^3 obsahují jen součiny odpovídající následujícím permutacím: $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 3, 4, 2)$, obě jsou sudé, takže $2x^3 + 2x^3 = 4x^3$, $a_3 = 4$.

4.50.[5] **Řešení.** $p(x) = (a - x)(c - x) - b^2 = x^2 - (a + c)x + ac - b^2$. Diskriminant je: $(a + c)^2 - 4ac + 4b^2 = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^{=}a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2 = (a - c)^2 + 4b^2 \ge 0$.

4.51.[3] **Řešení.**

→ (a) $p(x) = 0$, jen pokud součin prvků na hlavní diagonále je nulový, tj. $x = 3$ nebo $x = 5$ nebo $x = 7$ nebo $x = 9$.

→ (b) $p(x) = 0$, jen pokud aspoň jeden z prvků obsahující proměnou x je roven jedné, takže $x = 2$ nebo $x = 3$ nebo $x = 4$ nebo $x = 5$.

→ (c) Pro $x_i = a_i$ je poslední řádek roven i-tému, takže řádky jsou LZ a $p(x) = 0$. Protože je prvních $n - 1$ řádků LN, jsou všechna a_i navzájem různá, takže jsem už našel $n - 1$ kořenů polynomu p. Z definice determinantu plyne, že tento polynom je stupně nejvýše $n - 1$, takže jsem už našel všechny jeho kořeny.

4.52.[5] **Řešení.** (a) -2, (b) $ad - bc$, (c) 2, (d) 1, (e) 6, (f) 0, (g) 1, (h) -1, (i) 1, (j) -1, (k) 4, (l) 1, (m) 1.

Třeba inverzní matici k (e) budu počítat metodou doplňků. Jednotlivé subdeterminanty jsou $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$, $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3$, $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6$. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2$, $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -4$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1$, $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -8$, Matice doplňků tedy je $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -8 \end{pmatrix}$ a inverzní matice je transponovaná matice doplňků dělená determinantem původní matice: $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -8 \end{pmatrix}$.

4.53.[4] **Řešení.** (a) $\alpha^2 + \alpha - 1$, (b) $\alpha^2 - 2\alpha + 2$, (e) $(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)(\alpha - 4)(\alpha - 5)$, (g) 0. U případů a), b), e) je hodnost minimální tehdy, když je determinant dané matice nulový. U případu g) minimální hodnost za použití determinantu neodhalím, protože determinat je nulový pro všechna α.

4.54.[3] **Řešení.** Vektory zapíšeme do řádků matice $\mathbf{A}$. Protože je dáno n vektorů z $\mathbf{R}^n$, je $\mathbf{A}$ čtvercová matice. Vektory jsou lineárně závislé právě tehdy, když $\det \mathbf{A} = 0$. Viz větu 4.27 a metodu ze cvičení 3.71.

4.55.[5] **Řešení.** (a) 1, (b) -7, (c) -1, (d) 0, (e) 365, (f) $3abc - (a^3 + b^3 + c^3)$, (g) 0, (h) $2a^3 - a^2(u + v + w) + uvw$, (i) $a^6 - 2a^3 + 1$.

4.56.[4] **Řešení.** $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

4.57.[5] **Řešení.** Za výsledky jsou uvedeny náměty, jak se dají determinanty počítat. Není to jediná cesta k výsledku, můžete samozřejmě počítat i jinak (a možná účelněji).

→ (a) $(a - b)(a - c)(c - b)$: první sloupec odečíst od druhého a třetího,

→ (b) 0: druhý a třetí sloupec odečíst od prvního,
→ (c) 0: první řádek odečíst od druhého a třetího, pak rozvoj podle třetího sloupce,
→ (d) $(a-b)(a-c)(c-b)$: jako c), rozvoj podle prvního sloupce,
→ (e) $a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$: jako d),
→ (f) 6: první řádek odečíst od ostatních,
→ (g) 0: k-násobek prvního sloupce odečíst od druhého ($k=2$), třetího ($k=3$) a čtvrtého ($k=4$), pak rozvoj podle prvního řádku,
→ (h) $2a-12b-4c+6d$: rozvoj podle posledního řádku, pak Sarrusovo pravidlo,
→ (i) 16: půlnásobek druhého sloupce odečíst od posledního, pak rozvoj podle posledního sloupce,
→ (j) -324, (k) 100,
→ (l) $abcd$: rozvoj dle posledního řádku, pak dle třetího sloupce,
→ (m) $abcde$: rozvoj dle třetího řádku, pak dle čtvrtého sloupce, pak dle prvního sloupce,
→ (n) $a^3(a+4)$: první řádek odečíst od ostatních, pak k prvnímu sloupci přičíst všechny ostatní,
→ (o) 0: druhý řádek odečíst od třetího a čtvrtého, pak rozvoj dle prvního sloupce, rozdíly kvadrátů zapsat jako součin podle vzorce $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ a vytknout společné činitele z řádků,
→ (p) $abcd-abc+ab-a+1$: rozvoj dle prvního řádku,
→ (q) 12: druhý sloupce odečíst od čtvrtého a šestého, pak rozvoj dle druhého řádku. Podobně vyrobit nuly v (původně) čtvrtém řádku a rozvoj dle něj,
→ (r) 0: nenuloví sčítanci z definice determinantu neexistují, věž na prvním řádku může ležet v prvním nebo druhém sloupci a na druhém řádku v druhém nebo prvním sloupci, věž z třetího řádku ale pak nemůže stát na nenulovém prvku,
→ (s) $32147+56831$: odečíst druhý řádek od prvního, přímé použití křížového pravidla není účelné.

4.59.[3] **Řešení.** Vynásobím první sloupec stem a druhý desíti a toto přičtu ke sloupci třetímu. Takto pozměněná matice má podle věty 4.21 stejný determinant, z posledního sloupce je pak možné vytknout číslo 13: $\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}3&3&338\\7&4&741\\8&7&871\end{vmatrix}=13\begin{vmatrix}3&3&a\\7&4&b\\8&7&c\end{vmatrix}=13d$, přitom čísla a,b,c,d jsou celá.

4.60.[4] **Řešení.** Využiji větu 4.35. (a) $\det\mathbf{A}^{-1}=1/\det\mathbf{A}=1/3$, (b) $\det\mathbf{A}^2=(\det\mathbf{A})^2=9$, (c) $\det\mathbf{AB}=(\det\mathbf{A})(\det\mathbf{B})=-21$, (d) $\det\mathbf{ABA}=(\det\mathbf{A})^2(\det\mathbf{B})=-189$, (e) $\det\mathbf{AB}^{-1}=(\det\mathbf{A})/(\det\mathbf{B})=-3/7$, (f) $\det\mathbf{AB}^3=(\det\mathbf{A})(\det\mathbf{B})^3=-1029$.

4.61.[3] **Řešení.** Jsou-li funkce lin. závislé, pak podle věty 2.21 existuje jedna (např f_r), která je lineární kombinací ostatních. Stejná lineární kombinace derivací těchto funkcí dá f_r' a podobně pro derivace vyšších řádů. Takže r-tý řádek matice $\mathbf{W}(x)$ je lineární kombinací ostatních řádků pro všechna $x\in\mathbf{R}$. Podle věty 2.21 to znamená, že řádky matice $\mathbf{W}(x)$ jsou lineárně závislé pro všechna $x\in\mathbf{R}$, takže $\det\mathbf{W}(x)$ je roven nule pro všechna $x\in\mathbf{R}$.

4.62.[3] **Řešení.** Kdyby byly funkce $f_1,f_2,\dots,f_n$ lineárně závislé, pak podle cvičení 4.61 je $\mathbf{W}(x)=0$ pro všechna $x\in\mathbf{R}$ a to je ve sporu s předpokladem, že existuje $x\in\mathbf{R}$ takové, že $\mathbf{W}(x)\neq 0$.

4.63.[3] **Řešení.** $f_1'(x)=3x^2$, $f_2'(x)=3x^2\operatorname{sgn}x$, $\mathbf{W}(x)=\begin{vmatrix}x^3&3x^2\\(\operatorname{sgn}x)\,x^3&(\operatorname{sgn}x)\,3x^2\end{vmatrix}=\operatorname{sgn}x\begin{vmatrix}x^3&3x^2\\x^3&3x^2\end{vmatrix}=0$ pro všechna $x\in\mathbf{R}$. Funkce f_1 a f_2 přitom zjevně nejsou lineárně závislé, protože jedna není násobkem druhé. Příklad ilustruje obě tvrzení, a) i b).

4.66.[2] **Řešení.**
→ (a) D_n je geometrická posloupnost s kvocientem a, takže $D_n=D_1a^{n-1}$.
→ (b) Ověříme nejprve, že $(1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\alpha^4,\dots),(0,1,2\alpha,3\alpha^2,4\alpha^3,\dots)$ tvoří bázi lineárního podprostoru P posloupností tvaru $D_n=a\,D_{n-1}+b\,D_{n-2}$. Protože x^2-ax-b má dvojnásobný kořen α, je $a^2+4b=0$ a $\alpha=a/2$. To znamená, že $a=2\alpha$ a $b=-\alpha^2$, takže pro posloupnosti z P platí $D_n=2\alpha D_{n-1}-\alpha^2D_{n-2}$. Obě posloupnosti z navržené báze tomuto vztahu zřejmě vyhovují. Např, pro druhou posloupnost je $(n-1)\alpha^{n-2}=2\alpha(n-2)\alpha^{n-3}-\alpha^2(n-3)\alpha^{n-4}$. Po vykrácení α^{n-2} zůstává $n-1=2(n-2)-(n-3)$, což zjevně platí. Obě posloupnosti tedy leží v lineární podprostoru P, jsou lineárně nezávislé a $\dim P=2$. Takže máme bázi. Jakákoli posloupnost $(D_i)\in P$ je lineární kombinací báze, koeficeinety této kombinace uznačme u,v. Je $u=D_1$, $v=D_2-\alpha D_1$ a $D_n=u\,\alpha^{n-1}+v\,(n-1)\,\alpha^{n-2}$. Všimněme se, že druhá posloupnost v bázi je derivací první podle α. Souvisí to s tím, že pokud $p(x)=x^2-ax-b$ má dvojnásobný kořen α, pak nejen $p(\alpha)=0$, ale i $p'(\alpha)=0$ (viz cvičení 11.99).
→ (c) Jsou-li některá z čísel a,b,D_1,D_2 komplexní, pak nám nevadí, že vzorec z věty 4.65 dává komplexní výsledky a že pracujeme s kompexními kořeny α,β. Jsou-li čísla a,b,D_1,D_2 reálná a α je komplexní kořen, pak $\beta=\overline{\alpha}$ je také kořen a s tímto značením můžeme použít vzorce z věty 4.65. Snadno se dá

ukázat, že D_n vychází jako reálné číslo, ačkoli se ve vzorci pracuje s kompexními čísly α, β. Kdybychom chtěli navrhnout jen reálné vzorce, pak sečteme bázové posloupnosti a vydělíme dvěma a odečteme bázové posloupnosti a vydělíme dvěma i. Dostáváme nové dvě lineárně nezávislé posloupnosti, jedna obsahuje reálné části z α^n a druhá imaginární části z α^n. Ty lze použít pro sestavení reálné lineární kombinace na základě znalostí čísel D_1, D_2. Dále pro vyjádření reálné resp. imaginární části z α^n je možné použít Moivrovu větu (viz například příklad 11.48). Při $\alpha = |\alpha|\, e^{i\varphi} = |\alpha|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ dostáváme

$$D_n = u\,\mathrm{Re}(\alpha^{n-1}) + v\,\mathrm{Im}(\alpha^{n-1}) = D_1|\alpha|^{n-1}\cos(n\varphi-\varphi) + \frac{D_2 - D_1|\alpha|\cos\varphi}{|\alpha|\sin\varphi}\,|\alpha|^{n-1}\sin(n\varphi-\varphi).$$

Ten vzoreček vypadá dost odporně. Asi je lepší zůstat u vzorečku z věty 4.65 a nebát se použít přechodně malé měkké i.

4.67.[3] **Řešení.**

→ (a) Po odečtení prvního řádku od ostatních je $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$.

→ (b) Po odečtení prvního řádku od ostatních mám snado patrný výsledek: $(n-1)!$.

→ (c) $\begin{vmatrix} n & n & n & \dots & n & n \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 1-n & 2-n & 3-n & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}n \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1-n & 2-n & 3-n & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(-1)^{n-1}n = n$. Nejprve byl odečten první řádek od ostatních a poté proveden rozvoj determinantu podle posledního sloupce.

→ (d) Odečtením posledního řádku od ostatních: $\begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}n!$

→ (e) Přičením druhého, třetího, …, n-tého sloupce k prvnímu: $\begin{vmatrix} a_1+a_2+\dots+a_n & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i$.

→ (f) Odečtením prvního řádku od ostatních: $\begin{vmatrix} c_1 & a & a & \dots & a \\ a-c_1 & c_2-a & 0 & \dots & 0 \\ a-c_1 & 0 & c_3-a & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a-c_1 & 0 & 0 & \dots & c_n-a \end{vmatrix}$, vytknu $c_i - a$ z i-tého sloupce (pro všechny sloupce): $(c_1-a)(c_2-a)\cdots(c_n-a)\begin{vmatrix} c_1/(c_1-a) & a/(c_2-a) & a/(c_3-a) & \dots & a/(c_n-a) \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$ a nyní podobně jako v případě e) přičtu všechny sloupce k prvnímu, dostávám nuly v prvním sloupci (pod prvním prvkem) a výsledná hodnota determinantu je $(c_1-a)(c_2-a)\cdots(c_n-a)\left(1 + \frac{a}{c_1-a} + \frac{a}{c_2-a} + \frac{a}{c_3-a} + \dots + \frac{a}{c_n-a}\right)$. Aby výsledek vypadal „symetricky“, využil jsem ještě rovnost $1 + \frac{a}{c_1-a} = \frac{c_1}{c_1-a}$. Zbývá vyšetřit případy, kdy se ve vzorci dělí nulou, a tudíž tento vzorec nelze použít. Je-li $c_1 = a$, pak už v prvním mezikroku dostávám matici, která má v prvním sloupci pod prvkem $c_1 = a$ nuly, takže výsledná hodnota determinantu je $a(c_2-a)(c_3-a)\cdots(c_n-a)$. Je-li $c_1 \neq a$, ale $c_i = a$, pak prohozením i-tého sloupce původní matice s prvním a následným prohozením i-tého řádku s prvním se převede problém na případ $c_1 = a$. Takže pokud existuje i takové, že $c_i = a$, pak hodnota determinantu je a krát součin všech $(c_j - a)$, $j \neq i$.

4.68.[1] **Řešení.**

→ (a) rozvoj podle prvního řádku vede na $D_n = 5D_{n-1} - 2\cdot 3\,D_{n-2}$, tj. máme rekuretní vzorec s odpovídajícím polynomem (podle věty 4.65) ve tvaru $x^2 - 5x + 6$, který má kořeny $\alpha = 3$, $\beta = 2$. Protože $D_1 = 5$ a $D_2 = 19$, jsou koeficinety lineární kombinace bázických posloupností (viz důkaz věty 4.65) rovny $u = 9$ a $v = -4$. Vzorec na přímý výpočet D_n je $D_n = 9\cdot 3^{n-1} - 4\cdot 2^{n-1}$.

→ (b) rozvoj podle prvního řádku vede na $D_n = 4D_{n-1} - 4D_{n-2}$, což odpovídá polynomu $x^2 - 4x + 4$, který má dvojnásobný kořen 2. Je potřeba postupovat podle výsledku cvičení 4.66 případ b). Protože $D_1 = 4$ a $D_2 = 12$, jsou koeficienty lineární kombinace bázických posloupností rovny $u = 4$, $v = 4$ a vzorec pro přímý výpočet determinantu je $D_n = 4\cdot 2^{n-1} + 4\,(n-1)\,2^{n-2}$.

→ (c) rozvoj podle prvního řádku vede na $D_n = 4D_{n-1} - 5D_{n-2}$, což odpovídá polynomu $x^2 - 4x + 5$, který má kořeny $2 \pm i$. Navážeme na výsledek cvičení 4.66, případ c). Nebudeme přecházet k reálným a imaginárním částem, zůstaneme při počítání s malým měkkým i. Protože $D_1 = 4$ a $D_2 = 11$, vycházejí koeficienty u bázických posloupností $u = 2 - 3i/2$, $v = 2 + 3i/2$. Vzorec pro přímý výpočet determinantu je $D_n = (2-3i/2)\,(2+i)^{n-1} + (2+3i/2)\,(2-i)^{n-1}$. Protože se sčítají v tomto vzorci komplexně sdružená čísla, vychází číslo reálné.

→ (d) rozvoj podle prvního řádku vede na $D_n = sD_{n-1} - pqD_{n-2}$, což odpovídá polynomu $x^2 - sx - pq$. Podle toho, zda $s^2 > 4pq$ nebo $s^2 = 4pq$ nebo $s^2 < 4pq$ použijeme výsledek věty 4.65 nebo výsledek cvičení 4.66 (případ b) nebo výsledek cvičení 4.66 (případ c).

4.69.[3] **Řešení.** Označím $\mathbf{V}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = D_n$. Determinant jako polynom v proměnné x_n má koeficienty, které lze teoreticky získat rozvojem tohoto determinantu podle posledního řádku. Koeficient u nejvyšší mocniny proměnné x_n^{n-1} je roven D_{n-1} (determinant matice, ve které je vynechán poslední řádek a poslední sloupec). Polynom tedy můžeme zapsat jako „D_{n-1} krát součin kořenových činitelů“. Podle výsledku cvičení 4.51 (případ c) jsou kořeny tohoto polynomu čísla $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Takže:
$\mathbf{V}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = D_{n-1}(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3) \cdots (x_n - x_{n-1}) =$
$D_{n-2}(x_{n-1} - x_1)(x_{n-1} - x_2)(x_{n-1} - x_3) \cdots (x_{n-1} - x_{n-2})(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3) \cdots (x_n - x_{n-1}) =$
$\cdots = \prod_{i>j\geq 1}^{n} (x_i - x_j)$, kde $\prod$ je symbol pro součin.

Poznámka: existuje několik dalších možností, jak spočítat Vandermontův determinant, ovšem zde uvedený postup převzatý z [21] je asi nejzajímavější.

4.70.[3] **Řešení.** Vyjdu z matice typu (5, 5), která má na hlavní diagonále jedničky, pod ní nuly a nad ní libovolná čísla. Determinant této matice je roven jedné. Dále provedu s touto maticí několik kroků Gaussovy eliminační metody, které nemění determinat (přičtení násobku libovolného řádku/sloupce k jinému) tak, abych odstranil jedničky z diagonály a nuly z místa pod diagonálou Výsledná matice bude mít stále determinant roven jedné.

5.44.[5] **Řešení.**
→ (a) hod $\mathbf{A} = 2$, hod$(\mathbf{A}|\boldsymbol{b}) = 3$, soustava nemá řešení,
→ (b) hod $\mathbf{A} = 2$, hod$(\mathbf{A}|\boldsymbol{b}) = 2$, soustava má řešení,
→ (c) hod $\mathbf{A} = 2$, hod$(\mathbf{A}|\boldsymbol{b}) = 2$, soustava má řešení,
→ (d) hod $\mathbf{A} = 2$, hod$(\mathbf{A}|\boldsymbol{b}) = 3$, soustava nemá řešení,
→ (e) hod $\mathbf{A} = 2$, hod$(\mathbf{A}|\boldsymbol{b}) = 3$, soustava nemá řešení.

5.45.[5] **Řešení.** Mezivýsledky po eliminaci matic uvedených soustav lze najít v řešení ke cvičení 5.50
→ (a) Báze: $\{(5, -2)\}$, dim = 1,
→ (b) báze není, dim = 0, soustava má pouze triviální řešení,
→ (c) báze: $\{(1, -2, 3)\}$, dim = 1,
→ (d) báze není, dim = 0, soustava má pouze triviální řešení,
→ (e) báze: $\{(13, 2, 7)\}$, dim = 1,
→ (f) báze není, dim = 0, soustava má pouze triviální řešení,
→ (g) báze: $\{(5, -7, 5, 6)\}$, dim = 1,
→ (h) báze: $\{(2, 1, 0, -1), (-25, 0, 9, 13)\}$, dim = 2,
→ (i) soustava je ekvivalentní se soustavou s maticí $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, za proměnné x_1, x_4, x_5, x_7 postupně dosadím $1, 0, 0, 0$; $0, 1, 0, 0$; $0, 0, 1, 0$; $0, 0, 0, 1$ a ostatní proměnné dopočítám z rovnic, dostávám bázi: $\{(1, -2, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 8, -3, 1, 0, 0, 0), (0, 6, -4, 0, 1, 2, 0), (0, 4, -1, 0, 0, -1, 1)\}$, dim = 4.

5.46.[5] **Řešení.**
→ (a) $(2, 1) + \langle(3, 2)\rangle$,
→ (b) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{array}\right)$, řešení: $\{(-3, 8)\}$,
→ (c) $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -2 \end{array}\right)$, řešení $(0, 2) + \langle(1, 2)\rangle$,
→ (d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$, řešení: $(3, 2, 0) + \langle(-1, 0, 1)\rangle$,
→ (e) $\det \mathbf{A} = 142$, $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 11 & -9 & -4 \\ 111 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2840$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 11 & -4 \\ 5 & 111 & 1 \end{vmatrix} = 710$, $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & -9 & 11 \\ 5 & 2 & 111 \end{vmatrix} = 142$,
řešení: $\frac{1}{142}(2840, 710, 142) = (20, 5, 1)$,
→ (f) $\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 1 & -3 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & -6 & 1 \\ 6 & 5 & -13 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 1 & -3 & -4 & 1 \\ 17 & 0 & -1 & -14 & 3 \\ -29 & 0 & 2 & 23 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 1 & -3 & -4 & 1 \\ 17 & 0 & -1 & -14 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & -5 & 2 \end{array}\right)$, řešení $\frac{1}{5}(2, 48, 19, 0) + \langle(1, 6, 3, 1)\rangle$,
→ (g) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -3 & -4 & 1 \\ 6 & -9 & 7 & 10 & 3 \\ 3 & -3 & 13 & 18 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 0 \end{array}\right)$, řešení: $(2, 1, 0, 0) + \langle(3, 2, 0, 0), (2, 1, 11, -8)\rangle$,
→ (h) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \\ 1 & -8 & -13 & 9 & -9 \\ 4 & -7 & -12 & 11 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 5 & 8 & -5 & 8 \end{array}\right)$, řešení: $(4, 0, 1, 0) + \langle(-1, 1, 0, 1), (-7, 0, 5, 8)\rangle$,

$\rightarrow$ (i) $\left(\begin{array}{ccccccc|c} 3 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 9 & 3 & 9 & 7 & 13 & -1 & 10 & 7 \\ 6 & 2 & 7 & 5 & 9 & 4 & 9 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 6 \\ 9 & 3 & 12 & 8 & 14 & 9 & 15 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} 3 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$, řešení: $(0,-10,0,3,0,0,1)+$
$+\langle(1,-3,0,0,0,0,0),(0,4,1,-3,0,0,0),(0,-2,0,-1,1,0,0),(2,1,0,0,0,1,-2)\rangle$.

5.47.[5] **Řešení.** (b) $\{(-1,1)\}$, (c) $(0,1,-1,0,0)+\langle(1,0,-2,0,0),(0,0,-1,1,0),(0,-1,-1,0,1)\rangle$.

5.48.[5] **Řešení.** $(2,0,0,0,0)+\langle(0,1,0,0,0),(-1,0,1,0,0),(2,0,0,1,0),(-3,0,0,0,1)\rangle$.

5.49.[5] **Řešení.**
$\rightarrow$ (b) $\det \mathbf{A} = 1$, $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$, $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8$, řešení: $(-3/1, 8/1)$,
$\rightarrow$ (e) řešeno přímo v úloze 5.46 Cramerovým pravidlem.

5.50.[3] **Řešení.** Symbolem $[a\leftrightarrow b]$ v některých řešeních zde označuji prohození a-tého sloupce s b-tým.
$\rightarrow$ (a) $\sim \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \end{pmatrix} = (\mathbf{E}_1|\mathbf{C})$, $(-\mathbf{C}^T|E_2) = \begin{pmatrix} -5/2 & 1 \end{pmatrix}$, to je jediný prvek hledané báze,
$\rightarrow$ (c) $\sim \begin{pmatrix} 9 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} [1\leftrightarrow 3] \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (\mathbf{E}_1|\mathbf{C})$, $(-\mathbf{C}^T|E_2) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} [1\leftrightarrow 3] \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,
$\rightarrow$ (e) $\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 7 & 0 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2/7 \\ 1 & 0 & -13/7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13/7 \\ 0 & 1 & -2/7 \end{pmatrix} = (\mathbf{E}_1|\mathbf{C})$, $(-\mathbf{C}^T|E_2) = \begin{pmatrix} 13/7 & 2/7 & 1 \end{pmatrix}$,
$\rightarrow$ (g) $\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5/6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5/6 \\ 0 & 1 & 0 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & -5/6 \end{pmatrix} = (\mathbf{E}_1|\mathbf{C})$, $(-\mathbf{C}^T|E_2) = \begin{pmatrix} 5/6 & -7/6 & 5/6 & 1 \end{pmatrix}$,
$\rightarrow$ (h) $\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 9 & -13 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/9 & 2 \\ 0 & 1 & -13/9 & 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{E}_1|\mathbf{C})$, $(-\mathbf{C}^T|E_2) = \begin{pmatrix} 1/9 & 13/9 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, to jsou dva prvky báze,
$\rightarrow$ (i) $\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -8 & -6 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} [1\leftrightarrow 2, 2\leftrightarrow 3, 3\leftrightarrow 6] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 & -6 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{E}_1|\mathbf{C})$,
$(-\mathbf{C}^T|\mathbf{E}_2) = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [3\leftrightarrow 6, 2\leftrightarrow 3, 1\leftrightarrow 2] \begin{pmatrix} 0 & 8 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, to jsou hledané 4 prvky báze.

5.51.[4] **Řešení.**
$\rightarrow$ (a) $x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 11 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -36/(-12) = 3$, (c) $x_2 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 \\ 7 & 16 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 7 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -49/(-49) = 1$,
$\rightarrow$ (b) $x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0/(-1) = 0$, (d) $x_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 16 & 1 & -9 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 16 & 15 & -9 & 4 \\ 5 & -6 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 8/(-100) = -0{,}08$,
$\rightarrow$ (e) $x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 8/4 = 2$, (f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, soustava nemá jediné řešení (přesněji: buď nemá žádné řešení nebo jich má nekonečně mnoho). Nelze použít Cramerovo pravidlo.

5.52.[5] **Řešení.**
$\rightarrow$ (a) $\left(\begin{array}{cc|c} p & 1 & p \\ 1 & p & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} p & 1 & p \\ 1-p^2 & 0 & 1-p^2 \end{array}\right)$, $p = 1$: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$, řešení $(1,0)+\langle(1,-1)\rangle$, $p=-1$: $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$, řešení $(1,0)+\langle(1,1)\rangle$, $p \neq \pm 1$: $\left(\begin{array}{cc|c} p & 1 & p \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$, řešení $(1,0)$.
$\rightarrow$ (b) $\det \mathbf{A} = (p-17)(p-2)$, $p=17$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & -5 & 0 \\ 2 & -17 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 17 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, nemá řešení,
$p=2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & -5 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right)$, řešení $\left(\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)+\langle(1,3,-4)\rangle$,
$p \notin \{17,2\}$: jedno řešení $\left(\frac{26}{17-p}, \frac{3}{17-p}, \frac{1}{17-p}\right)$,
$\rightarrow$ (c) $\det \mathbf{A} = -(p-1)^2(p+2)$, $p=1$: $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$, řešení $(1,0,0)+\langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle$,
$p=-2$: $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$, řešení $(0,0,1)+\langle(1,1,1)\rangle$, $p \notin \{1,-2\}$: jediné řešení $(0,0,1)$.
$\rightarrow$ (d) $\det \mathbf{A} = (p-1)^2(p+2)$, $p \in \{1,-2\}$: nemá řešení, $p \notin \{1,-2\}$: řešení $\left(\frac{p^2-3p-1}{(p+2)(1-p)}, \frac{p^2-p+3}{(p+2)(1-p)}, \frac{p^2-1}{p+2}\right)$,
$\rightarrow$ (e) $\det \mathbf{A} = 0$, $\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & p & -1 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4p+1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & p & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, kvůli předposlední rovnici nemůže $x_2 = 0$, takže kvůli poslední rovnici musí $p = 0$, jinak soustava nemá řešení,
$p=0$: $\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$, řešení $(0,8,0,-3)+\langle(1,0,2,1)\rangle$,
$\rightarrow$ (f) $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & -10 & -2 \\ 0 & p-5 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $p=5$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & -10 & -2 \end{array}\right)$, řešení $\left(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)+\langle(-9,5,2)\rangle$,
$p \neq 5$: jediné řešení $\left(\frac{28}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$,

→ (g) označím $x = x_4$ a přičtu číslo 4 ke každé rovnici, $\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & p-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p-5 & -4 \end{array}\right)$, $p = 5$: nemá řešení,
$p \neq 5$: řešení $\left(\frac{3p+1}{5-p}, \frac{4(p-2)}{p-5}, 0, \frac{4}{5-p}\right) + \langle(-4, 2, 1, 0)\rangle$,
→ (h) $\det \mathbf{A} = (p-1)^2$, $p = 1$: $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$, řešení $(1, 0, 0) + \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle$,
$p \neq 1$: jedniné řešení $(-1, 1, 1)$,
→ (i) $\det \mathbf{A} = (p-1)^3(p+3)$, $p = 1$: $\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$, řešení $(1, 0, 0, 0) + \langle(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\rangle$,
$p = -3$: $\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, nemá řešení, $p \notin \{1, -3\}$: jedniné řešení $\frac{1}{p+3}(1, 1, 1, 1)$,
→ (j) $\det \mathbf{A} = p^2(p+3)$, $p = 0$: $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$, řešení $\langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle$,
$p = -3$: $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$, řešení $\langle(1, 1, 1)\rangle$, $p \notin \{0, -3\}$: jediné řešení $(2 - p^2, 2p - 1, p^3 + 2p^2 - p - 1)$.

5.53.[4] **Řešení.**
→ (a) $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & q-14 \\ p+1 & 0 & 0 & 3q-33 \end{array}\right)$, $p = -1, q \neq 11$: nemá řešení, $p = -1, q = 11$: $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right)$, řešení $(0, 3, 4) + \langle(1, 1, 1)\rangle$, $p \neq -1$: jediné řešení $\left(\frac{3(q-11)}{p+1}, \frac{3(q-11)}{p+1} - q + 14, \frac{3(q-11)}{p+1} + q - 7\right)$,
→ (b) $\det \mathbf{A} = (p-1)^2(p+2)$, $p = 1$: $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 \end{array}\right)$, $p = 1, q \neq 1$: nemá řešení, $p = 1, q = 1$: řešení $(1, 0, 0) + \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle$, $p = -2$: $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & q-1 \end{array}\right)$, $p = -2, q \neq 1$: nemá řešení,
$p = -2, q = 1$: řešení $(0, 1, 0) + \langle(1, 1, 1)\rangle$, $p \notin \{1, -2\}$: jediné řešení $\left(\frac{1-q}{(p+2)(p-1)}, \frac{p^2+p-q-1}{(p+2)(p-1)}, \frac{(q-1)(p+1)}{(p+2)(p-1)}\right)$,
→ (c) $\det \mathbf{A} = pqr - p - q - r + 2$, $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 1 \\ 1-p & q-1 & 0 & 0 \\ 1-pr & 1-r & 0 & 1-r \end{array}\right) \sim [q \neq 1] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 1 \\ 1-p & q-1 & 0 & 0 \\ (1-pr)(1-q) & (1-r)(1-q) & 0 & (1-r)(1-q) \end{array}\right) \sim$
$\left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 1 \\ 1-p & q-1 & 0 & 0 \\ \det \mathbf{A} & 0 & 0 & (1-r)(1-q) \end{array}\right)$, v úpravě jsem předpokládal $q \neq 1$, případ $q = 1$ ponechám na později,
$q \neq 1, \det \mathbf{A} \neq 0$: jediné řešení $\frac{1}{\det \mathbf{A}}\big((r-1)(q-1), (r-1)(p-1), (q-1)(p-1)\big)$,
$q \neq 1, r \neq 1, \det \mathbf{A} = 0$: nemá řešení,
$q \neq 1, r = 1, \det \mathbf{A} = 0$: $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 1 \\ 1-p & q-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$, řešení $(0, 0, 1) + \langle(q-1, p-1, 1-pq)\rangle$,
nyní případ $q = 1$ se všemi podpřípady: $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 1 \\ 1-pr & 1-r & 0 & 1-r \\ 1-p & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $p = q = r = 1$: $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$, řešení $(1, 0, 0) + \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle$, $q = 1, p = 1, r \neq 1$: $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$, řešení $(0, 1, 0) + \langle(-1, 1, 0)\rangle$,
$q = 1, p \neq 1, r = 1$: $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, řešení $(0, 1, 0) + \langle(0, 1, -1)\rangle$, $q = 1, p \neq 1, r \neq 1$: jediné řešení $(0, 1, 0)$,
→ (d) $\sim [p \neq 0] \sim \left(\begin{array}{cc|c} p & q & p \\ pq & p^2 & pq \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} p & q & p \\ 0 & p^2-q^2 & pq-p^2 \end{array}\right)$, $p \neq 0, p \neq q, p^2 - q^2 = 0$: nemá řešení,
$p \neq 0, p = q$: $\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$, řešení $(1, 0) + \langle(1, -1)\rangle$, $p \neq 0, p^2 - q^2 \neq 0$: jediné řešení $(1, 0)$,
$p = 0$: $\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & q & 0 \\ q & 0 & q \end{array}\right)$, $p = q = 0$ řešení $\mathbf{R}^2$, $p = 0, q \neq 0$: jedniné řešení $(1, 0)$.

5.54.[3] **Řešení.** Determinant soustavy je Vandermondův, takže je nenulový právě tehdy, když všechny parametry a_i jsou vzájemně různé. V tomto případě má soustava nenulové řešení.

5.55.[2] **Řešení.** Nechť $K = \{\boldsymbol{b}_{\alpha_1}, \boldsymbol{b}_{\alpha_2}, \ldots, \boldsymbol{b}_{\alpha_n}\}$, je nějaká konečná podmnožina množiny M. Položím jejich lineární kombinaci $x_1\boldsymbol{b}_{\alpha_1} + x_2\boldsymbol{b}_{\alpha_2} + \cdots + x_n\boldsymbol{b}_{\alpha_n}$ rovnu nulové posloupnosti. Zapíšu-li, co to znamená pro prvních n složek těchto posloupností, dostávám soustavu stejnou, jako ve cvičení 5.54. Protože jsou všechna α_i vzájemně různá (vybral jsem různé posloupnosti z množiny M), má tato soustava pouze triviální řešení, takže K je lineárně nezávislá množina vektorů. Protože K byla vybrána z množiny M libovolně, je také M lineárně nezávislá množina.

5.56.[2] **Řešení.** $x_1(\boldsymbol{b}_0 + \alpha_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_1^{n-1}\boldsymbol{b}_{n-1}) + x_2(\boldsymbol{b}_0 + \alpha_2\boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_2^{n-1}\boldsymbol{b}_{n-1}) + \cdots + x_n(\boldsymbol{b}_0 + \alpha_n\boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n^{n-1}\boldsymbol{b}_{n-1}) = \boldsymbol{o}$, takže $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\,\boldsymbol{b}_0 + (x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n)\,\boldsymbol{b}_1 + \cdots + (x_1\alpha_1^{n-1} + x_2\alpha_2^{n-1} + \cdots + x_n\alpha_n^{n-1})\,\boldsymbol{b}_{n-1} = \boldsymbol{o}$. Protože množina $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_{n-1}$ je lineárně nezávislá, musejí koeficienty její lineární kombinace být nulové, má-li se tato kombinace rovnat nulovému vektoru. Z toho vychází soustava rovnic jako ve cvičení 5.54. Protože α_i jsou vzájmeně různá, musí být $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, takže vektory z libovolné n-prvkové konečné podmnožiny množiny M jsou lineárně nezávislé.

5.58.[4] **Řešení.** Protože množina řešení homogenní soustavy je podprostorem. Poznámka 1.27 dokazuje, že takový podprostor, má-li nenulový prvek, musí mít nekonečně mnoho prvků.

5.59.[3] **Řešení.** Stačí prohodit význam pojmů „neznámé“ a „koeficienty soustavy“ a řešit příslušnou „duální“ soustavu homogenních rovnic. Přesněji: Do řádků matice $\mathbf{U}$ zapíšeme postupně složky vektorů $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k$. Hledaná soustava s neznámými koeficienty $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ splňuje $\mathbf{A}\mathbf{U}^T = \mathbf{O}$, kde $\mathbf{O}$ je nulová matice. Po použití vlastnosti (5) věty 3.38 máme $\mathbf{U}\mathbf{A}^T = \mathbf{O}^T$, takže k nalezení koeficientů matice $\mathbf{A}$ stačí řešit homogení soustavu rovnic $\mathbf{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. Složky každého bazického prvku řešení této soustavy odpovídají koeficientům jedné rovnice hledané soustavy $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.

5.60.[3] **Řešení.** Koeficienty přidružené homogenní soustavy najdeme způsobem popsaným v řešení cvičení 5.59. Pravou stranu zjistíme dosazením partikulárního řešení $\boldsymbol{v}$ do všech rovnic.

5.61.[4] **Řešení.**
→ (a) ano,
→ (b) ne (obaly se rovnají, rozdíl partikulárních řešení neleží v obalu),
→ (c) ano,
→ (d) ne (dimenze prvního lin. obalu je 3, zatímco dimenze druhého lin. obalu je 2),
→ (e) ano.

5.62.[3] **Řešení.**
→ (a) $a = \sqrt{2}, b = 1 - \sqrt{2}$, (b) $a = -1, b = 3$, (c) $a = 2, b = 3$, (d) $a = 6, b = 7$, (e) $a = 12, b = 7$.

5.63.[3] **Řešení.** Zapíši pro stručnost jen matice hledaných soustav.
→ (a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$, (b) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right)$, (c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$, (d) $\left(\begin{array}{cccc|c} -9 & 1 & 22 & 8 & 91 \end{array}\right)$, (e) $\left(\begin{array}{cccccc|c} -2 & 4 & 5 & 0 & -2 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 6 & 2 & 55 \end{array}\right)$.

5.64.[3] **Řešení.** Postup nalezení báze řešení například podle důkazu věty 5.13 zaručuje, že pokud koeficienty soustavy jsou celočíselné, pak jednotlivé složky báze jsou racionální čísla. Nechť $\boldsymbol{u}_i$ je prvek báze, který ve složkách obsahuje zlomky. Pak jej mohu nahradit vektorem $\boldsymbol{v}_i = k_i \boldsymbol{u}_i$, kde k_i je nejmenší společný násobek jmenovatelů všech zlomků ve složkách $\boldsymbol{u}_i$. Vektory $\boldsymbol{v}_i$ pak obsahují jen celočíselné složky. Důkaz, že $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m$ jsou lineárně nezávislé právě když jsou lineárně nezávislé $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m$ a mají společné lineární obaly si udělá laskavý čtenář sám.

5.65.[3] **Řešení.** Zlomků se nezbavíme, například „soustava“ jedné rovnice o jedné neznámé $2x = 1$ má jediné řešení $\frac{1}{2}$ a nic s tím nenaděláme. Tj. partikulární řešení může obsahovat „neodstranitelné“ zlomky, zatímco báze množiny řešení přidružené homogenní soustavy může být (podle výsledku předchozího cvičení) zapsána bez zlomků. Ani přítomnost netriviální množiny řešení přidružené homogenní soustavy nezaručí možnost odstranění zlomků z partikulárního řešení, jak dokládá například množina $M = (\frac{1}{2}, 0, 0) + \langle(1, 1, 1)\rangle$.

5.66.[4] **Řešení.**
→ (a) $\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$, báze řešení přidružené homogenní soustavy: $\{(2, -1)\}$, partikulární řešení pro jednotlivé sloupce pravých stran: $(1, 0), (1, 0), (2, 0)$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t & 2u & 2v \\ -t & -u & -v \end{pmatrix}$, $t, u, v \in \mathbf{R}$,

→ (b) $\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$, žádná matice $\mathbf{X}$ nesplňuje požadovanou rovnost (pro druhý a třetí sloupec na pravé straně to plyne např. z Frobeniovy věty).

→ (c) $\left(\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$, existuje jediné řešení $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

→ (d) $\left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 2 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & 4 & -3 & 2 \\ 8 & -2 & 1 & 5 & 9 & -7 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 7 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 6 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$, báze řešení přidružené homogenní soustavy: $(-1, -1, 1, 1)$, partikulární řešení pro sloupce pravých stran: $(2, 3, -1, 0), (-1, 0, 1, 0), (0, 1, -1, 0)$, takže $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t & -u & -v \\ -t & -u & -v \\ t & u & v \\ t & u & v \end{pmatrix}$, $t, u, v \in \mathbf{R}$,

→ (e) po přechodu k transponovaným maticím: $\left(\begin{array}{cccc|cc} 2 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 13 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 10 & -2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & -3 & 1 & 10 & -2 \\ 0 & 2 & -7 & 3 & 17 & -3 \end{array}\right)$, báze řešení přidružené homogenní soustavy: $\{(1, -3, 0, 2), (-1, 7, 2, 0)\}$ partikulární řešení pro jednotlivé sloupce: $(2, 5, -1, 0), (-1, 0, 0, -1)$, takže $\mathbf{X}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & u \\ -3t & -3u \\ 0 & 0 \\ 2t & 2u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v & -w \\ 7v & 7w \\ 2v & 2w \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, po transponování dostaneme hledanou matici $\mathbf{X}$.

6.34.[5] **Řešení.**

→ (a) $\dim M = 3$, protože $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_1$. Bázi M tvoří například řádky matice B_1. $\dim N = 3$, protože $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 5 & -8 \\ 4 & 6 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_2$. Bázi N tvoří například řádky matice $\mathbf{B}_2$. $\dim M \vee N = 4$, protože připíšeme-li k řádkům matice $\mathbf{B}_1$ ještě řádky matice $\mathbf{B}_2$, dostáváme šestiřádkovou matici, která má hodnost 4. Je tedy $M \vee N = \mathbf{R}^4$ a báze $M \vee N$ je například standardní báze $\mathbf{R}^4$. Podle věty 6.6 je $\dim M \cap N = 3 + 3 - 4 = 2$. Bázi $M \cap N$ můžeme hledat podobně, jako v příkladu 6.7, můžeme ale použít výsledku cvičení 5.59 a pracovat na chvíli s homogenními soustavami rovnic, jejichž řešeními jsou M a N. Tuto metodu si ukážeme. Protože $\mathbf{B}_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, je množina M řešením soustavy o jediné rovnici $-4x_1 + 8x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$ a protože $\mathbf{B}_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, je množina N řešením soustavy o jediné rovnici $-2x_1 + 2x_2 + x_4 = 0$. Soustava, obsahující obě rovnice současně, má řešení $M \cap N$. Stačí najít bázi tohoto řešení, tj. dvě lineárně nezávislá řešení. Matici soustavy těchto dvou rovnic lze eliminovat na $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Vidíme, že například vektory $(1, 0, 1, 2)$ a $(3, 1, 0, 4)$ jsou řešením této soustavy, jsou lineárně nezávislé, takže tvoří hledanou bázi podprostoru $M \cap N$.

→ (b) $\dim M = 2$, báze například $B_1 = \{(2, 2, 1, -3), (3, 1, -1, 2)\}$. $\dim N = 3$, báze například $B_2 = \{(2, 3, 3, -1), (3, 2, -2, 1), (1, -6, 6, -1)\}$. $\dim M \vee N = 4$,, protože matice sestavená z bázických vektorů z B_1 i B_2 má hodnost 4. Takže $M \vee N = \mathbf{R}^4$ a báze $M \vee N$ je například standardní báze $\mathbf{R}^4$. $\dim M \cap N = 2 + 3 - 4 = 1$. Bázi průniku hledám podobně, jako v příkladu 6.7, matice soustavy, která plyne z rovnosti $a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_3 = \alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2$ je: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -6 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 6 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -15 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 120 & -3 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -27 \end{pmatrix}$, k dalšímu postupu mi satčí poslední řádek, volím-li $\beta = 7t$, musí $\alpha = 27t$, takže $\alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2 = 27t(2, 2, 1, -3) + 7t(0, -4, -5, 13) = t(54, 26, -8, 10)$, takže $M \cap N = \langle(54, 26, -8, 10)\rangle = \langle(27, 13, -4, 5)\rangle$, báze $M \cap N = \{(27, 13, -4, 5)\}$.

→ (c) $\dim M = 2, \dim N = 2, \dim M \vee N = 3, \dim M \cap N = 1$, báze $M \cap N = \{(3, 1, 2, -3)\}$.

→ (d) $\dim M = 3, \dim N = 2, N \subset M$, takže báze $M \cap N =$ báze N.

→ (e) $M = \mathbf{R}^4, \dim N = 2, N \subset M$, takže báze $M \cap N =$ báze N.

→ (f) $\dim M = 3$, $\dim N = 2$, $\dim M \vee N = 4$, tj. $M \vee N = \mathbf{R}^4$. $\dim M \cap N = 3 + 2 - 4 = 1$, M je řešením soustavy s maticí $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, N je řešením soustavy s maticí $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, tedy $M \cap N$ je řešením soustavy s maticí $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, takže $M \cap N = \{(5, 3, 9, 3)\}$.

6.35.[5] **Řešení.** Hledané množiny jsou zde zapsány jako lineární obal jejich báze.

→ (a) $M = \langle(-1, 2, 5, 0), (4, 2, 0, -5)\rangle, \dim M = 2$, $N = \langle(1, 1, -1, 0), (-1, 1, 0, 3)\rangle, \dim N = 2$, $M \vee N = \mathbf{R}^4$, $\dim M \vee N = 4$, $\dim M \cap N = 0$, $M \cap N = \{\boldsymbol{o}\}$,

→ (b) $M = \langle(-7, 3, 5, 4)\rangle$, $\dim M = 1$, $N = \langle(0, 0, 1, 1), (1, 1, 3, 0)\rangle$, $\dim N = 2$, $M \vee N = \langle(-7, 3, 5, 4), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 3, 0)\rangle$, $\dim M \vee N = 3$, $\dim M \cap N = 0$, $M \cap N = \{\boldsymbol{o}\}$,

→ (c) $M = \langle(1, 2, 2, 0), (3, 0, 4, 2)\rangle$, $\dim M = 2$, $N = \langle(1, 2, 2, 0), (3, 4, 0, 6)\rangle$, $\dim N = 2$, $M \vee N = \langle(1, 2, 2, 0), (3, 0, 4, 2), (3, 4, 0, 6)\rangle$, $\dim M \vee N = 3$, $\dim M \cup N = 1$, $M \cup N = \langle(1, 2, 2, 0)\rangle$,

→ (d) $M = \langle(-2, 1, 1, 1)\rangle$, $\dim M = 1$, $N = \langle(1, 1, 1, -2)\rangle$, $\dim N = 1$, $M \vee N = \langle(-2, 1, 1, 1), (1, 1, 1, -2)\rangle$, $\dim M \vee N = 2$, $\dim M \cap N = 0$, $M \cap N = \{\boldsymbol{o}\}$.

6.36.[4] **Řešení.** Báze a dimenze množin M a N a), b), c) nalezneme v řešení cvičení 6.35 a 6.34.

→ (a) $M \vee N = \mathbf{R}^4$, $\dim M \vee N = 4$, $M \cap N = \langle(1, 2, 3, -2)\rangle$, $\dim M \cap N = 1$,

→ (b) $M \vee N = \langle(-7, 3, 5, 4), (1, -6, 6, -1), (2, 3, 3, -1)\rangle$, $\dim M \vee N = 3$, $\dim M \cap N = 0$, $M \cap N = \{\boldsymbol{o}\}$,

→ (c) $M \vee N = \mathbf{R}^4$, $\dim M \vee N = 4$, $\dim M \cap N = 0$, $M \cap N = \{\boldsymbol{o}\}$,

→ (d) $M = \langle(1, -2, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\rangle$, $N = \langle(0, 1, 2, 3), (3, 2, 1, 0)\rangle$, $\dim M = \dim N = 2$, $M \vee N = \mathbf{R}^4$, $\dim M \cap N = 0$, $M \cap N = \{\boldsymbol{o}\}$,

→ (e) $M = \langle(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\rangle$, $N = \langle(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\rangle$, $\dim M = \dim N = 2$, $M \vee N = \langle(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\rangle$, $\dim M \vee N = 3$, $M \cap N = \langle(1, 1, 1, 1)\rangle$,

→ (f) $M = N = M \vee N = M \cap N = \langle(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\rangle$, $\dim = 2$.

6.37.[5] **Řešení.**

→ (a) $1 \cdot (2, 1) + 3 \cdot (3, 2) = (11, 7) = \alpha(2, 2) + \beta(-1, 0)$, tj. $\alpha = \frac{7}{2}$, $\beta = -4$, takže $\boldsymbol{x} = (7/2, -4)_{(B_2)}$,

→ (b) $4 \cdot (1, 1) + 2 \cdot (2, -1) = (8, 2) = \alpha(1, 0) + \beta(-1, 2)$, takže $\boldsymbol{x} = (9, 1)_{(B_2)}$,

$\to$ (c) $4(1,1,1)+2(2,-1,2)-2(3,1,-1)=(2,0,10)=\alpha(1,0,0)+\beta(-1,0,2)+\gamma(0,1,1)$, tj. $\gamma=0$, $\beta=5$, $\alpha=7$, takže $\boldsymbol{x}=(7,5,0)_{(B_2)}$,

$\to$ (d) $2(3,1,-1)+0(2,3,1)-1(1,-2,-3)=(5,4,1)=\alpha(1,2,2)+\beta(1,3,5)+\gamma(1,2,3)$, po vyřešení soustavy mám $\alpha=2$, $\beta=-6$, $\gamma=9$, takže $\boldsymbol{x}=(2,-6,9)_{(B_2)}$,

6.38.[4] **Řešení.**

$\to$ (a) B má dva prvky, C také, stačí tedy zjistit, zda je C lineárně nezávislá: $u(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)+v(\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2)=\boldsymbol{o}$, tj. $(u+v)\boldsymbol{b}_1+(u-v)\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{o}$, protože B je LN, musí $u+v=0$ a $u-v=0$, z toho plyne, že $u=v=0$, takže C je LN, souřadnice $\boldsymbol{x}$ vzhledem k (C) označím α,β, je $\boldsymbol{x}=\alpha(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)+\beta(\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2)=(\alpha+\beta)\boldsymbol{b}_1+(\alpha-\beta)\boldsymbol{b}_2$, protože souřadnice $\boldsymbol{x}$ vzhledem k (B) jsou $(2,3)$, musí $\alpha+\beta=2$, $\alpha-\beta=3$, takže $\alpha=\frac{5}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$,

$\to$ (b) $\boldsymbol{x}=\alpha(2\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)+\beta(2\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3)+\gamma(2\boldsymbol{b}_3+\boldsymbol{b}_1)=(2\alpha+\gamma)\boldsymbol{b}_1+(\alpha+2\beta)\boldsymbol{b}_2+(\beta+2\gamma)\boldsymbol{b}_3$, podle souřadnic $\boldsymbol{x}$ vzhledem k (B) musí $2\alpha+\gamma=2$, $\alpha+2\beta=-1$, $\beta+2\gamma=0$, tj. $\alpha=\frac{7}{9}$, $\beta=-\frac{8}{9}$, $\gamma=\frac{4}{9}$, takže $\boldsymbol{x}=\left(\frac{7}{9},-\frac{8}{9},\frac{4}{9}\right)_{(C)}$,

$\to$ (c) $\boldsymbol{x}=\alpha(\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3)+\beta(\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3)+\gamma(\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2+2\boldsymbol{b}_3)=(\alpha+\gamma)\boldsymbol{b}_1+(2\alpha+\beta+2\gamma)\boldsymbol{b}_2+(\alpha+\beta+2\gamma)\boldsymbol{b}_3=3\boldsymbol{b}_1+2\boldsymbol{b}_2+1\boldsymbol{b}_3$, tj. $\alpha=1$, $\beta=-4$, $\gamma=2$, takže $\boldsymbol{x}=(1,-4,2)_{(C)}$,

$\to$ (d) $\boldsymbol{x}=\alpha(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)+\beta(\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3)+\gamma(\boldsymbol{b}_3+\boldsymbol{b}_4)+\delta(\boldsymbol{b}_4+\boldsymbol{b}_5)+\epsilon(\boldsymbol{b}_5+\boldsymbol{b}_1)=(\alpha+\epsilon)\boldsymbol{b}_1+(\alpha+\beta)\boldsymbol{b}_2+(\beta+\gamma)\boldsymbol{b}_3+(\gamma+\delta)\boldsymbol{b}_4+(\delta+\epsilon)\boldsymbol{b}_5=1\boldsymbol{b}_1+1\boldsymbol{b}_2+1\boldsymbol{b}_3+1\boldsymbol{b}_4+1\boldsymbol{b}_5$, tj. $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\epsilon=\frac{1}{2}$, takže $\boldsymbol{x}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)_{(C)}$,

$\to$ (e) Stejná úvaha jako v předchozích případech vede na soustavu $\alpha+\gamma+2\delta=1$, $2\alpha+\beta+3\delta=2$, $\alpha+2\beta+\gamma+3\delta=3$, $\beta+\delta=4$, která má řešení $\alpha=-7$, $\beta=-2$, $\gamma=-4$, $\delta=6$, takže $\boldsymbol{x}=(-7,-2,-4,6)_{(C)}$.

6.39.[4] **Řešení.** Tři lineárně nezávislé polynomy nejvýše druhého stupně tvoří bázi polynomů nejvýše druhého stupně. Takže u daných množin je potřeba ověřit, že obsahují tři polynomy a že jsou lineárně nezávislé.

$\to$ (a) $\alpha(x^2-2x-2)+\beta(x^2+2x+2)+\gamma x=0\ \forall x\in\mathbf{R}$ tj. $(\alpha+\beta)x^2+(-2\alpha+2\beta+\gamma)x+(-2\alpha+2\beta)=0\ \forall x\in\mathbf{R}$, po použití věty 11.10 dostávám soustavu, která má jen triviální řešení, takže polynomy jsou lineárně nezávislé a tvoří bázi. Analogicky pro polynomy z množiny C. Označím $(S)=(x^2,x,1)$ standardní bázi polynomů nejvýše druhého stupně. Zjevně je $\mathbf{A}_{(S,B)}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-2&2&1\\-2&2&0\end{pmatrix}$ maticí přechodu od (S) k (B) a $\mathbf{A}_{(S,C)}=\begin{pmatrix}1&1&0\\4&-4&2\\4&4&-1\end{pmatrix}$ je matice přechodu od (S) k (C). Podle vět 6.21 a 6.27 je $\mathbf{A}^{-1}_{(S,B)}\mathbf{A}_{(S,C)}$ matice přechodu od (B) k (C) a $\mathbf{A}^{-1}_{(S,C)}\mathbf{A}_{(S,B)}$ je matice přechodu od (C) k (B).

Protože podle věty 5.39 je $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}|\mathbf{E})\sim(\mathbf{A}|\mathbf{B})\sim(\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$, je možné hledané matice počítat eliminací: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&1&0\\-2&2&1&4&-4&2\\-2&2&0&4&4&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\0&1&0&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{4}\\0&0&1&0&-8&3\end{array}\right)$, přičemž hledaná matice přechodu $\mathbf{A}_{(B,C)}$ je zde napsána vpravo od matice $\mathbf{E}$. Dále $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&1&0\\-2&2&1&4&-4&2\\-2&2&0&4&4&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}-\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{8}&1&0&0\\\frac{9}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{8}&0&1&0\\6&2&0&0&0&1\end{array}\right)$, přičemž hledaná matice přechodu $\mathbf{A}_{(C,B)}$ je zde napsána vlevo od matice $\mathbf{E}$.

$\to$ (b) C není báze, protože například je $-(x+2)^2+(x-1)^2+3(2x+1)=0\ \forall x\in\mathbf{R}$.

$\to$ (c) Podobně jako v případu a) dostanu $\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&1&1&1&0\\1&1&0&0&0&1\\1&2&3&1&2&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&1&-1\\0&1&0&-2&-1&2\\0&0&1&1&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-1&1&0&0\\-2&-1&2&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)$, takže $\mathbf{A}_{(B,C)}=\mathbf{A}_{(C,B)}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\-2&-1&2\\1&1&0\end{pmatrix}$.

$\to$ (d) B není báze polynomů nejvýše druhého stupně, neboť obsahuje polynom třetího stupně a ani C není báze, protože neobsahuje tři prvky.

6.40.[3] **Řešení.**

$\to$ (a) $(-1,2,1)$,

$\to$ (b) a] $\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},3\right)$, protože $x^2+2x-1=\frac{3}{4}(x^2-2x-2)+\frac{1}{4}(x^2+2x+2)+3x$, b] $\left(1,\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$, protože $x^2+2x-1=1(x^2+2x-2)+\frac{1}{4}(2x+2)-\frac{1}{2}(x-1)$, c] $(8,-6,1)$, protože $x^2+2x-1=8(x+1)-6(x+2)+1(x^2+3)$,

$\to$ (c) Využiji matici přechodu od (C) k (B) vypočítanou v 6.39, dále souřadnice vzhledem k (B) vypočítané v případu (b) a konečně využiji větu 6.23, a] $\begin{pmatrix}-\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{8}\\\frac{9}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{8}\\6&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\5\end{pmatrix}$, c] $\begin{pmatrix}2&1&-1\\-2&-1&2\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\-6\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-8\\2\end{pmatrix}$,

$\to$ (d) $(1,2,-1)$.

6.41.[3] **Řešení.**

$\to$ (a) $\left(\begin{array}{cc|cc}2&3&2&-1\\1&2&2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}\frac{1}{2}&1&1&0\\-1&-1&0&1\end{array}\right)$, vlevo od jednotkové matice mám matici přechodu od (B_2) k (B_1), tu využiji společně s větou 6.23 na výpočet souřadnic vzhledem k bázi (B_2): $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&1\\-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\-4\end{pmatrix}$,

→ (b) $\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc}\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1\end{array}\right)$, hledané souřadnice jsou $\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} \cdot \binom{4}{2} = \binom{9}{1}$,

→ (c) $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{7}{2} & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$, hledané souřadnice jsou $\begin{pmatrix}1 & \frac{7}{2} & 2\\ 0 & \frac{3}{2} & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\ 2\\ -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\ 5\\ 0\end{pmatrix}$,

→ (d) $\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 & 2\\ -1 & 1 & -3 & 2 & 5 & 3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0\\ -5 & -1 & -4 & 0 & 1 & 0\\ 8 & 0 & 7 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$, hledané souřadnice jsou $\begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\ -5 & -1 & -4\\ 8 & 0 & 7\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\ 0\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ -6\\ 9\end{pmatrix}$.

6.42.[3] **Řešení.**

→ (a) $\mathbf{A}_{(B,C)} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, hledané souřadnice jsou $\mathbf{A}_{(C,B)} \binom{2}{3} = \mathbf{A}^{-1}_{(B,C)} \begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} \binom{2}{3} = \begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$,

→ (b) $\mathbf{A}_{(B,C)} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_{(C,B)} \begin{pmatrix}2\\ -1\\ 0\end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}_{(B,C)} \begin{pmatrix}2\\ -1\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ -2 & 4 & 1\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\ -1\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix}7\\ -8\\ 4\end{pmatrix}$,

→ (c) $\mathbf{A}_{(B,C)} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_{(C,B)} \begin{pmatrix}2\\ -1\\ 0\end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}_{(B,C)} \begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -4\\ 2\end{pmatrix}$,

→ (d) $\mathbf{A}_{(B,C)} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_{(C,B)} \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}_{(B,C)} \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$,

→ (e) $\mathbf{A}_{(B,C)} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_{(C,B)} \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}_{(B,C)} \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{5}{2}\\ -1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2}\\ 1 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\ -2\\ -4\\ 6\end{pmatrix}$.

6.43.[3] **Řešení.**

→ (a) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, (c) jako b), protože v tomto případě $\mathbf{A}_{(B,C)} = \mathbf{A}^{-1}_{(B,C)}$, (d) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$,

→ (e) $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2\\ 2 & -1 & -2 & -2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & -2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -4/11 & 2/11 & -9/11\\ 0 & 1 & 0 & 20/11 & 1/11 & 23/11\\ 0 & 0 & 1 & -3/11 & 7/11 & -15/11\end{array}\right)$, tj. $\mathbf{A}_{(B,C)} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix}-4 & 2 & -9\\ 20 & 1 & 23\\ -3 & 7 & -15\end{pmatrix}$,

6.44.[3] **Řešení.**

→ (a) změní se pořadí řádků matice přechodu,
→ (b) zmení se pořadí sloupců matice přechodu,
→ (c) i-tý řádek matice přechodu je vynásoben konstantou $\frac{1}{\alpha}$,
→ (d) j-tý sloupec matice přechodu je vynásoben konstantou β,
→ (e) od j-tého řádku matice přechodu je odečten řádek i-tý.

6.45.[4] **Řešení.** Z obrázku, který si udělá laskavý čtenář sám, plyne, že $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3$, $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3$. Matice přechodu od (B) k (C) tedy je $\mathbf{A}_{(B,C)} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Množina B je zjevně bází lineárního prostoru U_O, a protože $\mathbf{A}_{(B,C)}$ je regulární, je také C bází. Konečně $\mathbf{A}_{(C,B)} = \mathbf{A}_{(B,C)} = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

6.46.[4] **Řešení.** Souřadnice vzhledem k bázi (C) jsou $\mathbf{A}_{(C,B)} \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$.

6.47.[2] **Řešení.** $(\boldsymbol{b}_1^T, \boldsymbol{b}_2^T, \ldots, \boldsymbol{b}_n^T | \boldsymbol{c}_1^T, \boldsymbol{c}_2^T, \ldots, \boldsymbol{c}_n^T)$ je rozšířená matice soustavy soustav $\mathbf{A}_{(S,B)}\mathbf{X} = \mathbf{A}_{(S,C)}$. Řešením této maticové rovnice eliminací tak, že $\mathbf{E}$ je vlevo, dostávám $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}_{(S,B)}\mathbf{A}_{(S,C)} = \mathbf{A}_{(B,S)}\mathbf{A}_{(S,C)} = \mathbf{A}_{(B,C)}$. Při eliminaci takové, že $\mathbf{E}$ dostanu vpravo, je řešením matice $\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{A}_{(C,B)}$.

7.94.[5] **Řešení.**

→ (a) Není lineární, protože $\mathcal{A}(0,0,0) \neq \boldsymbol{o}$, přitom podle věty 7.10 lineární zobrazení splňuje $\mathcal{A}(\boldsymbol{o}_1) = \boldsymbol{o}_2$,

→ (b) Je lineární: 1) $\mathcal{A}(x_1{+}y_1, x_2{+}y_2, x_3{+}y_3) = (0, x_3{+}y_3, x_2{+}y_2, x_1{+}y_1) = (0, x_3, x_2, x_1) + (0, y_3, y_2, y_1) = \mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) + \mathcal{A}(y_1, y_2, y_3)$, 2) $\mathcal{A}(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) = (0, \alpha x_3, \alpha x_2, \alpha x_1) = \alpha(0, x_3, x_2, x_1) = \alpha\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3)$,

→ (c) Je lineární, ověřím například pomocí principu superpozice: $\mathcal{A}(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) = (\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 - \alpha x_3 - \beta y_3,\ \alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3 - \alpha x_1 - \beta y_1,\ \alpha x_3 + \beta y_3 + \alpha x_1 + \beta y_1 - \alpha x_2 - \beta y_2,\ \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_3 + \beta y_3) = \alpha(x_1 + x_2 - x_3,\ x_2 + x_3 - x_1,\ x_3 + x_1 - x_2,\ x_1 + x_3) + \beta(y_1 + y_2 - y_3,\ y_2 + y_3 - y_1,\ y_3 + y_1 - y_2,\ y_1 + y_3) = \alpha\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) + \beta\mathcal{A}(y_1, y_2, y_3)$,

→ (d) Není lineární, neplatí např. $\mathcal{A}(\alpha(x_1, x_2, x_3)) = \alpha\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3)$ pro $\alpha = 2, x_1 = x_2 = x_3 = 1$: $\mathcal{A}(\alpha(x_1, x_2, x_3)) = (\alpha x_1, \alpha^2 x_1^2, \alpha x_2, \alpha^3 x_3^3) = (2, 2^2, 2, 2^3)$, ale přitom $\alpha\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = \alpha(x_1, x_1^2, x_2, x_3^3) = 2(1,1,1,1) = (2,2,2,2)$,

→ (e) Není lineární ze stejných důvodů, jako v případě a),

→ (f) Je lineární, dá se argumentovat výsledkem cvičení 7.95 (případ a), nebo se to dá ověřit pomocí principu superpozice jako v případě c) tohoto cvičení, nebo ověřit vlastnosti 1) a 2) z definice, jako v případě b) a g) tohoto cvičení.

→ (g) Je lineární: 1) $\mathcal{A}(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) = (x_1+y_1, x_1+y_1, x_1+y_1, x_1+y_1) = (x_1, x_1, x_1, x_1) + (y_1, y_1, y_1, y_1) = \mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) + \mathcal{A}(y_1, y_2, y_3)$, 2) $\mathcal{A}(\alpha\boldsymbol{x}) = (\alpha x_1, \alpha x_1, \alpha x_1, \alpha x_1) = \alpha(x_1, x_1, x_1, x_1) = \alpha\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$,

→ (h) Je lineární, protože $\boldsymbol{o}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}$, $\alpha\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}$.

7.95.[3] **Řešení.**

→ (a) Předpokládám $\mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Big(\sum_{j=1}^n c_{1,j}x_j, \sum_{j=1}^n c_{2,j}x_j, \ldots \sum_{j=1}^n c_{n,j}x_j\Big)$.
Označím $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Je $\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y} = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) + (\beta x_1, \ldots, \beta x_n) = (\alpha x_1+\beta y_1, \ldots, \alpha x_n+\beta y_n)$. Vektor $\mathcal{A}(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})$ má i-tou složku rovnu výrazu: $\sum_{j=1}^n c_{i,j}(\alpha x_j+\beta y_j) = \alpha\sum_{j=1}^n c_{i,j}x_j + \beta\sum_{j=1}^n c_{i,j}y_j$, tj. $\mathcal{A}(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}) = \alpha\mathcal{A}(\boldsymbol{x})+\beta\mathcal{A}(\boldsymbol{y})$, takže platí princip superpozice. Z toho plyne, že $\mathcal{A}$ je lineární.

→ (b) Spočítám derivaci funkce $\mathcal{A}$ v bodě x: $\mathcal{A}'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\mathcal{A}(x+h)-\mathcal{A}(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\mathcal{A}(x)+\mathcal{A}(h)-\mathcal{A}(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\mathcal{A}(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\mathcal{A}(1)}{h} = \mathcal{A}(1)$. Ve výpočtu jsem využil definiční vlastnosti linearity. Vidím, že funkce $\mathcal{A}$ má ve všech bodech konstantní derivaci $a = \mathcal{A}(1)$, takže musí být dána vzorcem $\mathcal{A}(x) = ax+b$ $\forall x\in\mathbf{R}$. Protože ale z linearity plyne, že $\mathcal{A}(0) = 0$, pro funkci $\mathcal{A}$ platí $\mathcal{A}(x) = ax$ $\forall x\in\mathbf{R}$.

→ (c) Dokážu podobně jako v b). Místo obyčejných derivací použiji parciální, $\boldsymbol{h} = (0, 0, \ldots, h, \ldots, 0)$.

→ (d) V každé složce vektoru $\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ se musí vyskytovat vzorec analogický vzorci z c), protože, je-li zobrazení $\mathcal{A}\colon\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ lineární, pak musí být lineární také $\mathcal{A}_i:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, kde $\mathcal{A}_i(\boldsymbol{x})$ je i-tá složka vektoru $\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$.

7.96.[3] **Řešení.** Označím $\oplus$, $\odot$ operace sčítání a násobení konstantou na $\mathbf{R}^+$ a $+$, $\cdot$ jsou operace sčítání a násobení konstantou na $\mathbf{R}$. Platí $\log(x\oplus y) = \log(xy) = \log(x)+\log(y)$, takže první vlastnost z definice linearity je splněna. Také platí $\log(\alpha\odot x) = \log(x^\alpha) = \alpha\cdot\log(x)$, takže $\log:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ je lineární.

7.97.[2] **Řešení.** $\mathcal{A}(a,b)\oplus\mathcal{A}(c,d) = (a+2^b, b)\oplus(c+2^d, d) = (a+2^b+c+2^d-2^b-2^d+2^{b+d}, b+d) =$
$(a+c+2^{b+d}, b+d) = \mathcal{A}(a+c, b+d) = \mathcal{A}\big((a,b)+(c,d)\big)$,
$\alpha\odot\mathcal{A}(a,b) = \alpha\odot(a+2^b, b) = \big(\alpha(a+2^b)-\alpha 2^b+2^{\alpha b}, \alpha b\big) = (\alpha a+2^{\alpha b}, \alpha b) = \mathcal{A}(\alpha a, \alpha b) = \mathcal{A}\big(\alpha(a,b)\big)$.

7.98.[4] **Řešení.**

→ (a) $\mathcal{A}$ je lineární. Zřejmé z definice linearity.

→ (b) $\mathcal{A}$ je lineární. $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y} = \mathcal{A}(\boldsymbol{x})+\mathcal{A}(\boldsymbol{y})$, $\mathcal{A}(c\boldsymbol{x}) = \alpha(c\boldsymbol{x}) = c(\alpha\boldsymbol{x}) = c\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$.

→ (c) Pro $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{o}$ je $\mathcal{A}$ lineární, jinak ne, protože $\mathcal{A}(\boldsymbol{o})$ není rovno nulovému vektoru.

→ (d) Pro $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{o}$ se jedná o případ a), tj. $\mathcal{A}$ je lineární, jinak ne, protože $\mathcal{A}(\boldsymbol{o})$ není rovno nulovému vektoru.

7.99.[3] **Řešení.** Neboť vlastnost $\alpha\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}(\alpha\boldsymbol{x})$ pozbývá smyslu: první α je z jiného tělesa než druhé α.

7.100.[4] **Řešení.**

→ (a) $\mathcal{A}\big(\{x^2+2,\, x^2+x\}\big) = \big\{(x^2+2)', (x^2+x)'\big\} = \{2x, 2x+1\}$,

→ (b) $\mathcal{A}\big(\langle x^2+2,\, x^2+x\rangle\big) = \langle 2x, 2x+1\rangle$,

→ (c) $\mathcal{A}(P_{\le 2}) = P_{\le 1}$.

7.101.[3] **Řešení.**

→ (a) $\mathcal{B}(ax^2+bx+c) = \frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+0$, $\mathcal{B}(ax^2+bx+c+ux^2+vx+w) = \frac{a+u}{3}x^3+\frac{b+v}{2}x^2+(c+w)x = \frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+\frac{u}{3}x^3+\frac{v}{2}x^2+wx = \mathcal{B}(ax^2+bx+c)+\mathcal{B}(ux^2+vx+w)$, $\mathcal{B}(\alpha ax^2+\alpha bx+\alpha c) = \frac{\alpha a}{3}x^3+\frac{\alpha b}{2}x^2+\alpha cx = \alpha\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right) = \alpha\mathcal{B}(ax^2+bx+c)$, tj. $\mathcal{B}$ je lineární.

→ (b) $\mathcal{B}$ není lineární, protože $\mathcal{B}(0) = 1 \ne \boldsymbol{o}$,

→ (c) $\mathcal{B}(ax^2+bx+c) = \frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx-\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-c$, $\mathcal{B}(ax^2+bx+c+ux^2+vx+w) = \frac{a+u}{3}x^3+\frac{b+v}{2}x^2+(c+w)x-\frac{a+u}{3}-\frac{b+v}{2}-(c+w) = \frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx-\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-c+\frac{u}{3}x^3+\frac{v}{2}x^2+wx-\frac{u}{3}-\frac{v}{2}-w = \mathcal{B}(ax^2+bx+c)+\mathcal{B}(ux^2+vx+w)$, $\mathcal{B}(\alpha ax^2+\alpha bx+\alpha c) = \frac{\alpha a}{3}x^3+\frac{\alpha b}{2}x^2+\alpha cx-\frac{\alpha a}{3}-\frac{\alpha b}{2}-\alpha c = \alpha\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx-\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-c\right) = \alpha\mathcal{B}(ax^2+bx+c)$, tj. $\mathcal{B}$ je lineární.

7.102.[4] **Řešení.**

→ (a) $\mathcal{B}\big(\{x^2+2,\, x^2+x\}\big) = \big\{\frac{1}{3}x^3+2x, \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\big\}$,

→ (b) $\mathcal{B}\big(\langle x^2+2,\, x^2+x\rangle\big) = \big\langle\frac{1}{3}x^3+2x, \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\big\rangle$,

→ (c) $\mathcal{B}(P_{\le 2}) = P_{\le 3}$.

7.103.[3] **Řešení.** Nechť B_M je báze lin. podprostoru M a $B\supseteq B_M$ je báze L (taková B se dá podle věty 2.51 nalézt). Volím $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}$ pro $\boldsymbol{b}\in B_M$ a $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{o}$ pro $\boldsymbol{b}\in B\setminus B_M$. Zobrazení $\mathcal{A}$ je známo na bázi B, takže je možné toto zobrazení dodefinovat všude podle věty 7.27. Podle věty 7.14 platí $\mathcal{A}(L) = \mathcal{A}(\langle B\rangle) = \langle \mathcal{A}(B)\rangle = \langle B_M\rangle = M$.

7.104.[4] **Řešení.**

$\to$ (a) b] $\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3) = (0,x_3,x_2,x_1) = (0,0,0,0)$, tj. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, takže $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{(0,0,0)\}$, c] $\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2-x_3,\ x_2+x_3-x_1,\ x_3+x_1-x_2,\ x_1+x_3) = (0,0,0,0)$, z toho plynoucí soustava má jediné řešení triviální, takže $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{(0,0,0)\}$, f] podobně jako c], $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{(0,0,0)\}$, g] musí $x_1 = 0$, statní mohou být libovolné, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \langle(0,1,0),(0,0,1)\rangle$, h] $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \mathbf{R}^3$, b], c], f] $\operatorname{def}\mathcal{A} = 0$, g] $\operatorname{def}\mathcal{A} = 2$, h] $\operatorname{def}\mathcal{A} = 3$,

$\to$ (b) a] $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, tj. $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\boldsymbol{o}\}$, b] pro $\alpha \neq 0$: $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, tj. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, tj. $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\boldsymbol{o}\}$, pro $\alpha = 0$ je $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = L$, c] pro $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ je $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = L$, d] pro $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ jako případ a], je-li $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\boldsymbol{o}\}$, pak $\operatorname{def}\mathcal{A} = 0$, je-li $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = L$, pak $\operatorname{def}\mathcal{A} = \dim L$,

$\to$ (c) $\mathcal{A}(p) = p' = 0$, tj. p je konstatní polynom, $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ je množina všech konstantních polynomů, $\operatorname{def}\mathcal{A} = 1$,

$\to$ (d) $\mathcal{B}(ax^2+bx+c) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx = 0\ \forall x \in \mathbf{R}$, podle věty 11.10 je $a = b = c = 0$, takže $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$ obsahuje jen nulový polynom, $\operatorname{def}\mathcal{B} = 0$.

7.105.[4] **Řešení.**

$\to$ (a) b] $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = 3$, c] $\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = 3$, f] $\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&2&-4\\-1&2&-3\\4&2&-2\end{pmatrix}$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = 3$, g] $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = 1$, h] nulová matice typu $(4,3)$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = 0$.

$\to$ (b) Standardní báze $P_{\leq 2}$ je $S = \{1,x,x^2\}$, souřadnice polynomu ax^2+bx+c vzhledem k S jsou (c,b,a), souřadnice polynomu $\mathcal{A}(ax^2+bx+c) = 2ax+b$ vzhledem k S jsou $(b,2a,0)$. Pro hledanou matici $\mathbf{A}$ musí podle věty 7.49 platit $\mathbf{A}\begin{pmatrix}c\\b\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\2a\\0\end{pmatrix}$, takže $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = 2$,

$\to$ (c) Souřadnice polynomu $\mathcal{B}(ax^2+bx+c) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx$ vzhledem k bázi $S' = \{1,x,x^2,x^3\}$ v $P_{\leq 3}$ jsou $\left(0,c,\frac{b}{2},\frac{a}{3}\right)$, pro hledanou matici $\mathbf{B}$ musí platit $\mathbf{B}\begin{pmatrix}c\\b\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\c\\b/2\\a/3\end{pmatrix}$, takže $\mathbf{B} = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}$, $\operatorname{hod}\mathcal{B} = 3$.

7.106.[4] **Řešení.**

$\to$ (a) Zobrazení je lineární, neboť platí např. princip superpozice: $\mathcal{A}(\alpha(ax^2+bx+c)+\beta(ux^2+vx+w)) = (\alpha a+\beta u+\alpha c+\beta w)x^2-\alpha b-\beta v = \alpha((a+c)x^2-b)+\beta((u+w)x^2-v) = \alpha\mathcal{A}(ax^2+bx+c)+\beta\mathcal{A}(\alpha(ux^2+vx+w)$.

$\to$ (b) $(a+c)x^2 - b = 0\ \forall x \in \mathbf{R}$, tj. dle věty 11.10 je $a+c = 0$, $b = 0$, soustava má řešení $\langle(1,0,-1)\rangle$, takže $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \langle x^2-1\rangle$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = 1$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = \dim L_1 - \operatorname{def}\mathcal{A} = 3-1 = 2$.

$\to$ (c) Standardní báze $P_{\leq 2}$ je $S = \{1,x,x^2\}$, souřadnice polynomu ax^2+bx+c vzhledem k S jsou (c,b,a) souřadnice polynomu $\mathcal{A}(ax^2+bx+c) = (a+c)x^2-b$ vzhledem k S jsou $(-b,0,a+c)$. Pro matici $\mathbf{A}$ musí platit $\mathbf{A}\begin{pmatrix}c\\b\\a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-b\\0\\a+c\end{pmatrix}$, takže $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

$\to$ (d)=e) $\dim\mathcal{A}(P_{\leq 2}) = \operatorname{hod}\mathcal{A} = 2$, $\mathcal{A}(1) = x^2$, $\mathcal{A}(x) = -1$, to jsou dva lineárně nezávislé polynomy z $\mathcal{A}(P_{\leq 2})$, takže tvoří bázi tohoto podprostoru. Platí tedy $\mathcal{A}(P_{\leq 2}) = \langle x^2, 1\rangle$.

7.107.[5] **Řešení.** Množinu všech vektorů $\boldsymbol{u}$, které splňují $\mathcal{A}(\boldsymbol{u}) = (y_1,\dots,y_m)$, značím M_y.

$\to$ (a) $n = m = 2$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = \operatorname{hod}\mathbf{A} = 2$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = n - \operatorname{hod}\mathcal{A} = 2-2 = 0$, tj. $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\boldsymbol{o}\}$, $\mathcal{A}(x_1,x_2)$: $\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+2x_2\\2x_1+3x_2\end{pmatrix}$, takže $\mathcal{A}(x_1,x_2) = (x_1+2x_2,\ 2x_1+3x_2)$, $\mathcal{A}$ je prosté a na, takže existuje jediný vektor $\boldsymbol{u}$ s požadovanou vlastností: $\boldsymbol{u} = \mathcal{A}^{-1}(y_1,y_2)$, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}$, tj. $\boldsymbol{u}^T = \begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3y_1+2y_2\\2y_1-y_2\end{pmatrix}$,

$\to$ (b) $n = m = 2$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = \operatorname{hod}\mathbf{A} = 1$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = n - \operatorname{hod}\mathcal{A} = 2-1 = 1$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ je množinou řešení soustavy $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \langle(2,-1)\rangle$, $\mathcal{A}(x_1,x_2)^T = \begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+2x_2\\2x_1+4x_2\end{pmatrix}$, $\left(\begin{array}{cc|c}1&2&y_1\\2&4&y_2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&2&y_1\\0&0&y_2-2y_1\end{array}\right)$, aby existoval $\boldsymbol{u}$, musí $\boldsymbol{y} \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^2)$, tedy musí $y_2 = 2y_1$, pak $M_y = \{(y_1,0)\} + \operatorname{Ker}\mathcal{A}$,

$\to$ (c) $n = 3$, $m = 2$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = \operatorname{hod}\mathbf{A} = 2$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = n - \operatorname{hod}\mathcal{A} = 3-2 = 1$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \langle(1,-2,1)\rangle$, $\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3)^T = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+2x_2+3x_3\\2x_1+3x_2+4x_3\end{pmatrix}$, $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&y_1\\2&3&4&y_2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&y_1\\0&1&2&2y_1-y_2\end{array}\right)$, takže $M_y = (y_1, 2y_1-y_2, 0) + \operatorname{Ker}\mathcal{A}$,

$\to$ (d) $n = 2$, $m = 3$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = \operatorname{hod}\mathbf{A} = 2$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = n - \operatorname{hod}\mathcal{A} = 2-2 = 0$, tj. $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\boldsymbol{o}\}$, $\mathcal{A}(x_1,x_2)^T = \begin{pmatrix}0&1\\1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2\\x_1+2x_2\\3x_1+4x_2\end{pmatrix}$, $\left(\begin{array}{cc|c}0&1&y_1\\1&2&y_2\\3&4&y_3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&0&y_2-2y_1\\0&1&y_2\\0&0&2y_1-3y_3+y_3\end{array}\right)$, $M_y \neq \emptyset$ pro $\boldsymbol{y} \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^2)$, tj. pro $2y_1 - 3y_3 + y_3 = 0$, v tom případě $M_y = \{(y_2-2y_1, y_2)\}$,

→ (e) $n = 4$, $m = 3$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = \operatorname{hod}\mathbf{A} = 3$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = n - \operatorname{hod}\mathcal{A} = 4 - 3 = 1$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \langle(-1,3,8,-7)\rangle$,
$\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3,x_4)^T = \begin{pmatrix}1&2&2&3\\2&0&2&2\\3&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+2x_2+2x_3+3x_4\\2x_1+2x_3+2x_4\\3x_1+x_2\end{pmatrix}$,
volím $u_4 = 0$, ostatní složky vektoru $\boldsymbol{u}$ spočítám jako $\begin{pmatrix}1&2&2\\2&0&2\\3&1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2&2&4\\6&-6&2\\2&5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$, takže
$M_y = \left\{\frac{1}{14}(-2y_1+2y_2+4y_3, 6y_1-6y_2+2y_3, 2y_1+5y_2-4y_3, 0)\right\} + \operatorname{Ker}\mathcal{A}$,

→ (f) $n = m = 4$, $\mathcal{A}$ je identické zobrazení, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = 4$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = 0$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\boldsymbol{o}\}$,
$\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1,x_2,x_3,x_4)$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{y}$,

→ (g) $n = 4$, $m = 3$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = \operatorname{hod}\mathbf{A} = 2$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = n - \operatorname{hod}\mathcal{A} = 4 - 2 = 2$,
$\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ je řešením soustavy $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, tj. $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \langle(0,1,-1,0),(-2,0,-1,5)\rangle$,
$\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3,x_4)^T = \begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&3&3&1\\7&1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_1+x_2+x_3+x_4\\x_1+3x_2+3x_3+x_4\\7x_1+x_2+x_3+3x_4\end{pmatrix}$, $\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&1&1&y_1\\1&3&3&1&y_2\\7&1&1&3&y_3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&-2&0&y_1-y_2\\0&5&5&1&-y_1+2y_2\\0&0&0&0&-4y_1+y_2+y_3\end{array}\right)$,
$M_y \neq \emptyset$ jen pro $\boldsymbol{y} \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^4)$ $(y_3 = 4y_1 - y_2)$, pro tento případ je $M_y = \{(y_1-y_2, 0, 0, -y_1+2y_2)\} + \operatorname{Ker}\mathcal{A}$,

→ (h) $n = 2$, $m = 4$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = \operatorname{hod}\mathbf{A} = 1$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = n - \operatorname{hod}\mathcal{A} = 2 - 1 = 1$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \langle(3,-1)\rangle$,
$\mathcal{A}(x_1,x_2)^T = \mathbf{A}(x_1,x_2)^T = (x_1+3x_2, 2x_1+6x_2, 2x_1+6x_2, 2x_1+6x_2)^T$, aby $M_y \neq \emptyset$, musí $\boldsymbol{y} \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^2)$,
tj. $2y_1 = y_2 = y_3 = y_4$, pak $M_y = \{(y_1, 0)\} + \operatorname{Ker}\mathcal{A}$,

→ (i) $n = 5$, $m = 1$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = \operatorname{hod}\mathbf{A} = 1$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = n - \operatorname{hod}\mathcal{A} = 5 - 1 = 4$,
$\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ je řešení rovnice $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, tj. $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \langle(2,-1,0,0,0),(0,3,-2,0,0),(0,0,4,-3,0),(0,0,0,5,-4)\rangle$,
$\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5$, $M_y = (y,0,0,0,0) + \operatorname{Ker}\mathcal{A}$,

→ (j) $n = 1, m = 3$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = \operatorname{hod}\mathbf{A} = 1$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = n - \operatorname{hod}\mathcal{A} = 1 - 1 = 0$, tj. $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{0\}$, $\mathcal{A}(x) = (2x, 3x, 4x)$,
$M_y \neq \emptyset$ jen pro $3y_2 = 2y_1$ a $y_1 = 2y_3$, pak $M_y = \{y_1/2\}$.

7.108.[2] **Řešení.** Lineární zobrazení má matici $\mathbf{A}$ vzhledem ke standardním bázím a složky vztupního vektoru $\boldsymbol{x}$ se transformují na výstupní vektor $\boldsymbol{y}$ podle věty 7.49, tj. podle vzorce $\mathbf{A}\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{y}^T$. Z definice maticového násobení je zřejmé, že složky vektoru $\boldsymbol{y}$ jsou lineární kombinace složek vektory $\boldsymbol{x}$. Obráceně, pokud složky výstupního vektoru jsou lineárními kombinacemi složek vstupního vektoru, pak koeficienty těchto kombinací zapíšeme do matice $\mathbf{A}$, která splňuje $\mathbf{A}\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{y}^T$. To je matice lineárního zobrazení.

7.109.[4] **Řešení.**

→ (a) Zobrazení je lineární, princip superpozice si ověří laskavý čtenář sám.

→ (b) $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$: $\begin{pmatrix}a&a+b&a+c\\b&b+c&b+d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, tj. $a = b = c = d = 0$, je jediné řešení, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = 0$.
$\operatorname{hod}\mathcal{A} = \dim L_1 - \operatorname{def}\mathcal{A} = 4 - 0 = 4$.

→ (c) Souřadnice vektoru $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ vzhledem ke standardní bázi jsou (a,b,c,d) a souřadnice vektoru $\begin{pmatrix}u&v&w\\x&y&z\end{pmatrix}$ jsou (u,v,w,x,y,z). Hledaná matice tedy splňuje $\mathbf{A}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\a+b\\a+c\\b\\b+c\\b+d\end{pmatrix}$, takže $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$,

→ (d) Vzhledem k tomu, že $\operatorname{hod}\mathcal{A} = 4$ a že $\operatorname{def}\mathcal{A} = 0$, jsou obrazy všech čtyř bázových prvků $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1)$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_2)$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_3)$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_4)$, lineárně nezávislé, takže tvoří bázi podprostoru $\mathcal{A}(M_{2,2})$. Báze podprostoru $\mathcal{A}(M_{2,2})$ tedy je $C = \left\{\mathcal{A}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \mathcal{A}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \mathcal{A}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \mathcal{A}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$.

7.110.[4] **Řešení.**

→ (a) Je $(\mathbf{B}+\mathbf{C})^T = \mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T$, $(\alpha\mathbf{B})^T = \alpha\mathbf{B}^T$.

→ (b) $\mathbf{B}^T = \mathbf{O}$, pak musí $\mathbf{B} = \mathbf{O}$, takže $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\mathbf{O}\}$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = 0$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = \dim M_{3,3} - \operatorname{def}\mathcal{A} = 9 - 0 = 9$,

→ (c) $\mathbf{A}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\\g\\h\\i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\d\\g\\b\\e\\h\\c\\f\\i\end{pmatrix}$, takže $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$.

→ (d) Vzhledem k tomu, že $\mathcal{A}$ je prosté a na, je $\mathcal{A}(M_{3,3}) = M_{3,3}$, bází $\mathcal{A}(M_{3,3})$ je tedy každá báze $M_{3,3}$.

7.111.[3] **Řešení.** Jako v předchozím cvičení, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\mathbf{O}\}$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = 0$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = \dim M_{m,n} - \operatorname{def}\mathcal{A} = mn - 0 = mn$, $\mathcal{A}(M_{m,n}) = M_{n,m}$, zobrazení je prosté a na.

7.112.[5] **Řešení.** Není lineární, protože obecně $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \neq \det\mathbf{A} + \det\mathbf{B}$ a také $\det(\alpha\mathbf{A}) = \alpha^n \det\mathbf{A} \neq \alpha\det\mathbf{A}$.

7.113.[3] **Řešení.** Všechna zobrazení s výjimkou případu g) a i) jsou lineární.

→ (i) Nechť (a_i) má konečnou sumu rovnou jedné a (b_i) má nekonečnou sumu. Pak $(a_i + b_i)$ má nekonečnou sumu a je $\mathcal{A}(a_i + b_i) = (0, 0, 0, \ldots)$, zatímco $\mathcal{A}(a_i) + \mathcal{A}(b_i) = (1, 0, 0, \ldots) + (0, 0, 0, \ldots) = (1, 0, 0, \ldots)$.

7.114.[3] **Řešení.**

→ (a) $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{(0, 0, 0, a_4, a_5, a_6, a_7, \ldots); a_4, a_5, a_6, a_7, \ldots \in \mathbf{R}\}$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = \infty$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = 3$,

→ (b) $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{(0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, 0, \ldots); a_2, a_4, a_6, \ldots \in \mathbf{R}\}$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = \infty$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = \infty$,

→ (c) $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{(a_1, -a_1, a_3, -a_3, a_5, -a_5, \ldots); a_1, a_3, a_5, \ldots \in \mathbf{R}\}$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = \infty$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = \infty$,

→ (d) $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{(a_1, a_1, a_3, a_3, a_5, a_5, \ldots); a_1, a_3, a_5, \ldots \in \mathbf{R}\}$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = \infty$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = \infty$,

→ (e) $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{(0, 0, 0, 0, \ldots)\}$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = 0$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = \infty$,

→ (f) $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{(a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0, 0, \ldots); a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}\}$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = 3$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = \infty$,

→ (h) $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{(a_1, 0, 0, a_4, a_5, a_6, \ldots); a_1, a_4, a_5, a_6 \ldots \in \mathbf{R}\}$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = \infty$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = 2$,

7.115.[3] **Řešení.**

→ (a) Je lineární: $\mathcal{A}(f+g) = \int_0^1 (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \mathcal{A}(f) + \mathcal{A}(g)$, $\mathcal{A}(\alpha f) = \int_0^1 (\alpha f)(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \alpha\mathcal{A}(f)$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{f; \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0\}$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = \infty$ (například všechny polynomy typu $x^n - \frac{1}{n}$ leží v $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$), $\operatorname{hod}\mathcal{A} = 1$.

→ (b) Je lineární: $\mathcal{A}(f+g) = (f+g)(1) = f(1) + g(1) = \mathcal{A}(f) + \mathcal{A}(g)$, $\mathcal{A}(\alpha f) = (\alpha f)(1) = \alpha f(1) = \alpha\mathcal{A}(f)$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{f; f(1) = 0\}$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = \infty$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = 1$.

→ (c) Je lineární, analogicky, jako v b), $\operatorname{def}\mathcal{A} = \infty$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = 1$.

→ (d) Je lineární: $\mathcal{A}(f+g) = (f+g)'(\frac{1}{2}) = f'(\frac{1}{2}) + g'(\frac{1}{2}) = \mathcal{A}(f) + \mathcal{A}(g)$, $\mathcal{A}(\alpha f) = (\alpha f)'(\frac{1}{2}) = \alpha f'(\frac{1}{2}) = \alpha\mathcal{A}(f)$, $\operatorname{def}\mathcal{A} = \infty$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = 1$.

7.116.[3] **Řešení.** Protože $\dim L_1 = \infty$, přitom matice je konečná tabulka čísel. Protože matice zobrazení má tolik sloupců, kolik je prvků báze L_1, nelze definovat matici zobrazení pro $\dim L_1 = \infty$.

7.117.[5] **Řešení.** Společný postup: $\alpha\boldsymbol{b}_1 + \beta\boldsymbol{b}_2 + \gamma\boldsymbol{b}_3 = (1, 2, 3)$, tj $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$. Platí: $\mathcal{A}(1, 2, 4) = \alpha\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1) + \beta\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_2) + \gamma\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_3) = -\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1) + 2\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_2) + \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_3)$.

→ (a) $\mathcal{A}(1, 2, 4) = (1, 5, 6, 4)$, (b) $\mathcal{A}(1, 2, 4) = (12, 3, 5, -8)$, (c) $\mathcal{A}(1, 2, 4) = (19, 9, 9, -12)$,

→ (d) $\mathcal{A}(1, 2, 4) = (2, 1, 3, 1)$, (e) $\mathcal{A}(1, 2, 4) = (-4, -3, 5, -5)$.

7.118.[4] **Řešení.**

→ (a) Matice obsahují vektory $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1)$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_2)$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_3)$, zapsány do sloupců. Tyto vektory jsou přímo dány, takže není nutné nic počítat.

→ (b) $\mathbf{A}_{(S_3,B)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ je maticí přechodu od standarní báze (S_3) k (B), neboli matice indentity vzhledem k bázím (B), (S_3). Abych získal matici zobrazení vzhledem k (S_3), (S_4), využiji $\mathcal{A} = \mathcal{A} \circ \mathcal{I}$ a využiji toho, že matice identity vzhledem k bázím (S_3), (B) je $\mathbf{A}^{-1}_{(S_3,B)} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Nechť $\mathbf{B}$ je maticí $\mathcal{A}$ vzhledem bázi (B) a (S_4), kterou už znám z případu a). Pak hledaná matice je $\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}_{(S_3,B)}$. Pro jednotlivé případy vychází matice zobrazení takto: a] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b] $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, c] $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, d] $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, e] $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -8 \\ -2 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 8 \\ 6 & 6 & -12 \end{pmatrix}$. Po vynásobení vypočtené matice s vektorem $(1, 2, 4)^T$ dostávám výsledky stejné jako v cvičení 7.117

7.119.[3] **Řešení.**

→ (a) $\operatorname{def}\mathcal{A} = 0$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = 3$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\boldsymbol{o}\}$, báze $\mathcal{A}(\mathbf{R}^3)$ je například $\{\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_2), \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_3)\}$,

→ (b) $\operatorname{def}\mathcal{A} = 0$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = 3$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\boldsymbol{o}\}$, báze $\mathcal{A}(\mathbf{R}^3)$ je například $\{\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_2), \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_3)\}$,

→ (c) $\operatorname{def}\mathcal{A} = 1$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = 2$, řeším homogenní soustavu s maticí c] z předchozího cvičení, takže $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \langle(1, -1, 1)\rangle$, báze $\mathcal{A}(\mathbf{R}^3)$ je například $\{\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_2)\}$, protože tyto vektory jsou lineárně nezávislé,

→ (d) $\operatorname{def}\mathcal{A} = 2$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = 1$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \langle(1, 0, 1), (0, 1, 2)\rangle$, báze $\mathcal{A}(\mathbf{R}^3)$ je například $\{(2, 1, 3, 1)\}$,

→ (e) $\operatorname{def}\mathcal{A} = 0$, $\operatorname{hod}\mathcal{A} = 3$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\boldsymbol{o}\}$, báze $\mathcal{A}(\mathbf{R}^3)$ je například $\{\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_2), \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_3)\}$.

7.120.[4] **Řešení.** Vzhledem k tomu, že $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 0)$, $(2, 0, 1)$ jsou lineárně nezávislé, tvoří bázi $\mathbf{R}^3$ a každý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3$ je možné jednoznačně zapsat jako lineární kombinaci této báze: $\boldsymbol{x} = \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 2, 0) + \gamma(2, 0, 1)$. Tedy $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}(\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 2, 0) + \gamma(2, 0, 1)) = \alpha\mathcal{A}(1, 1, 1) + \mathcal{A}(\beta(1, 2, 0) + \gamma(2, 0, 1)) = \alpha\mathcal{A}(1, 1, 1) + \boldsymbol{o} = \alpha\mathcal{A}(1, 1, 1)$.

→ (a) $\operatorname{def}\mathcal{A} = 2$, (b) $\operatorname{hod}\mathcal{A} = \dim\mathbf{R}^3 - \operatorname{def}\mathcal{A} = 3 - 2 = 1$,

→ (d) Soustava pro α, β, γ má matici $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 1 & 2 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -2x_1+x_2+4x_3 \\ 1 & 2 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right)$, takže $\alpha = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3$ a $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3\right)\mathcal{A}(1,1,1) = \left(-\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3\right)(3,2)$

→ (c) vzorec pro složky obrazu vypočítaný v d) využiji při sestavení matice: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -4/3 & 2/3 & 8/3 \end{pmatrix}$.

7.121.[3] **Řešení.** Množina $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_d, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_h$ má podle věty 7.53 tolik vektorů, jako je $\dim L_1$. Protože je lineárně nezávislá, tvoří tato množina bázi prostoru L_1. Jsou známy všechny hodnoty $\mathcal{A}$ na této bázi, takže podle věty 7.27 je zobrazení $\mathcal{A}$ určeno jednoznačně.

7.122.[3] **Řešení.** $\mathbf{A}$ značí matici zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k (B), (C). Dále označím $(B') = (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3)$ a $(C') = (\boldsymbol{c}_1 + 2\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1)$, $\mathbf{A}_{(B,B')}$ je matice přechodu od (B) k (B') a analogicky značím matice $\mathbf{A}_{(B',B)}$, $\mathbf{A}_{(C,C')}$ a $\mathbf{A}_{(C',C)}$. Podle věty 7.59 je $\mathbf{A}_{(C',C)} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_{(B,B')}$ hledaná matice zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázím (B'), (C'). Je $\mathbf{A}_{(B,B')} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_{(C,C')} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, takže $\mathbf{A}_{(C',C)} = \mathbf{A}^{-1}_{(C,C')} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ a hledaná matice je $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

7.123.[3] **Řešení.** Značení: $\mathbf{A}$: daná matice vzhledem k bázím (B_3), (B_2), dále (S_2), resp. (S_3): standardní báze v $\mathbf{R}^2$, resp. v $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{A}_{(S_2,B_2)}$: matice přechodu od (S_2) k (B_2) (ve sloupcích má složky báze (B_2)), $\mathbf{A}_{(S_3,B_3)}$: matice přechodu od (S_3) k (B_3) (ve sloupcích má složky báze (B_3)).

→ (a) Podle věty 7.59 je hledaná matice přechodu vzhledem ke standardním bázím rovna:
$\mathbf{A}_S = \mathbf{A}_{(S_2,B_2)} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_{(B_3,S_3)} = \mathbf{A}_{(S_2,B_2)} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}_{(S_3,B_3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

→ (b) Dané báze označím (B'_3) a (B'_2). $\mathbf{A}(S_2, B'_2)$ má ve sloupcích složky báze (B'_2) a $\mathbf{A}(S_3, B'_3)$ má ve sloupcích složky báze (B'_3). Podle věty 7.59 je hledaná matice přechodu vzhledem k bázím (B'_3), (B'_2) rovna: $\mathbf{A}_{(B'_2,S_2)}\mathbf{A}_S\mathbf{A}_{(S_3,B'_3)} = \mathbf{A}^{-1}_{(S_2,B'_2)}\mathbf{A}_S\mathbf{A}_{(S_3,B'_3)} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 11 & 12 & 1 \\ 15 & 12 & 13 \end{pmatrix}$.

7.124.[3] **Řešení.** Cvičení 7.122: $\operatorname{hod}\mathcal{A} = \operatorname{hod}\mathbf{A} = 2$, $\operatorname{def} = 3 - \operatorname{hod}\mathcal{A} = 1$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \langle -6\boldsymbol{b}_1 + 3\boldsymbol{b}_2 + 2\boldsymbol{b}_3 \rangle$, Cvičení 7.123: $\operatorname{hod}\mathcal{A} = \operatorname{hod}\mathbf{A} = 2$, $\operatorname{def} = 3 - \operatorname{hod}\mathcal{A} = 1$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \langle (2,3,-2) \rangle$ (řeším soustavu $\mathbf{A}_S\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$).

7.125.[3] **Řešení.** Standardní báze $P_{\leq 2}$ je $(1, x, x^2)$. Označím $\mathbf{A}_S$ matici daného zobrazení vzhledem ke standardním bázím, (B) a (C) dané báze, $A_{(S,B)}$ matici přechodu od standardní báze k (B) (a podobně ostatní matice přechodu). Hledanou matici zobrzení vzhledem k bázím (B) a (C) označím $\mathbf{X}$. Platí $\mathbf{X} = \mathbf{A}_{(C,S)}\mathbf{A}_S\mathbf{A}_{(S,B)}$.

Cvičení 7.100: podle výsledku cvičení 7.105 případ b) je $\mathbf{A}_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

→ (a) $\mathbf{A}_{(S,B)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_{(S,C)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}_{(S,C)}\mathbf{A}_S\mathbf{A}_{(S,B)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A}_S\mathbf{A}_{(S,B)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

→ (b) $\mathbf{A}_{(S,B)} = \mathbf{A}_{(S,C)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}_{(S,C)}\mathbf{A}_S\mathbf{A}_{(S,B)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Shodou okolností je $\mathbf{X} = \mathbf{A}_S$.

Cvičení 7.106: Podle 7.106 případ c) je $\mathbf{A}_S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

→ (a) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

→ (c) Podle cvičení 7.105 případ c) je $\mathbf{A}_S = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$. Dále $\mathbf{A}_{(S,B)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{A}_{(S,C)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{A}_{(C,S)} = \mathbf{A}^{-1}_{(S,C)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \mathbf{A}_{(C,S)}\mathbf{A}_S\mathbf{A}_{(S,B)} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

7.126.[4] **Řešení.** Při pohledu na definiční rovnost $\big(\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_1), \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_2), \dots, \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n)\big) = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \dots, \boldsymbol{c}_m)\mathbf{A}$ jsou odpovědi nevšechny otázky zřejmé:

→ (a) prohodí se i-tý sloupcec s j-tým, (b) prohodí se i-tý řádek s j-tým,

→ (c) i-tý sloupec je vynásoben konstantou α, (d) i-tý řádek je vydělen konstantou α,

→ (e) přičte se i-tý sloupec k j-tému, (f) přičte se i-tý řádek k j-tému.

7.127.[3] **Řešení.** Může. Například matice identity vzhledem ke standardním bázím je $\mathbf{E}$. Prohodím-li v první bázi dva prvky a ve druhé stejné dva prvky, dostávám jiné uspořádané báze, ale podle předchozího cvičení tato změna bází způsobí prohození řádků a stejných sloupců, čímž ale dostávám znovu matici $\mathbf{E}$. Jiný příklad najdeme ve cvičeni 7.125.

7.128.[5] **Řešení.**

→ (a) žádné z těchto zobrazení nemůže být na, protože $\mathcal{A}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, není tedy izomorfismus. b] je prosté, c]+f] je prosté (má nulové jádro), g]+h] není prosté,

→ (b) a] je prosté, na, izomorfismus, b] je prosté pro $\alpha \neq 0$, pak je na a je izomorfismus, c]+d] pro $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$ není lineární, pro $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ c] není prosté, není na, není izomorfismus, d] je prosté, na, izomorfismus,

→ (c) není prosté, není na, není izomorfismus, (d) a]+c] je prosté, není na, není izomorfismus,

→ (e) není prosté, není na, není izomorfismus,

→ (f) a] je prosté, na, izomorfismus, b] není prosté, není na, není izomorfismus, c] není prosté, je na, není izomorfismus, d] je prosté, není na, není izomorfismus, e] není prosté, je na, není izomorfismus, f] je prosté, na, izomorfisus, g]+h] není prosté, není na, není izomorfismus, i] není prosté, je na, není izomorfismus, j] je prosté, není na, není izomorfismus,

→ (g) je prosté, není na, není izomorfismus, (h) je prosté, je na, je izomorfismus,

→ (i)[3] a] není prosté, není na, není izomorfismus, b]+c]+d] není prosté, je na, není izomorfismus, e] je prosté, je na, je izomorfismus, h] není prosté, není na, není izomorfismus,

→ (j) a]+b]+c]+d] není prosté, je na, není izomorfismus,

→ (k) zobrazení nemůže být na a tedy nemůže být izomorfismus, protože $\mathcal{A}\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, a]+b]+e] je prosté, c]+d] není prosté,

→ (l) není prosté, není na, není izomorfismus.

7.129.[4] **Řešení.**

→ (a) $\mathcal{B}(\boldsymbol{x}) = \big(\mathcal{A}_s(\mathcal{A}_b(\boldsymbol{x})\big)$, matice zobrazení $\mathcal{B}$ vzhledem ke standardním bázím je $\mathbf{B} = \mathbf{A}_a \cdot \mathbf{A}_b = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 10 \\ 8 & 16 \end{smallmatrix}\right)$, z toho plyne, že $\mathcal{B}(x_1, x_2) = (5x_1 + 10x_2, 8x_1 + 16x_2)$, $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \langle(2, -1)\rangle$, $\operatorname{def}\mathcal{B} = 1$, $\operatorname{hod}\mathcal{B} = 1$,

→ (b) $\mathbf{B} = \mathbf{A}_b \cdot \mathbf{A}_a = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 8 \\ 10 & 16 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathcal{B}((x_1, x_2) = (5x_1 + 8x_2, 10x_1 + 16x_2)$, $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \langle(-8, 5)\rangle$ $\operatorname{def}\mathcal{B} = 1$, $\operatorname{hod}\mathcal{B} = 1$,

→ (c) $\mathbf{B} = \mathbf{A}_a \cdot \mathbf{A}_c = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 8 & 13 & 18 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathcal{B}(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 + 8x_2 + 11x_3, 8x_1 + 13x_2 + 18x_3)$, $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \langle(-1, 2, -1)\rangle$, $\operatorname{def}\mathcal{B} = 1$, $\operatorname{hod}\mathcal{B} = 2$,

→ (d) nedefinováno,

→ (e) $\mathbf{B} = \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{A}_d = \left(\begin{smallmatrix} 11 & 17 \\ 15 & 24 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathcal{B}(x_1, x_2) = (11x_1 + 17x_2, 15x_1 + 24x_2)$, $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \{\boldsymbol{o}\}$, $\operatorname{def}\mathcal{B} = 0$, $\operatorname{hod}\mathcal{B} = 2$,

→ (f) $\mathbf{B} = \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 11 \\ 11 & 18 & 25 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \langle(-1, 2, -1)\rangle$, $\operatorname{def}\mathcal{B} = 1$, $\operatorname{hod}\mathcal{B} = 2$,

→ (g) $\mathcal{B} = \mathcal{A}_e$, (h) nedefinováno,

→ (i) $\mathbf{B} = \mathbf{A}_h \cdot \mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 14 & 22 \\ 14 & 22 \\ 21 & 33 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}(x_1, x_2) = (7x_1 + 11x_2, 14x_1 + 22x_2, 14x_1 + 22x_2, 21x_1 + 33x_2)$, $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \langle(-11, 7)\rangle$, $\operatorname{def}\mathcal{B} = 1$, $\operatorname{hod}\mathcal{B} = 1$,

→ (j) $\mathbf{B} = \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{A}_j = \left(\begin{smallmatrix} 20 \\ 29 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathcal{B}(x_1) = (20x_1, 29x_1)$, $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \{0\}$, $\operatorname{def}\mathcal{B} = 0$, $\operatorname{hod}\mathcal{B} = 1$.

7.130.[4] **Řešení.** Matice daných zobrazení vzhledem ke standardním bázím $(1, x, x^2)$ označím $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$. Podle výsledku cvičení 7.105 případ b) je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dle výsledku téhož cvičení, případ c) je $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ a končně podle výsledku cvičení 7.106 je $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

→ (a) nedefinováno (zobrazení $\mathcal{A}$ bylo definováno jen na $P_{\leq 2}$, zatímco obor hodnot zobrazení $\mathcal{B}$ je $P_{\leq 3}$),

→ (b) matice: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, takže $(\mathcal{A} \circ \mathcal{C})(ax^2 + bx + c) = (2a + 2c)x$, můžeme na to jít jinak: $(\mathcal{A} \circ \mathcal{C})(ax^2 + bx + c) = \mathcal{A}\big(\mathcal{C}(ax^2 + bx + c)\big) = \mathcal{A}\big((a + c)x^2 - b\big) = \big((a + c)x^2 - b\big)' = 2(a + c)x$, $\operatorname{Ker} = \langle x^2 - 1, x\rangle$, $\operatorname{def} = 2$, $\operatorname{hod} = 1$,

→ (c) matice: $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, takže $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(ax^2 + bx + c) = ax^2 + bx$, to odpovídá zderivovanému a následně zintegrovanému polynomu, $\operatorname{Ker} = \langle 1\rangle$, $\operatorname{def} = 1$, $\operatorname{hod} = 2$,

→ (d) matice $\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, takže $(\mathcal{C} \circ \mathcal{A})(ax^2 + bx + c) = bx^2 - 2a$, $\operatorname{Ker} = \langle 1\rangle$, $\operatorname{def} = 1$, $\operatorname{hod} = 2$,

→ (e) matice: $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$, takže $(\mathcal{B} \circ \mathcal{C} \circ \mathcal{A})(ax^2 + bx + c) = \frac{1}{3}bx^3 - 2ax$, $\operatorname{Ker} = \langle 1\rangle$, $\operatorname{def} = 1$, $\operatorname{hod} = 2$.

7.131.[3] **Řešení.**
→ (a) $\mathcal{B}(a_1,a_2,a_3,\dots)=(a_1,a_3,a_5,0,0,\dots)$, $\operatorname{Ker}\mathcal{B}=\{(0,a_2,0,a_4,0,a_6,a_7,a_8,\dots),a_i\in\mathbf{R}\}$, $\operatorname{def}\mathcal{B}=\infty$, $\operatorname{hod}\mathcal{B}=3$,
→ (b) $\mathcal{B}(a_1,a_2,a_3,\dots)=(a_1,a_3,0,0,\dots)$, $\operatorname{Ker}\mathcal{B}=\{(0,a_2,0,a_4,a_5,a_6,\dots),a_i\in\mathbf{R}\}$, $\operatorname{def}\mathcal{B}=\infty$, $\operatorname{hod}\mathcal{B}=2$,
→ (c) $\mathcal{B}(a_1,a_2,a_3,\dots)=(a_1-a_2+a_3-a_4,a_5-a_6+a_7-a_8,\dots)$,
$\operatorname{Ker}\mathcal{B}=\langle(1,1,0,0,0,0\dots),(-1,0,1,0,0,0,\dots),(1,0,0,1,0,0,\dots),(0,0,0,0,1,1,0,0,0,0\dots),$
$(0,0,0,0,-1,0,1,0,0,0,\dots),(0,0,0,0,1,0,0,1,0,0,\dots),\dots\rangle$, $\operatorname{def}\mathcal{B}=\infty$, $\operatorname{hod}\mathcal{B}=\infty$,
→ (d) $\mathcal{B}(a_1,a_2,a_3,\dots)=(a_1+a_2-a_3-a_4,a_5+a_6-a_7-a_8,\dots)$,
$\operatorname{Ker}\mathcal{B}=\langle(-1,1,0,0,0,0\dots),(1,0,1,0,0,0,\dots),(1,0,0,1,0,0,\dots),(0,0,0,0,-1,1,0,0,0,0\dots),$
$(0,0,0,0,1,0,1,0,0,0,\dots),(0,0,0,0,1,0,0,1,0,0,\dots),\dots\rangle$, $\operatorname{def}\mathcal{B}=\infty$, $\operatorname{hod}\mathcal{B}=\infty$,
→ (e) $\mathcal{B}(a_1,a_2,a_3,\dots)=(a_4,2a_5,3a_6,\dots)$, $\operatorname{Ker}\mathcal{B}=\{a_1,a_2,a_3,0,0,0,\dots),a_i\in\mathbf{R}\}$, $\operatorname{def}\mathcal{B}=3$, $\operatorname{hod}\mathcal{B}=\infty$,
→ (f) $\mathcal{B}(a_1,a_2,a_3,a_4,\dots)=(4a_4,5a_5,6a_6,\dots)$, $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$, $\operatorname{def}\mathcal{B}$, $\operatorname{hod}\mathcal{B}$ jako v e), (g) =e)
→ (h) $\mathcal{B}(a_1,a_2,a_3,a_4,\dots)=(a_2+a_3,a_2+a_3,a_2+a_3,\dots)$, $\operatorname{Ker}\mathcal{B}=\{(a_1,a_2,-a_2,a_4,a_5,a_6,\dots),a_i\in\mathbf{R}\}$, $\operatorname{def}\mathcal{B}=\infty$, $\operatorname{hod}\mathcal{B}=1$,
→ (i) $\mathcal{B}(a_1,a_2,\dots)=(a_2-a_3,2a_2-2a_3,3a_2-3a_3,4a_2-4a_3,\dots)$, $\operatorname{Ker}\mathcal{B}=\{(a_1,a_2,a_2,a_4,a_5,a_6,\dots),a_i\in\mathbf{R}\}$, $\operatorname{def}\mathcal{B}=\infty$, $\operatorname{hod}\mathcal{B}=1$.

7.132.[3] **Řešení.**
→ (a) $\mathcal{A}_\varphi(x+x',y+y')=\big((x+x')\cos\varphi-(y+y')\sin\varphi,(x+x')\sin\varphi+(y+y')\cos\varphi\big)=$
$(x\cos\varphi-y\sin\varphi,x\sin\varphi+y\cos\varphi)+(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)=\mathcal{A}_\varphi(x,y)+\mathcal{A}_\varphi(x',y')$,
α-násobek analogicky.
→ (c) $\mathbf{A}_\varphi=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$,
→ (b) protože $\det\mathbf{A}=1\neq0$, je $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_\varphi=\{\boldsymbol{o}\}$, $\operatorname{def}\mathcal{A}_\varphi=0$, $\operatorname{hod}\mathcal{A}_\varphi=2$,
→ (d) $\mathbf{A}=\mathbf{A}_{\varphi_2}\cdot\mathbf{A}_{\varphi_1}=\begin{pmatrix}\cos(\varphi_1+\varphi_2) & -\sin(\varphi_1+\varphi_2)\\ \sin(\varphi_1+\varphi_2) & \cos(\varphi_1+\varphi_2)\end{pmatrix}=\mathbf{A}_{\varphi_1+\varphi_2}$ (užitím součtových vzorců),
→ (e) zobrazeni $\mathcal{A}_\varphi$ otočí bod (x,y) kolem počátku o úhel φ v kladném směru otáčení.

7.133.[3] **Řešení.**
→ (b) $\mathbf{B}_s=\begin{pmatrix}s&0\\0&s\end{pmatrix}$,
→ (a) pro $s\neq0$ je $\det\mathbf{B}_s\neq0$, takže $\operatorname{Ker}\mathcal{B}_s=\{\boldsymbol{o}\}$, $\operatorname{def}\mathcal{B}_s=0$, $\operatorname{hod}\mathcal{B}_s=2$,
pro $s=0$ je $\operatorname{Ker}\mathcal{B}_s=\mathbf{R}^2$, $\operatorname{def}\mathcal{B}_s=2$, $\operatorname{hod}\mathcal{B}_s=0$,
→ (c) $\mathbf{B}=\mathbf{B}_{s_2}\cdot\mathbf{B}_{s_1}=\mathbf{B}_{s_1s_2}$
→ (d) matice $\mathcal{A}_\varphi\circ\mathcal{B}_s$: $\mathbf{A}_\varphi\cdot\mathbf{B}_s=s\mathbf{A}_\varphi$, matice $\mathcal{B}_s\circ\mathcal{A}_\varphi$: $\mathbf{B}_s\cdot\mathbf{A}_\varphi=s\mathbf{A}_\varphi$,
→ (e) bod (x,y) se posune do bodu (sx,sy), tj. pro $s>1$ se posune do bodu na stejné polopřímce vycházející z počátku, ale dál od počátku. Zobrazuji-li celé množiny bodů, pak tyto množiny se „zvětší“ s-krát. Při $s\in(0,1)$ se „zmenší“, při $s=-1$ se otočí kolem počátku o 180° a obecně při $s<0$ se množina bodů otočí o 180° a ještě zvětší/zmenší. Složená zobrazení z d) množiny bodů otáčejí o obecný úhel φ a zvětšují/zmenšují s-krát. Je názorné, že nezáleží na pořadí těchto operací.
→ (f) $\mathbf{A}_\pi=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\mathbf{B}_{-1}$, obě zobrazení otáčejí kolem počátku o 180°.

7.137.[2] **Řešení.**
→ (a) $h_w(0,0)=(0,0,w)\neq\boldsymbol{o}$, (a) (pokračování) Je-li $(a,b)\neq(x,y)$, pak také $(a,b,w)\neq(wx,wy,w)$,
→ (b) $h^{-1}\circ h_w(x,y)=h^{-1}(wx,wy,w)=(x,y)$, (c) zřejmé.

7.138.[1] **Řešení.**
→ (a) $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\1\end{pmatrix}$, analogicky ostatní matice díky poslednímu řádku ve tvaru $(0,0,1)$.
→ (b) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\xrightarrow{h_1}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cos\varphi-y\sin\varphi\\ x\sin\varphi+y\cos\varphi\\ 1\end{pmatrix}\xrightarrow{h^{-1}}\begin{pmatrix}x\cos\varphi-y\sin\varphi\\ x\sin\varphi+y\cos\varphi\end{pmatrix}$, nový bod je otočen vůči původnímu (x,y) o úhel φ kolem počátku. (c) analogicky jako b),
→ (d) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\xrightarrow{h_1}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&t_1\\0&1&t_2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+t_1\\y+t_2\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{h^{-1}}\begin{pmatrix}x+t_1\\y+t_2\end{pmatrix}$.

7.139.[1] **Řešení.** $T_2\circ T_1=h^{-1}\circ\mathcal{A}_2\circ h_1\circ h^{-1}\circ\mathcal{A}_1\circ h_1=h^{-1}\circ\mathcal{A}_2\circ\mathcal{A}_1\circ h_1$ a toto zobrazení má v homogenních souřadnicích matici $\mathbf{A}_2\cdot\mathbf{A}_1$. Při úpravě jsem využil toho, že $h_1\circ h^{-1}$ je identita na množině $W_1=h_1(\mathbf{R}^2)$.

7.141.[1] **Řešení.** doplním později.

7.142.[1] **Řešení.** doplním později.

7.143.[1] **Řešení.** doplním později.

7.144.^{1} **Řešení.** doplním později.

7.145.^{1} **Řešení.** doplním později.

7.146.^{1} **Řešení.** doplním později.

7.148.^{1} **Řešení.** doplním později.

7.149.^{1} **Řešení.** doplním později.

7.150.^{1} **Řešení.** doplním později.

7.151.^{1} **Řešení.** doplním později.

7.152.^{1} **Řešení.** doplním později.

7.153.^{0} **Řešení.** Aspoň částečně je vidět 49 motýlů. Dohromady jich bylo vykresleno 50, jeden po ořezu skript zůstal zcela mimo obrázek. Jeden motýl je umístěn do souřadného systému tak, že má počátek souřadného systému po své pravici (pravém křídle) ve vzdálenosti zhruba 0,7 rozpětí křídel. Stačí, když se podívám na jednoho motýla z obrázku a počátek vzhledem k němu je ve středu spirály. Každý následující motýl je vzhledem k předchozímu otočen kolem počátku o 32 stupňů a zvětšen 1,1krát. V jazyku tiskáren PostScriptu, ve kterém byl obrázek do skript připraven, existují pro tyto geometrické transformace operátory `rotate` a `scale`. Můj syn Miroslav, který na můj návrh obrázek v PostScriptu programoval, použil zhruba následující kód:

```
%!PS-Adobe-2.0
%%Creator: Miroslav Olsak
/motyl { gsave tady jsou příkazy na vykreslení jednoho motýla... grestore
       } bind def
50 { motyl -32 rotate 1.1 1.1 scale } repeat
```

7.154.^{4} **Řešení.** $\mathbf{Q}(\mathbf{AQ})\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{QA}(\mathbf{QQ}^{-1}) = \mathbf{QA}$.

7.155.^{4} **Řešení.** Je $\mathbf{B} = \mathbf{PAP}^{-1}$, kde $\mathbf{P}$ je regulární. $\mathbf{B}^2 = (\mathbf{PAP}^{-1})(\mathbf{PAP}^{-1}) = \mathbf{PA}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P})\mathbf{AP}^{-1}) = \mathbf{PA}^2\mathbf{P}^{-1}$.

7.156.^{3} **Řešení.** Nechť $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ a $\mathbf{P}_3$ jsou matice z příkladu 3.54. Pak $\mathbf{P}_1\mathbf{A}$ je jako matice $\mathbf{A}$, ale jsou prohozeny řádky i-tý s j-tým. Dále $(\mathbf{P}_1\mathbf{A})\mathbf{P}_1$ je matice, která vznikla z matice $\mathbf{P}_1\mathbf{A}$ prohozením i-tého sloupce s j-tým. Takže

→ (a) $\mathbf{B} = \mathbf{P}_1\mathbf{AP}_1$ a protože $\mathbf{P}_1^{-1} = \mathbf{P}_1$, je $\mathbf{B} = \mathbf{P}_1\mathbf{AP}_1^{-1}$, takže $\mathbf{B}$ je podobná s $\mathbf{A}$.

→ (b) Matice $\mathbf{P}_2\mathbf{A}$ má oproti matici $\mathbf{A}$ pronásobený i-tý řádek konstantou α, matice $\mathbf{P}_2\mathbf{AP}_2^{-1}$ se navíc liší vynásobením i-tého sloupce konstantou α a je zřejmě podobná s maticí $\mathbf{A}$.

→ (c) Matice $\mathbf{P}_3\mathbf{A}$ obsahuje řádkovou úpravu matice $\mathbf{A}$ dle zadání. Matice $\mathbf{P}_3^{-1}$ je analogicky vyhlížející matice, jen místo prvku α obsahuje prvek $-\alpha$, takže matice $\mathbf{P}_3\mathbf{AP}_3^{-1}$ obsahuje navíc popsanou sloupcovou úpravu a je podobná s maticí $\mathbf{A}$.

7.157.^{3} **Řešení.** Jedna matice přejde v druhou po prohození sloupců a následně prohození řádků. To přesně odpovídá případu a) cvičení 7.156, takže matice jsou podobné. $\mathbf{B} = \mathbf{PAP}^{-1}$, kde $\mathbf{P} = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$.

7.158.^{3} **Řešení.** Prohazuje se první řádek s posledním a první sloupcec s posledním, dále druhý řádek s předposledním, druhý sloupec s předposledním, atd. až ke „středu matice“. To odpovídá opakovanému použití případu a) cvičení 7.156.

7.159.^{4} **Řešení.** Označím danou matici $\mathbf{A}$. Je $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = (a - \lambda)^n$, tj. matice má n-násobné vlastní číslo a. Vlastní vektory jsou řešením homogenní soustavy s maticí $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$, prostor řešení je $\langle(1, 0, 0, \dots, 0)\rangle$, takže matice má jediný lineárně nezávislý vlastní vektor a pouze jedno n-násobné vlastní číslo.

7.160.^{4} **Řešení.** Je-li 0 vlastní číslo matice $\mathbf{A}$, pak musí být $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \mathbf{A} - 0\mathbf{E} = \mathbf{A}$ singulární. Je-li $\mathbf{A}$ singulární, pak $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ pro $\lambda = 0$, takže nula je vlastní číslo.

7.161.^{5} **Řešení.** Jednotlivá vlastní čísla mají za dvojtečkou příslušné vlastní vektory. Násobnost větší než 1 je vyjádřena znakem $(k\times)$. Všimněte si, že některá vlastní čísla mají méně lin. nezávislých vlastních vektorů než je jejich násobnost. To nastává právě tehdy, když matice není podobná s diagonální maticí.

→ (a) $1\colon (1, 0, 1)$, $2\colon (0, 1, -1)$, $3\colon (2, 0, 2)$,

→ (b) $2(3\times)\colon (0, 1, 0)$,

→ (c) $1\colon (1, 0, 1)$, $2 \pm 3i\colon (2 \pm 2i, -2 \pm i, 3)$,

→ (d) $2\colon (2,-1,1)$, $\pm\sqrt{3}\colon ((\mp 1659 + 955\sqrt{3})/d, (\pm 147 - 79\sqrt{3})(\mp 21 + \sqrt{3})/2d, 1))$, kde $d = 3(11\sqrt{3} \mp 20)(\sqrt{3} \mp 21)$,
→ (e) $1\colon (-2,1,0)$, $2\colon (0,-2,1)$, $3\colon (1,0,0)$,
→ (f) $1\colon (-1,1,-1)$, $0(2\times)\colon (2,1,1)$,
→ (g) $1(2\times)\colon (0,1,2)$, $(2,1,0)$, $-1\colon (3,5,6)$,
→ (h) $1(3\times)\colon (1,-5,3)$,
→ (i) $1\colon (2,-1,1)$, $2 \pm i\colon (1 \mp i, -2 \mp 2i, 1)$,
→ (j) $1(2\times)\colon (0,2,-1)$, $-1\colon (0,1,0)$,
→ (k) $p(3\times)\colon (0,1,0)$, $(0,0,1)$, pro $p = 0$ m8 vl. číslo 0 libovolný vl. vektor,
→ (l) $1(4\times)\colon (0,0,1,0)$, $(3,1,0,1)$.

7.162.[4] **Řešení.**
→ (a) podobné diagonální matici jsou určitě ty matice, které mají různá vlastní čísla, tedy a], c], d], e], i]. Dále jsou podobné diagonální matici ty matice, které mají násobnost vl. čísla rovnou dimenzi odpovídajícího prostoru vlastních vektorů, tj. g]. Ostatní matice b], f], h], j], k]. l] nejsou podobné s diagonální maticí.
→ (b) Matice musejí mít stejné spektrum jednonásobných vlastních čísel: a] je podobná s e].

7.163.[4] **Řešení.**
→ (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$, (c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2+2i & 2-2i \\ 0 & -2+i & -2-i \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2+2i & 2-2i \\ 0 & -2+i & -2-i \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$,
→ (d) matici $\mathbf{P}$ si zapíše jen ten, kdo má obří trpělivost, (e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$,
→ (g) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$, (i) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1-i & 1+i \\ -1 & -2-2i & -2+2i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1-i & 1+i \\ -1 & -2-2i & -2+2i \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

7.164.[5] **Řešení.** Není to jiná vlastnost. Je to jen jiné značení matice $\mathbf{P}$. Nová $\mathbf{P}_1$ je rovna původní $\mathbf{P}^{-1}$.

7.165.[4] **Řešení.** $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda(\lambda - (1+p))$, $\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) = \lambda(\lambda - 3)$, takže jtejná vlastní čísla mají matice pro $p = 2$.

7.166.[4] **Řešení.** Je potřeba zjistit, pro která $p \in \mathbf{R}$ má daná matice charakteristický polynom s reálnými kořeny. Protože pro matice typu $(2,2)$ je charakteristický polynom kvadratický, hledám taková $p \in \mathbf{R}$, pro něž má tento kvadratický polynom nezáporný diskriminant.
→ (a) pro všechna $p \in \mathbf{R}$,
→ (b) $p \leq 1$.

7.167.[3] **Řešení.**
→ (a) $\mathbf{A}$ je podobná $\mathbf{D}$, $\mathbf{A}^2$ je podobná s $\mathbf{D}^2$, protože $\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$, je $\mathbf{A}$ podobná s $\mathbf{D}^2$, což je také diagonální matice (obsahuje kvadráty vlastních čísel). Protože $\mathbf{D}^2$ je podobná s $\mathbf{A}$, také obsahovat přímo vlastní čísla matice $\mathbf{A}$. Vlastní čísla se musejí rovnat svým kvadrátům, takže všechna vlastní čísla musejí být rovny jedné. $\mathbf{D} = \mathbf{E}$. **Poznámka.** Protože $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1} = \mathbf{PEP}^{-1} = \mathbf{E}$, je patrné, že idempotentních matic, které jsou zároveň podobné diagonální matici, není mnoho. Je to pouze jednotková matice.
→ (b) Kvadráty všech vlastních čísel se musejí rovnat jedné, takže vlastní čísla mohou být ± 1. Matice $\mathbf{D}$ obsahuje čísla ± 1.

7.168.[3] **Řešení.**
→ (a) $\mathbf{B} = \mathbf{PAP}^{-1}$, pak $\mathbf{B}^n = \mathbf{PAP}^{-1}\mathbf{PAP}^{-1} \cdots \mathbf{PAP}^{-1} = \mathbf{PA}^n\mathbf{P}^{-1}$,
→ (b) $\mathbf{B} = \mathbf{PAP}^{-1}$, pak $\alpha\mathbf{B} = \alpha\mathbf{PAP}^{-1} = \mathbf{P}(\alpha\mathbf{A})\mathbf{P}^{-1}$,
→ (c) $\mathbf{B} = \mathbf{PAP}^{-1}$, pak $\mathbf{B} + \mathbf{E} = \mathbf{PAP}^{-1} + \mathbf{E} = \mathbf{PAP}^{-1} + \mathbf{PEP}^{-1} = \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{P}^{-1}$,
→ (d) $\mathbf{B} = \mathbf{PAP}^{-1}$, pak $a\,\mathbf{B}^2 + b\,\mathbf{B} + c\,\mathbf{E} = a\,(\mathbf{PAP}^{-1})^2 + b\,\mathbf{PAP}^{-1} + c\,\mathbf{PEP}^{-1} =$
$\mathbf{P}(a\mathbf{A}^2)\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}(b\mathbf{A})\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}(c\mathbf{E})\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}(a\mathbf{A}^2 + b\mathbf{A} + c\mathbf{E})\mathbf{P}^{-1}$

7.169.[3] **Řešení.** Analogicky jako ve cvičení 7.168, případ d) lze ukázat, že je-li $\mathbf{A}$ podobná s $\mathbf{D}$, je $p(\mathbf{A})$ podobná s $p(\mathbf{D})$. Matice $p(\mathbf{D})$ je diagonální a je tvaru $\operatorname{diag}\bigl(p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_k)\bigr)$, jak lze snadno ověřit maticovým násobením.

8.42.[4] **Řešení.** (1) $xy = yx$, (2) $(x+y)z = xz + yz$, (3) $(\alpha x)y = \alpha(xy)$, (4) $x^2 \geq 0$, $x^2 = 0$ jen pro $x = 0$.

8.43.[3] **Řešení.** Není skalární součin, např. (2) $(xy)z \neq xz\,yz = xyz^2$.

8.44.[4] **Řešení.**

→ (a) (1) $a_nb_n+a_{n-1}b_{n-1}+\cdots+a_1b_1+a_0b_0 = b_na_n+b_{n-1}a_{n-1}+\cdots+b_1b_1+a_0b_0$, (2) $(a_n+b_n)c_n+(a_{n-1}+b_{n-1})c_{n-1}+\cdots+(a_1+b_1)c_1+(a_0+b_0)c_0 = a_nc_n+a_{n-1}c_{n-1}+\cdots+a_1c_1+a_0c_0+b_nc_n+b_{n-1}c_{n-1}+\cdots+b_1c_1+a_0c_0$, (3) $(\alpha a_n)b_n+(\alpha a_{n-1})b_{n-1}+\cdots+(\alpha a_1)b_1+(\alpha a_0)b_0 = \alpha(a_nb_n+a_{n-1}b_{n-1}+\cdots+a_1b_1+a_0b_0)$, (4) $a_n^2+a_{n-1}^2+\cdots+a_1^2+a_0^2 \ge 0$, přitom výraz je roven nule jen pro nulové polynomy.

→ (b) Je to speciální případ z 8.27. Je-li polynom nulový na intervalu $(0,1)$, je podle poznámky 11.12 nulový všude, tj. je to nulový polynom. Je tedy ověřena i vlastnost (4).

→ (c) Není splněn axiom (4), protože z $p^2(0)=0$ sice plyne $p(0)=0$, ale neplyne z toho, že p je nulový polynom.

→ (d) Je to skalární součin, ověřím analogicky jako v b).

→ (e) Je to skalární součin, axiomy (1) až (3) se ověří analogicky jako v a) a b), axiom (4): $a_0^2+\int_0^1 p(x)^2\mathrm{d}x \ge 0$ a výraz je roven nule jedině pro p nulový na intervalu $(0,1)$, což podle poznámky 11.12 je nulový polynom.

8.45.[3] **Řešení.**

→ (a) $\int_0^1(a_2x^2+a_1x+a_0)(b_2x^2+b_1x+b_0)\mathrm{d}x = a_2b_2/5+(a_2b_1+a_1b_2)/4+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)/3+(a_1b_0+a_0b_1)/2+a_0b_0$.

→ (b) $\int_1^3(a_2x^2+a_1x+a_0)(b_2x^2+b_1x+b_0)\mathrm{d}x = a_2b_2(3^5-1)/5+(a_2b_1+a_1b_2)(3^4-1)/4+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)(3^3-1)/3+(a_1b_0+a_0b_1)(3^2-1)/2+a_0b_0(3-1)$.

8.46.[2] **Řešení.**

→ (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/4 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 242/5 & 20 & 26/3 \\ 20 & 26/3 & 4 \\ 26/3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

8.47.[5] **Řešení.**

→ (a) Neplatí axiom (3): $\alpha^2x_1^2+y_1^2+\alpha x_2y_2+3\alpha x_3y_3 \ne \alpha(x_1^2+y_1^2+x_2y_2+3x_3y_3)$.

→ (b) Neplatí axiom (1): $x_1y_2+2x_2y_1 \ne y_1x_2+2y_2x_1$.

→ (c) Neplatí axiom (4): $x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2 \le 0$ pro $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=0$.

→ (d) Neplatí axiom (4): $x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2 = 0$ pro $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=0$,, přitom $(-1,1,0)$ není nulový vektor.

→ (e) Axiomy (1) až (3) ověřím analogicky jako v příkladu 8.8, axiom (4): ukážeme, že $2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2 > 0$ pro $x_i \ne 0$, zřejmě stačí ukázat $2x_1^2+x_2^2+2x_1x_2>0$, protože $x_3^2 \ge 0$. Volím $a = x_2/x_1$, tj. $x_2 = ax_1$, nerovnost přechází na $2x_1^2+a^2x_1^2+2ax_1^2 = x_1^2(a^2+2a+2) > 0$, což platí, protože diskriminant kvadratického polynomu v závorce je záporný.

8.48.[2] **Řešení.**

→ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8.49.[1] **Řešení.** Nechť $\boldsymbol{y} \ne \boldsymbol{o}$. $\|\boldsymbol{a}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2\,\|\boldsymbol{y}\|^2 - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2 \ge 0$, což je rozdíl kvadrátů levé a pravé strany Schwartzovy nerovnosti (výpočet $\|\boldsymbol{a}\|^2$ může sloužit jako alternativní důkaz nerovnosti). Nechť nejprve $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ jsou LZ. Pak existuje $\alpha \in \mathbf{R}$, že $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y}$, po dosazení vychází $\|\boldsymbol{a}\|^2 = 0$, takže místo nerovnosti máme rovnost. Nechť $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ jsou LN, pak $\boldsymbol{a} \ne \boldsymbol{o}$, protože $\boldsymbol{a}$ je netrivilání lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$. Tj. $\|\boldsymbol{a}\|^2 > 0$, takže v tomto případě Schwartzova nerovnost není rovností.

8.50.[5] **Řešení.** $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x})+\mathcal{A}(\boldsymbol{y})$ díky axiomu (1) a (2) skalárního součinu, $\mathcal{A}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ díky axiomu (3) skalárního součinu.

8.51.[4] **Řešení.** Axiom (1) skalárního součinu platí pro jakékoli zobrazení $\mathcal{A}$, axiomy (2) a (3) platí díky tomu, že $\mathcal{A}$ je lineární, axiom (4): $\mathcal{A}(\boldsymbol{x})\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = 0$ pouze pro nulový vektor $\boldsymbol{x}$, tj. $\mathcal{A}$ musí být prosté, neboli $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\boldsymbol{o}\}$. Buď je $L = \{\boldsymbol{o}\}$ nebo $\dim L = 1$.

8.52.[4] **Řešení.** (1) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \mathcal{A}(\boldsymbol{x})\cdot\mathcal{A}(\boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{y})\cdot\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$, (2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z} = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\mathcal{A}(\boldsymbol{z}) = \big(\mathcal{A}(\boldsymbol{x})+\mathcal{A}(\boldsymbol{y})\big)\cdot\mathcal{A}(\boldsymbol{z}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x})\cdot\mathcal{A}(\boldsymbol{z})+\mathcal{A}(\boldsymbol{y})\cdot\mathcal{A}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}$, (3) $(\alpha\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y} = \mathcal{A}(\alpha\boldsymbol{x})\cdot\mathcal{A}(\boldsymbol{y}) = \alpha\mathcal{A}(\boldsymbol{x})\cdot\mathcal{A}(\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$, (4) $\mathcal{A}(\boldsymbol{x})\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = 0$ pouze pro $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$ a to platí pouze pro $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ díky tomu, že $\mathcal{A}$ je prosté zobrazení.

8.53.[5] **Řešení.**

→ (a) $\|(1,2,2,1)\| = \sqrt{1^2+2^2+2^2+1^2} = \sqrt{10}$, $\|(2,1,1,0)\| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}$, úhel mezi vektory: $\arccos\frac{2+2+2}{\sqrt{60}}$, (b) $(1,2,2,1)\cdot(2,1,1,a) = 2+2+2+a = 0$, takže $a=-6$,

→ (c) $(1,2,2,1)\cdot(a,b,c,d) = 0$, $(2,1,1,0)\cdot(a,b,c,d) = 0$, $(2,1,0,1)\cdot(a,b,c,d) = 0$, hledaný vektor tedy řeší soustavu homog. rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, množina kolmých vektorů: $\langle(1,-2,0,3)\rangle$.

8.54.[4] **Řešení.** $4 = \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 - \big(\|\boldsymbol{x}\|^2 - 2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2\big) = 4(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$, takže $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 1$, dále $\frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}/(\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|) = 1/(\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|)$, takže $\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\| = 2$, neboli $\|\boldsymbol{x}\| = 2/\|\boldsymbol{y}\|$. Konečně $10 = \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 + \big(\|\boldsymbol{x}\|^2 - 2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2\big) = 2\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{y}\|^2 = 2(2/\|\boldsymbol{y}\|)^2 + 2\|\boldsymbol{y}\|^2 = 10$. Při označení $v = \|\boldsymbol{y}\|^2$ dostávám $v^2 - 5v + 4 = 0$, tato rovnice má dvě řešení $v = 4$ a $v = 1$, takže $\|\boldsymbol{y}\| \in \{1,2\}$ a $\|\boldsymbol{x}\| \in \{2,1\}$.

8.55.[5] **Řešení.** $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) = 0$.

8.56.[5] **Řešení.** $\|\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 - 4(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) + 4\|\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + 4\|\boldsymbol{b}\|^2$.

8.57.[4] **Řešení.** Neplatí, např.: $\big((1,0)\cdot(0,1)\big)\big((1,1)\cdot(1,1)\big) = 0$, ale $\big((1,0)\cdot(1,1)\big)\big((0,1)\cdot(1,1)\big) = 1$.

8.58.[4] **Řešení.** Průměr kružnice, na které je přepona trojúhelníka, tvoří vektory $\boldsymbol{u}$, $-\boldsymbol{u}$, k vrcholu trojúhelnika ze středu kružnice směřuje ještě vektor $\boldsymbol{v}$ (obrázek si nakreslí laskavý čtenář sám). Pak odvěsny trojúhelníka jsou tvořeny vektory $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$. Ověříme kolmost $(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{v}\|^2 - |\boldsymbol{u}\|^2 = 0$, protože $\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\| =$ poloměr kružnice.

8.59.[3] **Řešení.** Označím $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{d}$ vektory, které tvoří odpovídající strany čtyřúhelníka a $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ úhlopříčky tak, že $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. Je $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) = \|\boldsymbol{b}\|^2 - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = 0$. Dokazovaná rovnost $\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{c}\|^2 = \|\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\|^2$ je ekvivalentní s $0 = 2\|\boldsymbol{b}\|^2 - 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$, což je rovnost, která platí díky kolmosti úhlopříček.

8.60.[5] **Řešení.**

→ (a) Je $\boldsymbol{uv} = \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, podobně pro ostatní dvojice vektorů. $\|\boldsymbol{a}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + 4\|\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{w}\|^2 4\boldsymbol{uv} + 2\boldsymbol{uw} + 4\boldsymbol{vw} = 1 + 4 + 1 - \frac{1}{2}(4+2+4) = 1$, $\|\boldsymbol{b}\|^2 = 4\|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - 4\boldsymbol{uv} = 4 + 1 + 4\frac{1}{2} = 7$, $\|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{7}$, $\boldsymbol{ab} = (\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})(2\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = 2\|\boldsymbol{u}\|^2 + 3\boldsymbol{uv} - 2\|\boldsymbol{v}\|^2 + 2\boldsymbol{uw} - \boldsymbol{vw} = 2 - \frac{3}{2} - 2 - \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = -2$ úhel mezi $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ je $\arccos\frac{-2}{1\cdot\sqrt{7}}$.

→ (b) Velikosti $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ jsou 2, Úhly mezi nimi jsou 60°. $\boldsymbol{uv} = \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|\cos 60^\circ = 2$, stejně $\boldsymbol{uw}$, $\boldsymbol{vw}$. Počítám $\|\boldsymbol{a}\|^2 = 4\|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 + 25\|\boldsymbol{w}\|^2 - 4\boldsymbol{uv} + 20\boldsymbol{uw} - 10\boldsymbol{vw} = 112$, tj. $\|\boldsymbol{a}\| = 4\sqrt{7}$, $\|\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 + 2\boldsymbol{uv} = 12$, tj. $\|\boldsymbol{b}\| = 2\sqrt{3}$, $\boldsymbol{ab} = 2\|\boldsymbol{u}\|^2 + \boldsymbol{uv} - \|\boldsymbol{v}\|^2 + 5\boldsymbol{uw} + 5\boldsymbol{vw} = 26$, úhel mezi $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$: $\arccos\frac{26}{8\sqrt{3}\sqrt{7}}$.

→ (c) $\boldsymbol{uv} = 0$, $\boldsymbol{vw} = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{uw} = -\frac{1}{2}$, $\|\boldsymbol{a}\|^2 = 3$, $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{3}$, $\|\boldsymbol{b}\|^2 = 2$, $\|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{2}$, $\boldsymbol{ab} = 1/2$, úhel mezi $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ je $\arccos 1/\sqrt{24}$,

→ (d) $\|\boldsymbol{a}\|^2 = 2$, $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{2}$, $\|\boldsymbol{b}\|^2 = 5$, $\|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{5}$, $\boldsymbol{ab} = -2$, úhel $\arccos(-2/\sqrt{10})$.

8.61.[2] **Řešení.** Je $\int \cos ax \cos bx \mathrm{d}x = \sin((a-b)x)/2(a-b) + \sin((a+b)x)/2(a+b)$ pro $a \neq b$, $\int \sin ax \sin bx \mathrm{d}x = \sin((a-b)x)/2(a-b) - \sin((a+b)x)/2(a+b)$ pro $a \neq b$, $\int \sin ax \cos bx \mathrm{d}x = -\cos((a-b)x)/2(a-b) - \cos((a+b)x)/2(a+b)$ pro $a \neq b$, $\int \sin ax \cos ax \mathrm{d}x = \frac{\sin^2 ax}{2a}$, takže $\int_0^\pi \cos ax \cos bx \mathrm{d}x = 0$ pro $a, b \in \mathbf{N}$, $a \neq b$, $\int_0^\pi \sin ax \sin bx \mathrm{d}x = 0$ pro $a, b \in \mathbf{N}$, $a \neq b$, $\int_0^\pi \cos ax \sin bx \mathrm{d}x = 0$ pro $a, b \in \mathbf{N}$.

8.62.[2] **Řešení.** Stačí použít větu 8.35.

8.64.[1] **Řešení.** Je $\int \sin^2 ax \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \sin ax \cos ax/2a$ a $\int \cos^2 ax \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \sin ax \cos ax/2a$, tedy $\int_0^\pi \sin^2 ax \mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos^2 ax \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, takže vektory báze normalizuji tak, že je podělím konstantou $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

8.65.[3] **Řešení.**

→ (a) Skalární součin 1 s x^2: $1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$, podobně pro ostatní dvojice vektorů. Báze je ortogonální.

→ (b) $\int_0^1 1x^2 = [x^3/3]_0^1 = 1/3$, vektor 1 není kolmý na vektor x^2, báze není ortogonální.

8.66.[5] **Řešení.** $\boldsymbol{a} = (-2,2,1)_{(B)}$, $\boldsymbol{b} = (1,-2,0)_{(B)}$, $\boldsymbol{c} = (1,1,1)_{(B)}$.

→ (a) $\boldsymbol{x}$ řeší soustavu s maticí $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, tj. $\boldsymbol{x} = \alpha(2,1,2)$, dále $\alpha(2,1,2)\cdot(1,1,1) = 5\alpha = 2$, tj. $\alpha = \frac{2}{5}$ a $\boldsymbol{x} = \frac{2}{5}(2,1,2)_{(B)} = \frac{4}{5}\boldsymbol{i} + \frac{2}{5}\boldsymbol{j} + \frac{4}{5}\boldsymbol{k}$.

→ (b) $\boldsymbol{ab} = (-2,2,1)\cdot(1,-2,0) = -6$, $\|\boldsymbol{a}\|^2 = (-2,2,1)\cdot(-2,2,1) = 9$, $\|\boldsymbol{b}\|^2 = (1,-2,0)\cdot(1,-2,0) = 5$, úhel mezi $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$: $\arccos\frac{-6}{3\sqrt{5}}$, analogicky úhel mezi b a c: $\arccos\frac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{3}}$.

→ (c) $\|\boldsymbol{a}\| = 3$, $\|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{5}$,

→ (d) vše počítám v souřadnicích vzhledem k bázi (B), $\boldsymbol{y} = \alpha(2,1,2)$ (viz případ a), $\boldsymbol{x} = \beta(-2,2,1) + \gamma(1,-2,0)$, protože $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$, je $\alpha(2,1,2) + = \beta(-2,2,1) + \gamma(1,-2,0)$, po rozepsání do souřadnic dostávám soustavu s řešením $\alpha = 5/9$, $\beta = -1/9$, $\gamma = -1/3$, takže $\boldsymbol{x} = -\frac{1}{9}(-2,2,1)_{(B)} - \frac{1}{3}(1,-2,0)_{(B)}$, $\boldsymbol{y} = \frac{5}{9}(2,1,2)_{(B)}$.

→ (e) Vektor $\boldsymbol{x}$ je kolmý průmět vektoru $\boldsymbol{c}$ na rovinu ϱ procházející vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Tj. vektor $\boldsymbol{x}$ je „stín“ vektoru $\boldsymbol{c}$ na rovině ϱ, pokud paprsky svítí na rovinu kolmo.

8.67.[3] **Řešení.** $\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{b}_2 + \alpha\boldsymbol{b}_1$ tak, aby $\boldsymbol{c}_2 \perp \boldsymbol{b}_1$, tedy $\big((2,1,0)+\alpha(1,2,2)\big)\cdot(1,2,2) = 0$, tj. $2+\alpha+(1+2\alpha)\cdot 2 + 4\alpha = 0$, takže $\alpha = -4/9$ a $\boldsymbol{c}_2 = (2,1,0) - \frac{4}{9}(1,2,2)$. Konečně $\boldsymbol{c}_3$ je libovolný vektor kolmý současně na $\boldsymbol{b}_1$ a $\boldsymbol{b}_2$, takže řeší soustavu s maticí $\left(\begin{smallmatrix}1&2&2\\2&1&0\end{smallmatrix}\right)$, například $\boldsymbol{c}_3 = (2,-4,3)$. Ortonorlalizaci této báze provedu tak, že vydělím $\boldsymbol{c}_i$ jejich velikostmi, tedy $\|\boldsymbol{c}_1\| = 3$, $\|\boldsymbol{c}_2\| = \sqrt{261}/3$, $\|\boldsymbol{c}_3\| = \sqrt{29}$.

8.68.[3] **Řešení.** Budu postupovat podle důkazu věty 8.41, tj. bázi budu nejen ortogonalizovat, ale také normalizovat. $\boldsymbol{c}_1 = (1/\|\boldsymbol{b}_1\|)\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{3}(1,2,0,2)$,
$\boldsymbol{b}'_2 = \boldsymbol{b}_2 - (\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{c}_1)\boldsymbol{c}_1 = (2,1,0,0) - \big((2,1,0,0)\cdot\frac{1}{3}(1,2,0,2)\big)\frac{1}{3}(1,2,0,2) = (2,1,0,0) - \frac{4}{9}(1,2,0,2) = \frac{1}{9}(14,1,0,-8)$, $\boldsymbol{c}_2 = (1/\|\boldsymbol{b}'_2\|)\boldsymbol{b}'_2 = \frac{1}{\sqrt{261}}(14,1,0,-8)$,
$\boldsymbol{b}'_3 = \boldsymbol{b}_3 - \big((\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{c}_1)\boldsymbol{c}_1 + (\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{c}_2)\boldsymbol{c}_2\big) = (1,0,1,3) -$
$\big((1,0,1,3)\cdot\frac{1}{3}(1,2,1,0)\big)\frac{1}{3}(1,2,0,2) - \big((1,0,1,3)\cdot\frac{1}{\sqrt{261}}(14,1,0,-8)\big)\frac{1}{\sqrt{261}}(14,1,0,-8) =$
$(1,0,1,3) - \frac{7}{9}(1,2,0,2) - \frac{10}{261}(14,1,0,-8)$, $\boldsymbol{c}_3 = (1/\|\boldsymbol{b}'_3\|)\boldsymbol{b}'_3$, konečně $\boldsymbol{c}_4$ lze počítat podobně, nebo využít toho, že to je poslední bázový vektor v $\mathbf{R}^4$, takže požadavek na to, že je kolmý na všechny ostatní, vede na soustavu s dimenzí řešení 1, konkrétně soustava s maticí $\begin{pmatrix}1&2&1&0\\2&1&0&0\\1&0&1&3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&2&0&2\\0&-2&1&1\\0&3&0&4\end{pmatrix}$ má řešení $\langle(2,-4,-11,3)\rangle$, takže $\boldsymbol{c}_4 = \frac{1}{\sqrt{150}}(2,-4,-11,3)$.

8.69.[3] **Řešení.** Znovu postupuji podle důkazu věty 8.41. $\|\boldsymbol{b}_1\| = 1$, takže $\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{b}_1 = 1$, dále $\boldsymbol{b}'_2 = \boldsymbol{b}_2 - (\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{c}_1)\boldsymbol{c}_1 = x - \left(\int_0^1 x\cdot 1\mathrm{d}x\right)\cdot 1 = x - \frac{1}{2}$, velikost má být 1: $\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x = \int_0^1\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$, takže $\boldsymbol{c}_2 = \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right)$, dále $\boldsymbol{b}'_3 = \boldsymbol{b}_3 - \sum(\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{c}_i)\boldsymbol{c}_i = x^2 - \left(\int_0^1 x^2\cdot 1\mathrm{d}x\right)\cdot 1 - \left(12\int_0^1 x^2(x-\frac{1}{2})\mathrm{d}x\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) = x^2 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - 12\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6}\right]_0^1\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6}$, konečně vydělím tento vektor jeho velikostí $\int_0^1\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{180}$, takže $\boldsymbol{c}_3 = \sqrt{180}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$.

8.70.[3] **Řešení.** První vektor v základně čtyřstěnu zůstane na svém místě. Druhý vektor zůstane v rovině základny, ale je natočen tak, aby svíral s prvním vektorem pravý úhel. Třetí vektor natočím nakonec tak, aby byl kolmý na základnu.

8.71.[4] **Řešení.** Nechť hrany krychle sousedící s levým dolním předním vrcholem tvoří bázové vektory, vzhledem ke kterým má stranová úhlopříčka souřadnice $(1,1,0)$, a tělesová úhlopříčka má souřadnice $(1,1,1)$. Protože je báze ortonormální, můžeme počítat skalární součin podle věty 8.33.

→ (a) úhel $= \arccos\frac{(1,1,0)\cdot(1,1,1)}{\|(1,1,0)\|\,\|(1,1,1)\|} = \arccos\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$,

→ (b) volím jinou stranovou úhlopříčku se souřadnicemi $(1,-1,0)$, protože $(1,-1,0)\cdot(1,1,1) = 0$, jsou uvedené úhlopříčky na sebe kolmé.

8.72.[4] **Řešení.** Předpokládám pravidelný jehlan, který má vrchol V proti podstavě přesně nad těžištěm podstavy. Při volbě souřadnicového systému s ortonormální bází tak, že počátek je v jednom vrcholu podstavy a první bázový vektor leží v hraně podstavy, má vrchol V souřadnice $(1/2, \sqrt{3}/6, 2)$. Vektor podél první hrany má souřadnice $(1/2,\ \sqrt{3}/6,\ 2)$ a vektor podél druhé hrany má souřadnice $(-1/2,\ \sqrt{3}/6,\ 2)$. Protože je báze ortonormální, můžeme počítat skalární součin podle věty 8.33. Hledaný úhel je
$\arccos\frac{(1/2,\sqrt{3}/6,2)\cdot(-1/2,\sqrt{3}/6,2)}{\|(1/2,\sqrt{3}/6,2)\|^2} = \arccos\frac{-1/4+3/36+4}{1/4+3/36+4} = \arccos\frac{23/6}{26/6} = \arccos\frac{23}{26}$.

8.73.[3] **Řešení.** Hranol umístím do souřadné soustavy s ortonormální bází, která má počátek v jednom vrcholu trojúhelníka, strana trojúhelníka délky 1/3 strany čtverce (tu prohlásím jako jednotkovou velikost) je prvním bázovým vektorem, druhý bázový vektor leží také v podstavě hranolu a je kolmý na první a třetí bázový vektor směřuje kolmo k podstavě hranolu. Obrázek si nakreslí laskavý čtenář sám. Vzhledem k této bázi má první úsek lomené čáry souřadnice $(1,0,1)$ a druhý úsek má souřadnice $(-1/2, \sqrt{3}/2, 1)$. Abych spočítal úhel lomené čáry, musím jeden vektor orientovat obráceně, např. $(-1,0,-1)$. Úhel lomené čáry je $\arccos\frac{(-1,0,-1)(-1/2,\sqrt{3}/2,1)}{\|(-1,0,-1)\|\,\|(-1/2,\sqrt{3}/2,1)\|} = \arccos\frac{-1/2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \arccos\frac{-1}{4}$.

8.74.[3] **Řešení.**

→ (a) Nechť $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|$, z toho plyne $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2$, tj. $\|\boldsymbol{u}\|^2+\|\boldsymbol{v}\|^2+2\boldsymbol{uv} = \|\boldsymbol{u}\|^2+\|\boldsymbol{v}\|^2-2\boldsymbol{uv}$, takže $vecu\boldsymbol{v} = 0$. Jednotlivé úpravy jsou ekvivalentní, tj. platí i obrácené tvrzení.

→ (b) Nechť $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = 0$, z toho plyne $\|\boldsymbol{u}\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2 = 0$, tj. obě velikosti musejí být stejné. Úpravy jsou ekvivalentní, tvrzení platí i obráceně.

8.77.[0] **Řešení.** http://flow.kmo.tul.cz/~www/czech/vyuka/multiedu/fcanal_apm_pdf.pdf

8.78.[0] **Řešení.** Doplním později

8.79.^{0} **Řešení.** Doplním později

8.80.^{0} **Řešení.** Doplním později

10.63.^{4} **Řešení.** $\sim \begin{pmatrix} 1&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&1\\ 0&1&1&1&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&1&1\\ 0&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&1 \end{pmatrix}$, podle věty 5.34 je báze prostoru řešení $(1,1,0,1,0)$, $(1,0,1,0,1)$, takže všechna řešení jsou $(1,1,0,1,0), (1,0,1,0,1), (0,1,1,1,1), (0,0,0,0,0)$.

10.64.^{4} **Řešení.**

$\rightarrow$ (a) S využitím výsledku z předchozího cvičení a s vědomím, že např. $(1,0,0,0,0)$ je partikulární řešení, mohu množinu všech řešení napsat ve tvaru $(1,0,0,0,0)+\langle(1,1,0,1,0),(1,0,1,0,1)\rangle$, takže všechna řešení jsou $(0,1,0,1,0), (0,0,1,0,1), (1,1,1,1,1), (1,0,0,0,0)$.

$\rightarrow$ (b) $\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&1&1&0&1\\ 0&0&1&0&-1&0\\ 0&1&-1&-1&1&0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&1&1&1\\ 0&1&0&-1&0&0\\ 0&0&1&0&-1&0 \end{array}\right)$, podle věty 5.34 je báze prostoru řešení přidružené homogenní soustavy $(-1,1,0,1,0), (-1,0,1,0,1)$, takže množina všech řešení je $(1,0,0,0,0)+\langle(-1,1,0,1,0),(-1,0,1,0,1)\rangle$.

10.65.^{4} **Řešení.** Řeším dvě soustavy nehomogenních rovnic se společnou maticí soustavy $\sim \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1&0&0&1&1&1&0\\ 1&1&0&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&1&1 \end{array}\right) \sim$ $\left(\begin{array}{ccccc|cc} 1&0&0&1&1&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&1\\ 0&0&1&1&0&0&1 \end{array}\right)$, podle věty 5.34 je báze řešení přidružené homogenní soustavy $(1,1,1,1,0), (1,0,0,0,1)$, takže první sloupec matice $\mathbf{X}$ obsahuje vektory $(1,1,0,0,0)+\langle(1,1,1,1,0),(1,0,0,0,1)\rangle$ a druhý sloupec matice $\mathbf{X}$ obsahuje vektory $(0,1,1,0,0)+\langle(1,1,1,1,0),(1,0,0,0,1)\rangle$. Celkem v prvním i druhém sloupci mohou být čtyři různé vektory, takže lze zapsat 16 různých matic $\mathbf{X}$, které vyhovují maticové rovnici.

10.66.^{4} **Řešení.**

$\rightarrow$ (a) je LN, (b) je LN, (c) je LZ

10.67.^{4} **Řešení.**

$\rightarrow$ (a) $\alpha = 1$, (b) pro žádné α, (c) pro všechna α, (d) $\alpha = 1$.

10.68.^{4} **Řešení.**

$\rightarrow$ (a), (b) bázi mohou tvořit zadané vektory, (c) např. $\{(1,0,1,0,1), (0,1,1,0,0), (0,0,1,1,0)\}$.

10.69.^{4} **Řešení.** $\sim \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&a{+}1&b \end{pmatrix}, \quad a=1,\ b=0.$

10.70.^{4} **Řešení.** $\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0\\ 1&0&1&0&1\\ 1&0&a&1&1\\ 0&1&1&1&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0\\ 0&1&0&0&1\\ 0&1&1{+}a&1&1\\ 0&1&1&1&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0\\ 0&1&0&0&1\\ 0&1&1{+}a&1&1\\ 0&0&a&0&0 \end{pmatrix}$, nejvíce prvků má $\langle M\rangle$ pro $a=1$, tehdy je $\dim\langle M\rangle = 4$, takže počet prvků je $2^4 = 16$.

10.71.^{4} **Řešení.** Ano: $(1,0,0,\dots,0)$, $(0,1,0,\dots,0)$, $(0,0,1,\dots,0)$, $\dots$, $(0,0,0,\dots,1)$.

10.72.^{4} **Řešení.**

$\rightarrow$ (a) $\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&0\\ 1&1&1&0&0\\ 1&1&1&0&1\\ 1&0&1&0&0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&1\\ 1&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&1\\ 1&0&0&0&1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1&1&0&1&1\\ 1&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0\\ 1&1&0&0&0 \end{pmatrix}$, trik: násobení matic mohu provést na jednoduchém software pro tento účel v $\mathbf{R}$, přitom sudá čísla výsledku zapíšu jako nuly a lichá čísla jako jedničky,

$\rightarrow$ (d) $\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&1&0&0\\ 1&1&1&1&1&0&0&0&1&0\\ 1&0&1&1&1&0&0&0&0&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&1&0&1&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&1&1&1&1 \end{array}\right)$, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&1\\ 0&1&0&1&1\\ 0&1&1&1&1 \end{pmatrix}$.

Poznámka: i v případě výpočtu inverzní matice lze použít výše zmíněný trik. Matice má sudý determinant (počítáno v $\mathbf{R}$) právě tehdy, když je singulární v $\mathbf{Z}_2$. Tedy pro lichý determinant existuje inverzní matice i v $\mathbf{Z}_2$. Při výpočtu inverzní matice můžeme pracovat v $\mathbf{R}$ a použít vzorec z důkazu věty 4.37, ovšem není potřeba dělit číslem $\det \mathbf{A}$ a ve výsledné matici stačí lichá čísla psát jako jedničky a sudá jako nuly.

10.73.^{4} **Řešení.**

$\rightarrow$ (a) $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0\\ 0&1&1&1&1\\ 1&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&1 \end{pmatrix}$, (b) $\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&1&0&0&1&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&1&0&1&0&1&0\\ 1&1&1&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&0&1&1&1&0&1&1&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&1&0&0&1&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1&1 \end{array}\right)$, podle Frobeniovy věty matice $\mathbf{X}$ neexistuje.

10.74.[4] **Řešení.**
→ (a) $\operatorname{hod}\mathbf{A} = 5$, $\operatorname{hod}\mathbf{B} = 4$, $\mathbf{A}$ je regulární, $\mathbf{B}$ je singulární,
→ (b) $\operatorname{hod}\mathbf{A} = 5$, $\operatorname{hod}\mathbf{B} = 5$, $\mathbf{A}$ je regulární, $\mathbf{B}$ je regulární, $\det\mathbf{A} = 1$, $\det\mathbf{B} = -2$.

10.75.[4] **Řešení.** Počet vektorů je $2^{\dim P} = 2^{13} = 8192$.

10.76.[4] **Řešení.** Dimenze $= n - \operatorname{hod}\mathbf{A} = n - k$, počet vektorů $= 2^{n-k} = \frac{2^n}{2^k}$.

10.77.[4] **Řešení.** `http://en.wikipedia.org/wiki/UTF-8`,
nebo `http://www.unicode.org/versions/Unicode4.0.0`,
speciálně `http://www.unicode.org/versions/Unicode4.0.0/ch03.pdf`, sekce 3.9 (UTF8).
Jednotlivé kódy znaků Unicode jsou v UTF-8 kódovány do jednoho až čtyř byte, tedy jedná se o neblokový kód. Podle prvních pěti bitů prvního byte dekodér jednoznačně pozná, zda má dekódovat znak zapsaný v jednom, dvou, třech nebo čtyřech bytech. Dělá to takto: 0??????? – znak je kódován v tomto jediném byte, 110????? – znak je kódován v tomto a následujícím byte, 1110???? – znak je kódován v tomto a dvou následujích byte, 11110??? – znak je kódován v tomto a třech následujích byte, 11111??? – toto není kódové slovo. Navíc všechny pokračovací byte mají vždy v prvních dvou bitech psáno 01. Pokud to není splněno, dekodér ohlásí chybu (příjem nekódového slova).

10.78.[4] **Řešení.** Jednotlivá kódová slova označím $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$. Je
→ (a) $\|\boldsymbol{a}\| = \|00110010\| = 3$, $\|\boldsymbol{b}\| = \|10101010\| = 4$, $\|\boldsymbol{c}\| = \|11110000\| = 4$,
→ (b) $\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\| = \|10011000\| = 3$, $\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}\| = 3$, $\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}\| = 4$. (c) 3,
→ (d) není lineární, chybí mezi kódovými slovy např. nulový vektor.

10.79.[4] **Řešení.** Největší velikost má slovo plné jedniček, $\|111\dots1\| = k$, největší vzdálenost je mezi tímto slovem a nulovým slovem, nejmenší vzdálenost mezi různými slovy je 1, např. $\|100\dots0 - 000\dots0\| = 1$.

10.80.[4] **Řešení.** $\mathcal{A}(00110010) = 1100$, $\mathcal{A}(10101010) = 0000$, $\mathcal{A}(11110000) = 0101$.

10.81.[4] **Řešení.**
→ (a) $\sim \begin{pmatrix} 1&1&0&1&0&0&1&1\\ 0&1&1&1&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&0\\ 0&0&1&1&0&0&1&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&1&0&1&1&1\\ 0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&0 \end{pmatrix}$, prohodím třetí se čtvrtým sloupcem, použiji větu 5.34 a znovu prohodím třetí se čtvrtým sloupcem, dostávám $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \langle 10110000, 11001100, 10101010, 10100001\rangle$,
→ (b) $\operatorname{def}\mathcal{A} = 4$, (c) $\operatorname{hod}\mathcal{A} = 4$.

10.82.[4] **Řešení.**
→ (a) Je-li kód je lineární, musí mít tříprvkovou bázi, protože $2^3 = 8$, takže hodnost matice sestavené z kódových slov v řádcích musí být 3, $\begin{pmatrix} 0&1&1&0&1&1\\ 1&0&1&0&1&1\\ 1&1&0&0&0&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 1&0&1&0&0&0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}$,
→ (b) nejmenší vzdálenost je 2 (stačí použít větu 10.26).

10.83.[4] **Řešení.**
→ (a) $\mathbf{H} \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&1&1&0\\ 0&0&1&1&0&1 \end{pmatrix}$, takže dle věty 5.34 je $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 1&0&1&0&0&1 \end{pmatrix}$,
→ (b) $\mathbf{H} \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&1\\ 0&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&1&0&0 \end{pmatrix}$, takže $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&0&0\\ 1&0&1&0&1&0\\ 1&1&0&0&0&1 \end{pmatrix}$,
→ (c) $\mathbf{H} \sim \left(\begin{smallmatrix} 1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1 \end{smallmatrix}\right)$, po prohození druhého sloupce se čtvrtým lze užít větu 5.34 a nakonec znovu prohodit, takže $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1 \end{pmatrix}$.

10.84.[4] **Řešení.** První čtyři bity mohou být libovolné, počet jedniček mezi zbylými čtyřmi bity musí být sudý. Dimenze tohoto lineárního kódu je 7, takže počet slov je $2^7 = 128$.

10.85.[4] **Řešení.** Generující i kontrolní matice mají podle definice lin. nezávislé řádky. Jde tedy jen o to, zda mohou být čtvercové. Generující matice kódu, který obsahuje všechna slova délky k, je čtvercová, tedy regulární. Pokud by měla být čtvercová kontrolní matice, pak příslušný kód obsahuje jen nulové slovo, tj. nejedná so o příliš užitečný kód. Pro prakticky použitelné kódy tedy nemůže být kontrolní matice regulární.

10.86.[4] **Řešení.**
→ (a) $\mathbf{G} \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1 \end{pmatrix}$, takže $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0&1&0&1&1 \end{pmatrix}$,

→ (b) stejně jako ve cvičení 10.83 případ b), jen zaměním $\mathbf{G} \leftrightarrow \mathbf{H}$.

10.87.[4] **Řešení.** Dimenze tohoto lin. kódu je $n_2 - n_1$, takže počet slov je $2^{n_2 - n_1}$.

10.88.[4] **Řešení.**
→ (a) $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, takže $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \{000, 111\}$,

→ (b) $$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0 \\ 1&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

10.89.[4] **Řešení.**
→ (a) $2^8 - 1 = 255$, $255 - 8 = 247$, takový kód je možné vytvořit,
→ (b) $2^9 - 1 = 511$, $511 - 9 = 502 \neq 501$, toto nejsou rozměry Hammingova kódu.

10.90.[4] **Řešení.** Ne, neobsahuje např. nulový vektor.

10.91.[4] **Řešení.** Ano, je to lineární kód. Báze kódu (řádky generující matice) může vypadat např. takto: $(100\dots001)$, $(010\dots010)$, $(001\dots100)$, … Pro sudá k je generující matice tohoto kódu shodná s maticí kontrolní.

10.92.[4] **Řešení.** $$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&1&0&0 \\ 1&1&0&1&0&0&1&0 \\ 1&0&1&1&0&0&0&1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&1&0&0&1&1&1&0 \\ 0&0&1&0&1&1&0&1 \\ 0&0&0&1&1&0&1&1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&1&0&0 \\ 1&1&0&1&0&0&1&0 \\ 1&0&1&1&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

11.78.[5] **Řešení.** (a) $x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 4$, (b) $\frac{5}{4}x^3 - 2x^2 + 4x$, (c) $3x^6 + 3x^4 - 9x + 6$,
→ (d) $x^8 - 9x^6 + 8x^5 - 12x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 26x + 20$.

11.79.[3] **Řešení.**
→ (a) $(-5, 4, 0, -2, 3, 1) + (1, -1, 1, 1, 0, 0) = (-4, 3, 1, -1, 3, 1)$,
→ (b) $(4, 0, 0, -\frac{3}{4}, 2) + (-4, 4, -2, 2, -2) = (0, 4, -2, \frac{5}{4}, 0)$,
→ (c) $3(2, -3, 1, 1) = (6, -9, 3, 3)$,
→ (d) $c_0 = a_0 b_0 = (-5) \cdot (-4) = 20, c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1 = 4 \cdot (-4) + (-5) \cdot 2 = -26, c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0 \cdot (-4) + 4 \cdot 2 + (-5) \cdot (-3) = 23, c_3 = a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3 = (-2) \cdot (-4) + 0 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + (-5) \cdot 1 = -9, c_4 = a_4 b_0 + a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3 + a_0 b_4 = 3 \cdot (-4) + (-2) \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 + (-5) \cdot 0 = -12, c_5 = a_5 b_0 + a_4 b_1 + a_3 b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_4 + a_0 b_5 = 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + (-5) \cdot 0 = 8, c_6 = a_6 b_0 + a_5 b_1 + a_4 b_2 + a_3 b_3 + a_2 b_4 + a_1 b_5 + a_0 b_6 = 0 \cdot (-4) + 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + (-5) \cdot 0 = -9, c_7 = a_7 b_0 + a_6 b_1 + a_5 b_2 + a_4 b_3 + a_3 b_4 + a_2 b_5 + a_1 b_6 + a_0 b_7 = 0 \cdot (-4) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + (-5) \cdot 0 = 0, c_8 = a_8 b_0 + a_7 b_1 + a_6 b_2 + a_5 b_3 + a_4 b_4 + a_3 b_5 + a_2 b_6 + a_1 b_7 + a_0 b_8 = 0 \cdot (-4) + 0 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + (-5) \cdot 0 = 1$.

11.80.[3] **Řešení.** Nechť p je polynom s koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_k$ a q je polynom s koeficienty $b_0, b_1, \dots, b_m$. Platí $p = q$ právě tehdy, když mají stejný stupeň (označím jen n) a v případě, že $n \leq 0$ je $a_i = b_i$ pro všechna $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

11.81.[5] **Řešení.** Označme r částečný podíl, z zbytek.
→ (a) $r(x) = x^2 + 2x - 3$, $z(x) = 4x^2 - x - 2$,
→ (b) $r(x) = x^2 + 1$, $z(x) = -x^3 + x^2 - 4x + 3$,
→ (c) $r(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 2$, $z(x) = 0$,
→ (d) $r(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{1}{27}$, $z(x) = \frac{85}{27}x + \frac{53}{27}$,
→ (e) $r(x) = 0$, $z(x) = x^3 + x^2 - x + 1$.

11.82.[4] **Řešení.** Algoritmus postupně dělí konstantou q jednotlivé koeficienty polynomu p a v měnícím z postupně odečítá vždy sčítanec s nejvyšší mocninou. Zbytek po dělení je nula.

11.83.[5] **Řešení.**
→ (a) trojnásobný, (b) není kořen, tj. 0-násobný kořen, (c) dvojnásobný.

11.84.[4] **Řešení.**
→ (a) $p(-2) = -128$, $p(3) = 342$,
→ (b) $p(5) = 269$, $p(2 + 3i) = 14 - 141i$.

11.85.[3] **Řešení.** Viz například cvičení 11.86.

11.86.[5] **Řešení.**
→ (a) $(x-2)^3(x-\sqrt{3}+1)(x+\sqrt{3}+1)$,
→ (b) $x^2(x-3)(x+2)(x-\sqrt{7}+2)(x+\sqrt{7}+2)$,
→ (c) $(x-1)(x+1)^2(x-5+3i)(x-5-3i)$,
→ (d) $(x-3)(x+6)(x-i)^2(x+i)^2$,
→ (e) $8(x-\frac{3}{2})(x+\frac{1}{4})(x-1-2i)(x-1+2i)$.

11.87.[4] **Řešení.** Je $p(x)=(x-\alpha)\,q(x)$ pro všechna $x\in\mathbf{C}$. Pro $x=\alpha$ dostáváme $p(\alpha)=(\alpha-\alpha)\,q(\alpha)=0$.

11.88.[4] **Řešení.**
→ (a) Kořeny $\alpha=\sqrt[4]{-1}=1\cdot e^{\frac{\pi+2k\pi}{4}}=e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)$, $k\in\{0,1,2,3\}$, po dosazení k: $\alpha\in\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.
Takže $p(x)=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
→ (b) Kořeny $\alpha=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8}\cdot e^{\frac{\pi+2k\pi}{3}}=2\cdot e^{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}=2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)+2i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)$, $k\in\{0,1,2\}$, po dosazení k: $\alpha\in\left\{1+i\sqrt{3},-2,1-i\sqrt{3}\right\}$, takže $p(x)=(x-1-i\sqrt{3})(x+2)(x-1+i\sqrt{3})$.
→ (c) Kořeny $\alpha=\sqrt[6]{8}=\sqrt{2}\cdot e^{\frac{0+2k\pi}{6}}=\sqrt{2}\cdot e^{\frac{k\pi}{3}}=\sqrt{2}\cos\frac{k\pi}{3}+i\sqrt{2}\sin\frac{k\pi}{3}$, $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$, po dosazení k: $\alpha\in\left\{\sqrt{2},\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),-\sqrt{2},\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$, takže $p(x)=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

11.89.[5] **Řešení.** Protože $1+i$ je kořenem reálného polynomu, musí být $1-i$ také kořenem. Kořenové činitele: $(x-1-i)(x-1+i)=x^2-2x+2$. Podělením zkoumaného polynomu polynomem x^2-2x+2 dostávám polynom x^3-3x^2+x+5. Číslo -1 je kořen tohoto polynomu (pokus o uhodnutí celočíselného kořene z množiny možností $\{1,-1,5,-5\}$). Dostávám tedy rozklad: $(x+1)(x^2-2x+2)^2(x^2-4x+5)$.

11.90.[5] **Řešení.** Nejprve 11.86: (a) , (b) beze změny, (c) $(x-1)(x+1)^2(x^2-10x+34)$, (d) $(x-3)(x+6)(x^2+1)^2$, (e) $8(x-\frac{3}{2})(x+\frac{1}{4})(x^2-2x+5)$, dále 11.88: (a) $(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$, (b) $(x+2)(x^2-2x+4)$, (c) $(x^2+\sqrt{2}x+2)(x^2-\sqrt{2}x+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

11.91.[4] **Řešení.** Ne, protože pak též $1+8i$ je sedminásobný kořen a polynom stupně 13 nemůže mít 14 kořenů.

11.92.[4] **Řešení.** Vynásobením kořenových činitelů s kořeny vzájemně komplexně sdruženými dostáváme reálný polynom. Součin reálných polynomů a konstanty $a_n=1$ je reálný polynom.

11.93.[4] **Řešení.** Dá se nahradit podmínkou $a_n\in\mathbf{R}$.

11.94.[4] **Řešení.** Algebraicky: komplexní kořeny jsou po dvou, při lichém stupni musí zůstat místo aspoň na jeden reálný kořen.

Analyticky: Při $a_n>0$ je $\lim p(x)=+\infty$ pro $x\to+\infty$ a $\lim p(x)=-\infty$ pro $x\to-\infty$. Spojitá funkce musí protnout osu x. Při $a_n<0$ se pouze prohodí $+\infty$ s $-\infty$.

11.95.[1] **Řešení.** Rozklad polynomu třetího stupně musí obsahovat polynom stupně prvního, což je (až na konstantu u první mocniny, která se dá vytknout) kořenový činitel. Ovšem polynom nemá kořen v T, takže kořenový činitel nemůže v T existovat. Polynom tedy není rozložitelný na činitele v T.

11.96.[2] **Řešení.** Nechť (c_i) je nenulová posloupnost s konečným nosičem, k je největší index, pro který je $c_k\neq 0$. Pak obraz izomorfizmu v posloupnosti (c_i) definuji jako polynom $c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_kx^k$. Obraz nulové posloupnosti definuji jako nulový polynom. Toto zobrazení je prosté (věta 11.11), je „na“ (ke koeficientům polynomu přidáme nekonečně nul a dostáváme odpovídající posloupnost s konečným nosičem) a je lineární (věta 11.21). Jedná se tedy o izomorfismus.

11.97.[3] **Řešení.** $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=-a_{n-1}$, $\sum_{i,j=1,\,i<j}^{n}\alpha_i\alpha_j=a_{n-2}$, $\sum_{i,j,k=1,\,i<j<k}^{n}\alpha_i\alpha_j\alpha_k=-a_{n-3}$, …

…, konečně poslední vztah: $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^na_0$. Přitom každý kořen je zde zapsán tolikrát, kolik je jeho násobnost.

11.98.[3] **Řešení.** $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^na_0$.

11.99.[3] **Řešení.** Nechť p má aspoň dvojnásobný kořen. Tj. $p(x)=(x-\alpha)^2q(x)$ a $p'(x)=2(x-\alpha)q(x)+(x-\alpha)^2q'(x)$, takže $p'(\alpha)=2\cdot 0\cdot q(\alpha)+0\cdot q'(\alpha)=0$. Obráceně, nechť $p(\alpha)=0$ a $p'(\alpha)=0$. Pak $p(x)=(x-\alpha)q_1(x)$ (věta 11.42), $p'(x)=1q_1(x)+(x-\alpha)q_1'(x)$. Dosadím $x=\alpha$: $p'(\alpha)=q_1(\alpha)+0q_1'(\alpha)=0$, tedy $q_1(\alpha)=0$, jinak řečeno α je kořenem polynomu q_1. Podle věty 11.42 pak musí $q_1(x)=(x-\alpha)q_2(x)$, tedy $p(x)=(x-\alpha)q_1(x)=(x-\alpha^2)q_2(x)$.