Základní pojmy z teorie grafů.

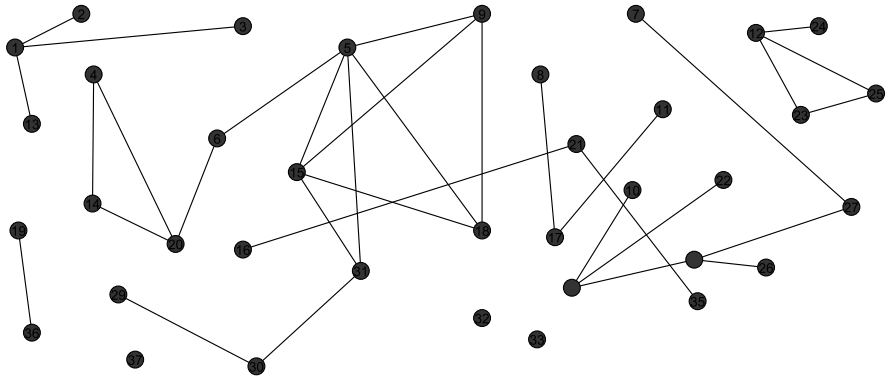
Začneme následující úlohou.

Příklad. Na party je 37 lidí. Pak tam musí být někdo, kdo byl představen sudému počtu přítomných účastníků.

První, co nás napadne je, zda číslo 37 hraje v této otázce nějakou roli. Kdyby účastníků bylo např. jen 36 a každý byl představen každému, pak každý účastník byl představen 35 ostatním. Nikdo tak nemohl být představen sudému počtu lidí. Tento argument ukazuje, že počet všech účastníků nesmí být sudý. Přeformulujeme příklad na následující silnější tvrzení.

Příklad. Na party je lichý počet lidí. Pak tam musí být někdo, kdo byl představen sudému počtu přítomných účastníků.

Než si dokážeme platnost tvrzení v příkladu, znázorníme si graficky situaci lidí na party s ohledem na jejich vzájemné představení. Na obrázku body označují účastníky a spojnice mezi nimi vyznačuje fakt, že si byli navzájem představeni. Nespojené body znamenají, že tito účastníci si představeni nebyli.



Formalizací výše nakresleného obrázku je definice grafu.

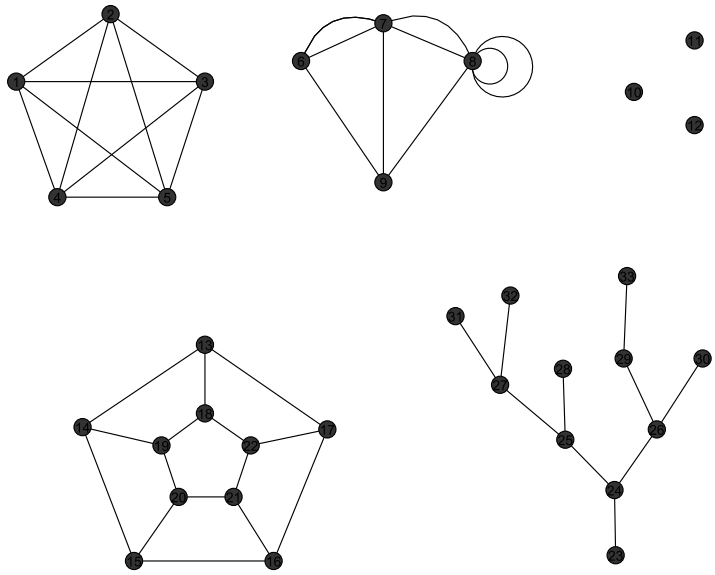
Definice. *Graf $G = (V, E)$ je uspořádaná dvojice množin V a E, kde V je jakákoli neprázdná množina nazývaná* vrcholy *grafu G a*

$$E \subset \big\{\{u, v\} \;\big|\; u, v \in V\big\}$$

se nazývá hrany *grafu* G.

Doplněk (komplement) G^c *grafu* G *je graf se stejnými vrcholy, kde dva vrcholy jsou spojeny hranou v* G^c *právě, když nejsou spojeny v původním grafu* G.

Předchozí obrázek je tedy graf, jehož vrcholy jsou účastníci party a dva vrcholy jsou spojeny hranou právě, když odpovídající účastníci si byli představeni. Na dalším obrázku jsou ukázky jiných možných grafů.

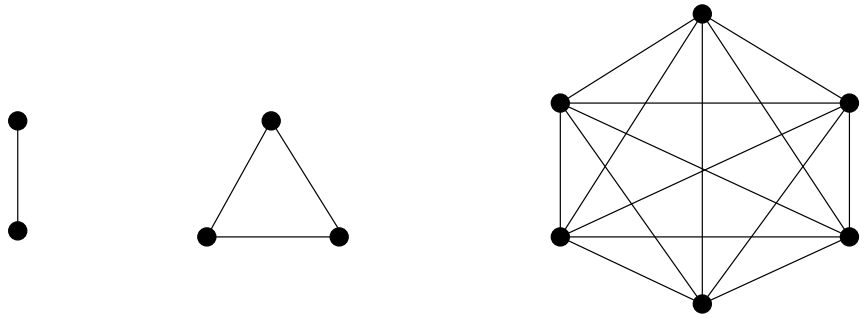


Jsou-li $u, v \in V$ dva vrcholy, pak hrana, která je spojuje, je $e = \{u, v\}$. Pro jednoduchost budeme kroucené závorky vynechávat a hranu mezi vrcholy u, v značit $e = uv$.

Mezi dvěma vrcholy může vést více hran nebo hrana může vycházet a končit v témže vrcholu (tzv. smyčka) jako např. druhý graf na předchozím obrázku. Graf, který neobsahuje smyčky a kde dva různé vrcholy mohou být spojeny nejvýše jednou hranou, se nazývá *jednoduchý*.

Definice. *Mějme graf* $G = (V, E)$. *Stupeň vrcholu* $v \in V$ *je počet hran obsahujících vrchol* v. *Značí se* $d(v)$.

Smyčka u vrcholu v přispívá ke stupni $d(v)$ hodnotou 2. Má-li jednoduchý graf n vrcholů, pak maximální stupeň každého vrcholu je $n - 1$. Graf, u něhož je této maximální hodnoty stupně dosaženo ve všech vrcholech se nazývá *úplný* a budeme ho značit K_n. Na obrázku níže jsou grafy K_2, K_3 a K_6. Doplněk K_n^c úplného grafu je graf tvořený pouze vrcholy. Někdy se takový graf nazývá *diskrétní*. Na předchozím obrázku je K_3^c třetí graf v horní řadě.



Věta 1. *Mějme graf $G = (V, E)$.*

(i) *Součet stupňů všech vrchlů grafu je roven dvojnásobku počtu hran, tj.*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

(ii) *Je-li G jednoduchý a $|V| = n$, pak $|E| \leq \binom{n}{2}$ a rovnost nastává právě, když $G = K_n$.*

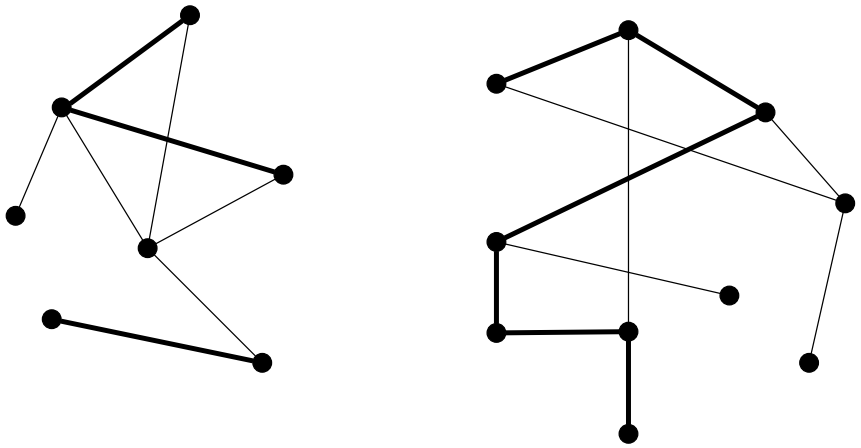
Důkaz. (i) Sčítáme-li stupně všech vrcholů grafu, počítáme vlastně, kolik je konců hran. Každá hrana má dva konce, proto počet konců všech hran je dvojnásobek počtu hran.

(ii) Protože hrana je určena dvojicí různých vrchlů, je počet hran omezen počtem dvouprvkových podmnožin vybraných z množiny V, což je $\binom{n}{2}$. □

Nyní se vrátíme k příkladu o účastnících party. Vzájemné představování máme znázorněno pomocí grafu a pro něj platí tvrzení Věty 1 (i). V našem případě má suma lichý počet sčítanců, ale hodnota součtu je zřejmě sudá. Proto nemohou být všechny členy sumy liché. Odtud vyplývá, že alespoň jeden sčítanec je sudý, a tedy v grafu existuje vrchol se sudým stupněm. A tento vrchol reprezentuje hledaného účastníka party, který byl představen sudému počtu účastníků.

Definice. *Graf $G' = (V', E')$ nazýváme podgraf grafu $G = (V, E)$, jestliže $V' \subset V$ a $E' \subset E$. Zapisujeme $G' \subset G$.*

Příklady podgrafů jsou na následujícím obrázku.



Druhý podgraf je velmi speciální neboť tvoří jakousi cestu přísušným grafem od jednoho vrcholu ke druhému. Dva druhy takových podgrafů si označíme jménem.

Definice. *Cesta P v grafu $G = (V, E)$ je posloupnost střídavě se skládající z vrcholů a hran,*

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k),$$

kde $e_i = v_{i-1}v_i$ jsou hrany a $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ jsou navzájem různé vrcholy. Přidáme-li k P navíc hranu v_kv_0, vznikne uzavřená cesta nazývaná kružnice nebo také cyklus.

Tah W v grafu G je posloupnost střídavě se skládající z vrcholů a hran,

$$W = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k),$$

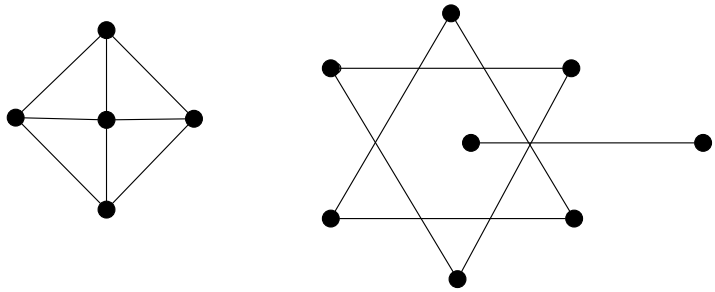
kde $e_i = v_{i-1}v_i$ jsou navzájem různé hrany.

Protože cesta v grafu prochází navzájem různými vrcholy, nemůže použít žádnou hranu dvakrát. Každá cesta je tedy i tah.

Pomocí pojmu cesta v grafu můžeme zavést jinou důležitou charakteristiku, a to je souvislost grafu.

Definice. *Graf G je souvislý, jestliže pro každé dva vrcholy existuje cesta v G, která je spojuje. Každý maximální souvislý podgraf grafu G se nazývá komponenta souvislosti.*

Na obrázku je příklad souvislého a nesouvislého grafu. Nesouvislý graf má tři komponenty souvislosti.



Aby graf byl souvislý, musí mít "dostatečný" počet hran. Položme si otázku, jaký je vztah mezi souvislostí grafu a počtem jeho hran. Jsou dvě možné varianty. Je-li graf souvislý, kolik musí mít nutně hran? A naopak, jaký počet hran grafu si vynutí jeho souvislost? Odpovědi jsou v následující Větě 2.

Věta 2. *Mějme graf $G = (V, E)$. Pak platí*

(i) *Je-li G souvislý, pak $|E| \geq |V| - 1$.*

(ii) *Je-li G jednoduchý a má-li více než $\binom{|V|-1}{2}$ hran, kde $|V| \geq 2$, pak je souvislý.*

Důkaz. (i) Důkaz provedeme matematickou indukcí podle počtu hran.

(1) Je-li $|E| = 1$, pak souvislý graf o jedné hraně zřejmě nemůže mít více než dva vrcholy. Tedy $|V| \leq 2 = |E| + 1$, tj. $|E| \geq |V| - 1$.

(2) Předpokládejme, že nerovnost platí pro grafy, jejichž počet hran je k a chceme tuto nerovnost dokázat pro grafy s $|E| = k + 1$. Mějme souvislý graf s $k + 1$ hranami. Uvážíme dva případy:

(a) Graf obsahuje kružnici. Ubereme z grafu G hranu, která byla součástí kružnice. Vzniklý graf je opět souvislý, má stejný počet vrcholů, ale jen k hran. Podle indukčního předpokladu je

$$|V| - 1 \leq k = |E| - 1 \leq |E|.$$

(b) Graf neobsahuje kružnici. Označme si P nejdelší cestu v grafu G a nechť u je počáteční vrchol cesty P. Pak stupeň vrcholu u musí být 1: v opačném případě by existovala hrana $e = uv \notin P$ a jejím přidáním bychom vytvořili buď cestu delší než P (pokud $v \notin P$) nebo kružnici (pokud $v \in P$). Odstraněním vrcholu u spolu s hranou, která do něj vede, vznikne opět souvislý graf s $|V| - 1$ vrcholy a s k hranami. Podle indukčního předpokladu pro něj platí

$$(|V| - 1) - 1 \leq k = |E| - 1, \quad \text{tj.} \quad |E| \geq |V| - 1.$$

(ii) Předpokládejme, že počet hran je $|E| > \binom{|V|-1}{2}$, a přesto graf není souvislý, tj. existují alespoň dvě komponenty souvislosti. Označme si V_1 vrcholy jedné z komponent sovislosti a $V_2 = V \setminus V_1$. Pak žádná hrana nespojuje vrcholy z V_1 s vrcholy z V_2. Je-li $|V_1| = k$ a $|V_2| = |V| - k$, kde $1 \leq k \leq |V| - 1$, pak podle Věty 1 (ii) platí, že

$$|E| \leq \binom{k}{2} + \binom{|V| - k}{2} = k^2 - k|V| + \frac{|V|(|V| - 1)}{2}.$$

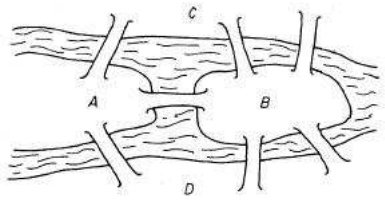
Poslední výraz je kvadratický v k a nabývá svého maxima v krajních bodech intervalu $1 \leq k \leq |V| - 1$. Pro $k = 1$ i pro $k = |V| - 1$ má stejnou hodnotu a to $\binom{|V|-1}{2}$. Tím dostáváme odhad $|E| \leq \binom{|V|-1}{2}$, což je spor. □

Eulerovské grafy.

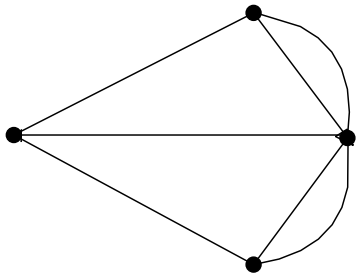
Definice. *Graf nazveme eulerovský, jestliže v něm existuje tah obsahující všechny hrany. Takový tah někdy označujeme jako eulerovský tah.*

Eulerovský graf si můžeme intuitivně představit jako graf, který lze nakreslit jedním tahem, aniž bychom nějakou hranou museli projít vícekrát.

Eulerovský graf je nazván po L. Eulerovi, který v roce 1736 charakterizoval právě takové grafy. K této otázce ho přivedla hádanka o sedmi mostech v městě Königsberg (viz obrázek níže), kde se měšťané Königsbergu snažili zjistit, zda je možné si naplánovat procházku po všech mostech tak, aby prošli všechny mosty právě jednou. Situace je na obrázku níže.



Schématicky pomocí grafu jsou mostní propojení následovná:



Řešení této hádanky je obsaženo v následující větě.

Věta 3. *Souvislý graf je eulerovský právě, když všechny vrcholy mají sudý stupeň s jedinou možnou výjimkou dvou vrcholů.*

Důkaz. Mějme graf, ve kterém existuje tah obsahující všechny hrany. Je-li tento tah uzavřený, tj. začíná-li a končí ve stejném vrcholu, pak při každém průchodu jakýmkoli vrcholem jednou hranou vstupujeme a druhou vystupujeme. Stupeň takového vrcholu je tedy sudý. Má-li tah začátek a konec v různých vrcholech, pak to jsou právě ty jediné vrcholy mající lichý stupeň.

Důkaz opačné implikace provedeme nejprve pro případ souvislého grafu, který má všechny vrcholy sudého stupně. Vezmeme si v tomto grafu tah

$$W = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$$

maximální možné délky. Protože tah W již nelze prodloužit, musí obsahovat všechny hrany vycházející z vrcholu v_k. Kdyby tah W nebyl uzavřený, tj. kdyby $v_0 \neq v_k$, pak stupeň vrcholu v_k by byl lichý díky poslednímu kroku v tahu W. Protože všechny stupně jsou sudé, dostáváme, že tah W je nutně uzavřený. Zbývá si uvědomit poslední věc, že W je eulerovský, tj. obsahuje všechny hrany grafu. V opačném případě by existovala hrana e, která nenáleží tahu W, ale přitom vychází z nějakého vrcholu v_i ležícímu na W. Nazvěme ji $e = uv_i$. Pak ovšem tah

$$(u, e, v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \ldots, e_k, v_k = v_0, e_1, \ldots, e_i, v_i)$$

je o jeden krok delší než W, což je spor.

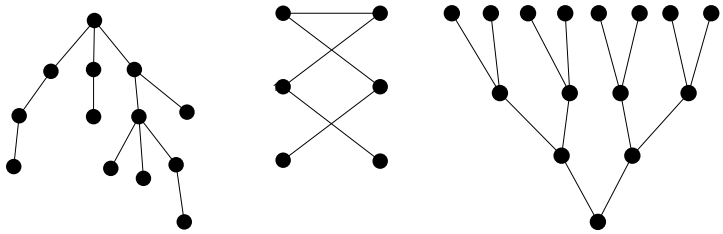
Předpokládejme nyní, že souvislý graf má kromě dvou vrcholů u, v všechny ostatní vrcholy sudého stupně. Přidáme ke grafu navíc hranu $e = uv$. Tento nový graf má všechny vrcholy sudého stupně a podle dokázané předchozí části v něm existuje uzavřený eulerovský tah W. Odebereme-li od W uměle přidanou hranu e, dostaneme eulerovský tah v původním grafu. □

Stromy

Definice. *Strom je souvislý graf neobsahující kružnice.*

Někdy se grafům bez kružnic říká acyklické, ale terminologie není zcela ustálená. Pro orientované grafy mívá termín acyklický trochu jiný význam.

Příklady stromů jsou na následujícím obrázku.



Běžný příklad stromu je tzv. genealogický strom, který zachycuje posloupnost a rozvětvování členů rodiny od zakladatele k potomkům.

Můžeme si povšimnout, že graf G, který neobsahuje kružnice a není souvislý, má za komponenty souvislosti stromy. Plyne to z toho, že komponenta jako podgraf grafu bez kružnic nemůže obsahovat kružnici a přitom je souvislá. Takový graf se někdy nazývá les.

Strom lze ekvivalentě popsat i jinými vlastnostmi, které jsou o něco názornější.

Věta 4. *Mějme graf $G = (V, E)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) *G je strom.*

(ii) *G je minimální souvislý, tj. G je souvislý a vynecháním jakékoli hrany vznikne nesouvislý graf.*

(iii) *Mezi každými dvěma vrcholy existuje jediná cesta, která je spojuje.*

(iv) *G je maximální graf bez kružnic, tj. G neobsahuje kružnice a přidáním jakékoli nové hrany kružnice vznikne.*

Důkaz. (i) ⇒ (ii) Protože strom je z definice souvislý graf, k ověření (ii) zbývá ukázat, že odebráním jakékoli hrany vznikne nesouvislý graf. Odeberme hranu $e = uv$ z grafu G. Kdyby zůstal souvislý, pak v něm existuje cesta P spojující vrcholy u a v. Tato cesta s přidanou hranou e by v původním grafu G vytvořila kružnici, což nelze.

(ii) ⇒ (iii) Předpokládejme, že graf má vlastnost (ii), a přesto v něm existují vrcholy u a v spojené dvěma různými cestami P_1 a P_2. Označme w první vrchol, ve kterém se při

postupu z u cesty P_1 a P_2 rozejdou, tj. existují hrany e_1 a e_2 vycházející z w, $e_1 \neq e_2$ a $e_1 \in P_1$ a $e_2 \in P_2$. Pak vynecháním hrany e_1 z grafu G neporušíme jeho souvislost.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Je zřejmé, že graf mající vlastnost (iii) nemůže obsahovat kružnici, neboť libovolné dva vrcholy ležící na této kružnici by bylo možné spojit dvěma různými způsoby. Zbývá si uvědomit, že přidáním jakékoli hrany do grafu G kružnice vznikne. Přidejme tedy do G novou hranu $e = uv$ spojující vrcholy u a v. Protože G má vlastnost (iii), musí být souvislý, a tedy vrcholy u, v byly v původním grafu spojeny cestou P. Dodáme-li k P ještě novou hranu e, vznikne kružnice.

(iv) $\Rightarrow$ (i) O grafu G víme, že neobsahuje kružnice, stačí tedy dokázat jeho souvislost. Kdyby u a v patřily do různých komponent grafu G, pak přidáním hrany uv nemůže vzniknout kružnice. Proto G je souvislý. □

K předchozí větě přidáme ještě jednu vlastnost stromu, která je sice snadno odvoditelná, nicméně patří k velmi důležitým.

Věta 5. *Každý strom s alespoň dvěma vrcholy má alespoň dva vrcholy se stupněm jedna.*

Důkaz. Uvažujme ve stromu cestu P maximální délky. Pak její koncové vrcholy jsou právě hledané vrcholy stupně jedna. K tomu si stačí uvědomit, že kdyby např. koncový vrchol měl stupeň víc než jedna, pak musí existovat hrana $e \notin P$, jejímž přidáním k P bychom dostali cestu delší nebo by vznikla kružnice. Ani jedno však není možné. □

Nakonec si položme otázku, kolik má strom hran? Jako u každého souvislého grafu, počet hran závisí samozřejmě na počtu vrcholů, viz Větu 2, a na dalších vlastnostech grafu. U stromu, poněkud překvapivě, počet hran závisí *pouze* na počtu vrcholů.

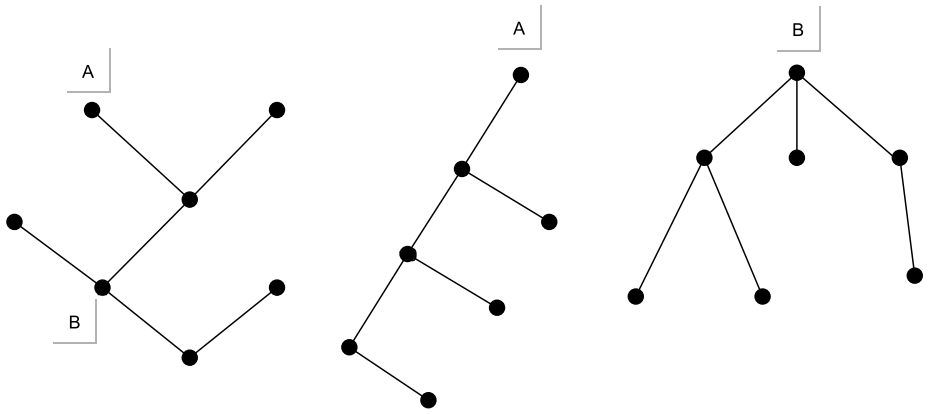
Věta 6. *Každý strom s n vrcholy má $n - 1$ hran.*

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle počtu vrcholů. Má-li strom pouze jeden vrchol, pak nemůže mít žádnou hranu, neboť jediná hrana přicházející v úvahu je smyčka, a ta by vytvořila kružnici.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro stromy s n vrcholy a mějme strom G s $n + 1$ vrcholy. Podle Věty 5 existuje vrchol u, jehož stupeň je jedna. Odebráním vrcholu u spolu s hranou, které do něj vede, dostaneme opět souvislý graf bez kružnice, tj. strom. Protože má n vrcholů, podle indukčního předpokladu ma $n - 1$ hran. Odtud plyne, že původní strom G má n hran a důkaz je uzavřen. □

Definice. *Kořenový strom je strom, u kterého je jeden vrchol označen jako kořen.*

Tím, že označíme jeden vrchol za kořen, zavádíme automaticky do stromu následující uspořádání mezi vrcholy. Protože podle Věty 4(iii) vede z kořene do jakéhokoli vrcholu právě jediná cesta, máme mezi vrcholy na této cestě zavedeny pojmy *následník* vrcholu a *předchůdce* vrcholu. Obvykle pak kreslíme kořenové stromy tak, že kořen umístíme nahoru a hrany směřují od něj dolů. Vrchol, který nemá následníka se nazývá list. Je třeba podotknout, že různými volbami kořene vznikají různé kořenové stromy, viz obrázek.



Kořenové stromy slouží jako modely v mnoha situacích. Nejběžnější jsou např. struktura organizace, kde vrchol označuje pozici v dané organizaci a hrany pak nadřízenost či podřízenost těchto pozic. Jiný příklad je uspořádání souborů v paměti počítače. Kořen odpovídá hlavnímu adresáři, vrcholy podadresářům a listy jednotlivým souborům.

Definice. *Kořenový strom se nazývá n-ární, jestliže každý vrchol má nejvýše n následovníků. Má-li každý vrchol, který není list, přesně n následovníků, nazýváme takový strom plně n-ární.*

Mezi počtem vrcholů a počtem listů plně n-árního stromu je jednoduchý vztah.

Věta 7. *Plně n-ární strom s l listy má $(nl-1)/(n-1)$ vrcholů.*

Důkaz. Označme si počet vrcholů v. Každý vrchol, který není list má n následníků. Počet takových následníků je tím $n(v-l)$. Zbývá přidat vrchol, který není následník, a to je kořen. Tím dostáváme celkový počet vrcholů $v = n(v-l)+1$. Odtud již plyne tvrzení. □

Příklad. Jistý člověk pošle 5 lidem dopis žádající je, aby ho okopírovali a poslali dalším 5. Někteří to učiní, jiní ho hodí do koše.

(i) Kolik lidí dostalo takový dopis, víme-li, že celý řetěz skončil po té, co 73 lidí hodilo dopis do koše a předpokládáme-li, že nikdo nedostal takový dopis dvakrát.

(ii) Jestliže 10 000 lidí poslalo dopis během trvání celého posílacího řetězce, kolik lidí obdrželo dopis a kolik se jich rozhodlo dopisy dále neposílat? (Stále předpokládáme, že nikdo nedostal více než jeden dopis.)

(i) Situaci modelujeme pomocí 5-árního stromu, o kterém víme, že má 73 listů. Podle Věty 7 je počet vrcholů 91. Odečteme-li prvního člověka, pak máme, že dopis dostalo 90 lidí.

(ii) Počet lidí, kteří obdrželi dopis je počet vrcholů příslušného 5-árního stromu bez kořene. Vztah mezi počtem vrcholů v a listů l je

$$v = n(v-l)+1.$$

Protože $v - l = 10^4 + 1$ máme, že $v = 5 \cdot 10^4 + 6$, a tedy počet lidí, kteří obdrželi dopis je 50 005. Z toho se jich $l = 40\,005$ rozhodlo řetěz přerušit. (V tomto příkladu vlastně nepotřebujeme používat vzorec z Věty 7. Jestliže 10 000 lidí poslalo dopis dál, tak ho od nich obdrželo 50 000 dalších +5, kteří dostali dopis od prvního člověka v řetězci.)

Představme si silniční síť mezi obcemi daného okresu. Při dlouhotrvajícím sněžení je třeba cesty prohrnovat. Jaké cesty k prohrnování vybrat, aby se minimalizoval počet upravovaných cest a přitom upravené cesty spojovali každé dvě obce?

Definice. *Kostra grafu G je každý strom $T \subset G$ obsahující všechny vrcholy grafu G.*

Snadno vidíme, že pokud G má kostru, je nutně souvislý. Obráceně, máme-li souvislý graf G pak nejmenší (tj. s minimálním počtem hran) souvislý podgraf T obsahující všechny vrcholy je hledaná kostra. Podle Věty 4 (ii) je totiž takový minimální graf T strom. Vidíme, že graf G má kostru právě, když je souvislý.

Kolik různých koster má K_4? (12) Kolik je neizomorfních koster v K_4? (2)

Kostra představuje nejekonomičtější propojení všech vrcholů grafu. Takových koster je v grafu více a jsou v zásadě rovnocené. Situace se změní, pokud každé hraně e grafu připíšeme jisté ohodnocení, tj. nezáporné číslo $w(e)$, a budeme chtít nalézt kostru pro níž je součet ohodnocení jejích hran minimální. Praktický význam takové situace je zřejmý: vrcholy grafu představují např. obce či města, která chceme propojit železničními, potrubními nebo nějakými komunikačními spoji a ohodnocení hran znamená náklady vynaložené k vybudování jednotlivých spojení. Matematický popis je v následující definici.

Definice. *Mějme graf $G = (V, E)$. Zobrazení $w\colon E \longrightarrow \langle 0, \infty)$ se nazývá ohodnocení grafu G a číslo*

$$w(G) = \sum_{e \in E} w(e)$$

váhou grafu G. Kostru grafu G s minimální váhou budeme nazývat minimální kostra.

Existence minimální kostry je jasná, neboť v grafu G je pouze konečně mnoho koster a jedna (nebo i více) z nich musí mít minimální váhu. Co však není jasné je důležitá optimalizační úloha, jak v daném souvislém grafu minimální kostru nalézt.

Věta 8. (Kruskalův algoritmus) *Mějme souvislý graf $G = (V, E)$ s ohodnocením w. Následující algoritmus vytváří minimální kostru T grafu G.*

(1) *Zvol jakoukoli hranu e_0 s minimálním ohodnocením, která netvoří smyčku.*

(2) *Jsou-li vybrány hrany $e_0, e_1, \ldots, e_{k-1}$, vyber mezi zbývajícími $E \setminus \{e_0, e_1, \ldots, e_{k-1}\}$ hranu e_k s minimálním ohodnocením takovou, aby jejím přidáním nevznikla kružnice.*

(3) *Aplikuj bod* (2) *dokud to lze.*

Důkaz. Nechť $T \subset G$ je graf zkonstruovaný podle algoritmu. Je zřejmé, že T neobsahuje kružnici, neboť hrany se do T přidávaly tak, aby kružnice nevznikla. Konstrukce končí v okamžiku, když už nelze provést krok (2), což specielně znamená, že T obsahuje všechny

vrcholy grafu G. Vidíme, že T je maximální graf bez kružnic, tj. podle Věty 4 (iv), T je kostra grafu G. Naším úkolem zůstává ukázat, že je minimální.

Symbolem T' označíme tu z minimálních koster grafu G, která se s T shoduje v nejvíce hranách a dokážeme, že $T = T'$.

Předpokládejme, že $T \neq T'$. Hrany v T jsme vybírali postupně podle algoritmu a nechť $e = uv$ je první hrana v T, která nepatří do T'. Ovšem vrcholy u, v do T' patří, neboť T' je kostra. Podle Věty 4 (iii) existuje jediná cesta $P \subset T'$ spojující u a v. Tato cesta musí obsahovat alespoň jednu hranu, nazvěme ji e', která nepatří do T, neboť pak by v T existovala kružnice.

Patřila e' mezi kandidáty v kroku, kdy jsme vybírali hranu e? Hrana e je první hranou v T, která nepatří do T', tj. všechny dříve vybrané hrany do T' patří. Proto eventuálním přidáním hrany e' k těmto dosud vybraným nemůže vzniknout kružnice, neboť T' je strom. Takže e' byla mezi možnými kandidáty na výběr. Protože jsme ale vybrali hranu e, platí $w(e) \leq w(e')$.

Nyní pozměníme minimální kostru T' následovně: odebereme od ní hranu e' a místo ní přidáme hranu e. Vzniklý graf $\widetilde{T}$ je opět kostra, která díky výměně hran e a e' splňuje $w(\widetilde{T}) \leq w(T')$. Je jasné, že ostrá nerovnost nastat nemůže, neboť T' je kostra s minimální váhou, takže $w(\widetilde{T}) = w(T')$. Kostra $\widetilde{T}$ je také minimální a navíc má s T více společných hran než T'. Tento spor uzavírá důkaz, že $T = T'$, a tedy T je opravdu minimální kostra. □

Minimální kostru dávají i další algoritmy. Např. Primův algoritmus, který se liší od Kruskalova tím, že další hrana s minimálním ohodnocením se navíc bere jen z hran vycházejících z vrcholu už částečně vytvořeného stromu. Je možné rovněž Kruskalův postup v jistém smyslu obrátit: Z grafu postupně vynecháváme hrany s nejvyšším ohodnocením, pokud jejich vypuštěním zůstává graf souvislý. Na konci dostaneme minimální kostru.

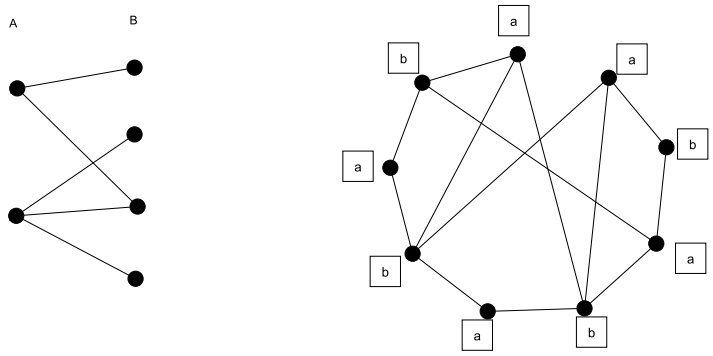
Párování

Příklad. Na promočním večírku je 150 studentů. Víme, že každá dívka se zná s 20 hochy a každý hoch se zná s 20 dívkami. Je možné ze všech účastníků sestavit taneční páry tak, aby se tanečníci znali?

Povšimněme si, že ani nevíme, zda je počet dívek stejný jako počet hochů. K vyřešení tohoto problému bude vhodné si speciální graf, který danou situaci znázorňuje, nějak pojmenovat.

Definice. *Graf $G = (V, E)$ se nazývá bipartitní, jestliže množina vrcholů se dá rozložit na dvě části, $V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, a každá hrana spojuje vrchol z A s vrcholem z B, tj. každá hrana je tvaru $e = ab$, kde $a \in A$ a $b \in B$.*

Na obrázku jsou příklady bipartitních grafů.



Definice. *Párování v $G = (V, E)$ je taková podmnožina hran $F \subset E$, že žádné dvě hrany z F nemají společný vrchol.*

Je-li graf $G = (V, E)$ bipartirní, $V = A \cup B$, pak úplné párování z A do B je takové párování $F \subset E$, že z každého vrcholu množiny A vede nějaké hrana párování F.

Grafy na obrázku před definicí mají párování, avšak zatímco první z nich má úplné párování z A do B, u druhého takové úplné párování z A do B neexistuje. Pro jednodušší formulaci věty o existenci úplného párování bude vhodné si zavést následující označení. Mějme podmnožinu $S \subset V$ množiny vrcholů. Symbol $N(S)$ označuje všechny vrcholy, které jsou hranou spojeny s nějakým vrcholem v množině S. Volně řečeno, do $N(S)$ dáme všechny vrcholy, které jsou sousedy nějakého vrcholu z S.

Věta 9. *Mějme bipartitní graf $G = (V, E)$, kde $V = A \cup B$. Pak existuje úplné párování z A do B právě, když pro každou podmnožinu $S \subset A$ platí*

$$(*) \qquad |S| \leq |N(S)|.$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $F \subset E$ je úplné párování z A do B a mějme $S \subset A$ libovolnou. Každá hrana párování F spojuje vrchol z množiny S s vrcholem v $N(S)$, proto je v $N(S)$ alespoň tolik prvků jako v S.

Obrácenou implikaci budeme dokazovat indukcí podle velikosti množiny A. Předpokládejme, že v bipartitním grafu platí podmínka (*).

(1) $|A| = 1$, tj. $A = \{a\}$. Protože $|N(A)| \geq 1$, spojíme vrchol a s libovolým vrcholem $b \in N(A)$ a hledané párování se skládá z této jediné hrany ab.

(2) Předpokládáme nyní, že tvrzení platí kdykoli $|A| \leq n$ a uvažujeme bipartitní graf s $|A| = n + 1$. Mohou nastat dva případy:

   (a) Pro každou neprázdnou vlastní podmnožinu $S \subset A$ platí v podmínce (*) ostrá nerovnost, $|S| < |N(S)|$. V tom případě spojíme libovolný vrchol $a \in A$ s nějakým vrcholem $b \in N(a)$ a pak oba vrcholy spolu se všemi hranami, které do nich vedou z grafu vypustíme. Vznikne graf, kde $|A| = n$, stále splňující podmínku (*). Podle indukčního předpokladu v něm existuje úplné párování, které dodáním hrany ab vytvoří úplné párování v původním grafu.

(b) Existuje neprázdná vlastní podmnožina $S \subset A$ taková, že

$$|S| = |N(S)|.$$

Uvažujeme-li bipartitní podgraf s vrcholy S a $N(S)$, pak splňuje podmínku (*), neboť ji splňuje celý graf. Podle indukčního předpokladu má tento podgraf úplné párování F_1 z S do $N(S)$.

Jak to vypadá se zbytkem grafu? Ověříme, že i on splňuje podmínku (*). Zvolme si m vrcholů v $A \setminus S$. Kdyby byly spojeny s nejvýše $m-1$ vrcholy v množině $B \setminus N(S)$, pak přidáním těchto m vrcholů k množině S bychom dostali situaci, kdy $m+|S|$ vrcholů je spojeno s nejvýše $m-1+|N(S)| = m-1+|S|$ vrcholy. Což ovšem odporuje podmínce (*). Zjistili jsme, že i zbytek grafu vyhovuje (*) a podle indukčního předpokladu existuje i v této části grafu úplné párování F_2. Hledané úplné párování je $F = F_1 \cup F_2$.

□

Z Věty 9 vyplývá konečně poznatek, který nám pomůže při vyřešení situace v příkladu na začátku toho oddílu.

Věta 10. *Mějme bipartitní graf $G = (V, E)$, kde $V = A \cup B$, takový, že všechny vrcholy mají stejný stupeň $d \geq 1$. Pak $|A| = |B|$ a existuje úplné párování z A do B.*

Důkaz. Ověříme, že graf G splňuje podmínku (*) z Věty 9. Mějme $S \subset A$. Z této množiny vede celkový počet $d|S|$ hran. Kdyby tyto hrany končily v méně než $|S|$ vrcholech množiny B, vedlo by nutně do nějakého vrcholu množiny B více než d hran, což je spor se stupněm vrcholu.

Podle Věty 9 existuje úplné párování z A do B. Tím ale $|A| \leq |B|$. Ze symetrie celé situace existuje rovněž úplné párování z B do A, a tedy $|B| \leq |A|$. Dohromady, $|A| = |B|$. □

Řešení příkladu: Situace je znázorněna bipartitním grafem, kde množina A představuje dívky a množina B hochy. Hrany indikují vzájemnou známost. Stačí nyní aplikovat Větu 10 s $d = 20$.

Ramseyova věta

V této části se budeme zabývat otázkou, jaké pravidelnosti se nutně musí objevit v každém grafu, je-li dostatečně velký. Specielně nás bude zajímat, zda se v takovém grafu objeví jako podgraf buďto úplný graf K_n nebo jeho doplněk K_n^c. Obvyklý motivační příklad je, že ve skupině šesti lidí se vždy najdou tři, kteří se mezi sebou navzájem znají nebo tři, kteří se vůbec neznají. V řeči grafů to znamená, že v každém grafu o šesti vrcholech existuje buď trojúhelník nebo tři vrcholy, mezi nimiž nevede žádná hrana, viz cvičení (17).

Ekvivalentně lze otázku o existenci K_n nebo K_n^c v daném grafu G formulovat tak, že hrany v G obarvíme jednou barvou a hrany, které v G chybí doplníme, ale obarvíme je jinou barvou. Vynikne tak úplný graf, jehož hrany jsou obarveny dvěma různými barvami. Problém nyní spočívá v nalezení úplného podgrafu K_n jehož všechny hrany mají stejnou barvu. Následující věta je formulována právě v jazyku obarvení hran.

Věta 11. (Ramsey) *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$, že jakýkoli úplný graf s alespoň N vrcholy, jehož hrany jsou libovolně obarveny dvěma různými barvami, obsahuje jednobarevný K_n jako podgraf.*

Důkaz. Tvrzení je triviální pro $n = 1$, proto uvažujme $n \geq 2$. Hledané číslo N položíme

$$N = 2^{2n-3}$$

a ukážeme, že v každém úplném grafu s alespoň N vrcholy najdeme K_n jehož všechny hrany mají stejnou barvu. Barvy, které budeme používat, jsou např. bílá a modrá.

Zvolme si jakoukoli podmnožinu $V_1 \subset V$ mající N prvků, $|V_1| = N$, a libovolný vrchol $v_1 \in V_1$. Uvažujme teď hrany, které spojují v_1 s ostatními vrcholy ve V_1. Protože množina $V_1 \setminus v_1$ má lichý počet prvků, buď bílých hran je alespoň polovina celkového počtu uvažovaných hran nebo modrých hran je alespoň polovina celkového počtu, tj. je jich alespoň 2^{2n-4}. Z těch hran, kterých je většina si jich vybereme přesně 2^{2n-4}, a vrcholy, do kterých vedou, označíme jako V_2.

Nyní zvolíme vrchol $v_2 \in V_2$ libovolně. Podobně jako výše existuje barva, že hrany této barvy spojují v_2 alespoň s polovinou ostatních vrcholů ve V_2. Z vrcholů, do kterých tyto hrany vedou vybereme přesně 2^{2n-5} vrcholů, což bude množina V_3.

Takto pokračujeme až vytvoříme $2n-2$ množin $V_1, V_2, \ldots, V_{2n-2}$ a $2n-2$ vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_{2n-2}$ takových, že platí

(i) $v_i \in V_i$ a $|V_i| = 2^{2n-2-i}$, $i = 1, 2, \ldots, 2n-2$;

(ii) $V_{i+1} \subset V_i \setminus \{v_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, 2n-3$;

(iii) v_i je spojen hranami stejné barvy se všemi vrcholy ve V_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, 2n-3$.

Mezi prvními $2n-3$ vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_{2n-3}$ je alespoň polovina (tj. $n-1$) takových, že pro ně v bodě (iii) nastala tatáž barva, řekněme, že bílá. Tyto vrcholy spolu s posledním v_{2n-2} vytvoří K_n, mající tak všechny hrany bílé. □

Nejmenší číslo m ve Větě 11 se nazývá Ramseyovo číslo $R(n)$. Jeho přesná hodnota není známa kromě několika jednoduchých případů: $R(2) = 2$, $R(3) = 6$ a $R(4) = 18$. Pro $R(5)$ je např. znám odhad $41 \leq R(5) \leq 49$, apod.

Cvičení.

(1) Uvažujme jednoduchý graf G se šesti vrcholy.

   (a) Může být v G současně vrchol stupně 0 a vrchol stupně 5?

   (b) Obsahuje-li G právě dva vrcholy téhož stupně, mohou to být stupně 0 nebo 5?

   (c) Je možné, aby každý vrchol v G byl jiného stupně?

(2) Komplement G^c grafu G je graf se stejnými vrcholy, kde dva vrcholy jsou spojeny hranou v G^c právě, když nejsou spojeny v původním grafu G. Ukažte, že alespoň jeden z dvojice G a G^c je vždy souvislý graf.

(3) Silniční síť daného okresu spojuje $2n$ obcí tak, že z každé obce vede n silnic do n sousedních obcí. Existuje silniční spojení z libovolné obce do libovolné obce?

(4) Mají-li hrany v souvislém grafu navzájem různé ohodnocení, pak existuje jediná minimální kostra.

(5) Ukažte, že graf je bipartitní právě, když neosahuje kružnici liché délky.

(6) k-rozměrná krychle má párování obsahující všechny vrcholy, $k \geq 1$.

(7) Kolik párování obsahující všechny vrcholy má K_{2n}?

(8) Kolik různých párování obsahující všechny vrcholy má strom?

(9) Nalezněte nekonečný bipartitní graf, ve kterém je splněna podmínka (*) z Věty 9, a přesto neexistuje úplné párování.

(10) Mějme strom T o 50 hranách. Odstraněním jedné hrany se strom T rozpadne na dva stromy T_1 a T_2, o kterých platí, že počet hran v T_1 se rovná počtu vrcholů v T_2. Určete počty vrcholů pro T_1 a T_2.

(11) Ukažte, že souvislý graf s n vrcholy je strom právě, když součet stupňů všech vrcholů je $2(n-1)$.

(12) V souvislém grafu mají jakékoli dvě cesty maximální délky společný vrchol.

(13) Předpokládejme, že jistá hrana souvislého grafu patří do každé kostry tohoto grafu. Co lze o této hraně říci?

(14) Uvažujme souvislý graf G o alespoň dvou vrcholech. Ukažte, že v G exisují dva vrcholy takové, že odstraněním jednoho nebo druhého zůstane graf souvislý.

(15) Mějme bipartitní graf $G = (V, E)$, $V = A \cup B$, který má úplné párování z A do B, tj. platí podmínka (*) z Věty 9.

   (a) Platí-li dokonce $|N(S)| \geq |S| + 1$ pro každou vlastní podmnožinu $S \subset A$, pak všechny vrcholy $a \in A$ mají vlastnost, že pro každou hranu ab nalezneme v G úplné párování z A do B obsahující hranu ab.

   (b) Je-li $S \subset A$ minimální množina, pro kterou platí $|N(S)| = |S|$, pak každý vrchol $a \in S$ má vlastnost, že pro každou hranu ab nalezneme v G úplné párování z A do B obsahující hranu ab.

   (c) Ukažte, že v grafu G existuje vrchol $a \in A$, že pro každou hranu ab nalezneme v G úplné párování z A do B obsahující hranu ab.

   (d) Je-li stupeň $d(a) = d$ pro všechny vrcholy $a \in A$, pak v G exisuje alespoň N úplných párování, kde

$$N = \begin{cases} d! & \text{pro } d \leq |A|, \\ d(d-1)\cdots(d-|A|+1) & \text{pro } d > |A|. \end{cases}$$

(16) Dva hráči hrají na souvislém grafu $G = (V, E)$ hru spočívající ve střídavém vybírání různých vrcholů $u_1, u_2, \dots$ tak, že následný vrchol u_{i+1} musí být spojen hranou s předchozím u_i. Poslední, kdo může takový tah učinit, vyhrává. Ukažte, že první hráč má vyhrávající strategii právě, když v grafu G neexistuje párování obsahující všechny vrcholy (tzv. perfektní párování).

(17) Ukažte, že každý graf o šesti vrcholech obsahuje buď K_3 nebo K_3^c.

Řešení.

(1a), (1b), (1c) Na všechny otázky je odpověď negativní.

(2) Není-li G souvislý, pak každý vrchol v každé z jeho komponent je v G^c spojen hranou se všemi vrcholy v ostatních komponentách.

(3) Kdyby graf znázorňující spojení mezi obcemi nebyl souvislý, pak každá jeho komponenta má nutně alespoň $n + 1$ vrcholů, což nelze.

(5) Můžeme předpokládat, že graf G je souvislý, jinak provedeme následující úvahy v každé komponentě souvislosti. Je-li graf bipartitní s množinou vrcholů $A \cup B$, pak při procházení kružnicí se na ní střídají vrcholy z A a vrcholy z B. Při navrácení se do výchozího bodu jsme tak nutně museli projít sudý počet hran. Obráceně, máme-li souvislý graf, kde se každá kružnice skládá ze sudého počtu hran, rozdělíme množinu vrcholů V na části A a B následovně. Nechť T je kostra grafu G a $v \in T$ libovolný. Tento vrchol dáme do množiny A. Ostatní vrcholy dáme do množiny A nebo B podle toho, jestli se k němu dostaneme z vrcholu v cestou v T mající sudý nebo lichý počet hran.

(6) Párování tvoří hrany, které spojují vrcholy lišící se právě v první souřadnici.

(7) Protože hrana je určena dvojicí vrcholů, vybíráme dvojice vrcholů v K_{2n}. První dvojici vybereme $\binom{2n}{2}$ způsoby, druhou $\binom{2n-2}{2}$ způsoby atd. Protože nezáleží na pořadí, v jakém hrany vybíráme, výsledek dělíme $n!$, což po úpravě dá $(2n)!/(2^n n!)$.

(8) Nejvýše jedno.

(9) Např. graf $G = (A \cup B, E)$, kde $A = \{0, 1, 2, \dots\}$, $B = \{1, 2, \dots\}$ a hrany jsou

$$E = \big\{\{k, k\} \;\big|\; k \geq 1\big\} \cup \big\{\{0, k\} \;\big|\; k \geq 1\big\}.$$

(10) $|V_1| = 26$, $|V_2| = 25$.

(11) Součet stupňů je roven dvojnásobku počtu hran, graf má tedy $n - 1$ hran. Jedna implikace plyne z Věty 6 a druhá z faktu, že graf s $n - 1$ hranami je podle Věty 2 (i) minimální souvislý. Nyní použijeme charakterizaci stromu, Větu 4 (ii).

(12) Mějme $P = (u_0 \dots u_n)$ a $P' = (u'_0 \dots u'_n)$ dvě maximální cesty a předpokládejme, že $P \cap P' = \emptyset$. Existuje cesta $Q = (u_0 \dots u \dots u' \dots u'_n)$ spojující u_0 a u'_n, kde u je poslední vrchol na Q patřící do P a u' je první vrchol na Q ležící za u a patřící do P'. Jedna z částí $(u_0 \dots u)$ a $(u \dots u_n)$ cesty P je dlouhá alespoň jako polovina P a podobně jedna z částí $(u'_0 \dots u')$ a $(u' \dots u'_n)$ cesty P' je dlouhá alespoň jako polovina P'. Spojením těchto delších částí pomocí úseku $(u \dots u')$ cesty Q by vznikla delší cesta než maximální.

(13) Je to hrana, jejíž odstraněním se graf rozpadne na dvě komponenty.

(14) Zvolte kostru v grafu G a použijte Větu 5.

(15a) Zvolíme hranu ab. Po odebrání vrcholů a a b z grafu G bude zbylý podgraf splňovat podmínku (*).

(15b) Úplně stejný argument jako v (15a).
(15c) Graf má nutně jednu z vlastností (15a) nebo (15b).
(15d) Podle (15c) existuje vrchol $a \in A$, že libovolnou hranu ab lze doplnit na párování. V tomto prvním kroku tak máme d možností. Odebráním vrcholů a a b budou mít vrcholy v A stupeň alespoň $d-1$. Aplikujeme (15c) na tento podgraf a postup opakujeme dokud to lze.
(16) Má-li graf perfektní párování, odpovídá hráč č.2 na tah hráče č.1 tak, že volí vrchol, který je spojen hranou perfektního párování s vrcholem, jež zvolil hráč č.1. Tak hráč č.2 vždy vyhraje, a tedy hráč č.1 nemá vyhrávající strategii.
Nemá-li graf perfektní párování, zvolíme si jakékoli párování $F \subset E$, které má maximální počet hran. Vrcholy tvořící konce hran párování F označme $U \subset V$. Protože F není perfektní, existuje vrchol u_1, do něhož nevede žádná hrana z F. To je první volba hráče č.1. Hrany vycházející z vrcholu u_1 musí končit v množině U, jinak by F nebylo maximální. Hráč č.2 musí tak volit vrchol z $u_2 \in U$ a odpověď hráče č.1 je vrchol u_3, že $u_2u_3 \in F$. Další postup je stejný, hráč č.2 musí nutně vybrat $u_4 \in U$, protože F je maximální, a hráč č.1 volí u_5 tak, aby $u_4u_5 \in F$. Tímto způsobem má hráč č.1 zaručeno, že pokaždé vyhraje, tj. má vyhrávající strategii.
(17) Zvolme vrchol v libovolně. Ten je spojen s nějakými vrcholy u_1, u_2 a u_3 buď v grafu G nebo v G^c. Předpokládejme, že nastala první možnost, druhá se řeší analogicky. Jsou-li některé z vrcholů u_1, u_2, u_3 spojeny mezi sebou hranou, vytvoří s vrcholem v trojúhelník, tj. K_3. Nevede-li mezi u_1, u_2, u_3 žádná hrana, tvoří K_3^c.