

Kombinatorika a geometrická pravděpodobnost

1. Mějme v rovině 6 bodů, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce. Spojíme náhodně vybrané 3 dvojice úsečkou. Jaká je pravděpodobnost, že vznikne trojúhelník, jestliže
- (a) dvojice se ve výběru mohou opakovat?
 - (b) dvojice se ve výběru nemohou opakovat?

Řešení: Počet všech možných úseček je $\binom{6}{2} = 15$.

$$(a) P = \frac{15 \cdot 8 \cdot 1}{15^3} = \frac{8}{225}, \quad (b) P = \frac{15 \cdot 8 \cdot 1}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{8}{182}.$$

2. V krabici je 6 zelených a 11 žlutých míčků. Postupně vytáhneme náhodně tři z nich. Víme, že první a třetí tažený míček je žlutý. Který způsob tahu - s navrácením po každém tahu nebo bez navrácení - dá větší pravděpodobnost tohoto jevu?

Řešení: S navrácením: Počet všech trojic vytažených míčků je 17^3 . Protože na druhém místě může být buď zelený - takových trojic je $11 \cdot 6 \cdot 11$ - nebo žlutý, takových trojic je 11^3 , je

$$P = \frac{11^2 \cdot 6 + 11^3}{17^3} = 0.418$$

Bez navrácení: Počet všech trojic je $17 \cdot 16 \cdot 15$. Počet příznivých trojic je $11 \cdot 6 \cdot 10 + 11 \cdot 10 \cdot 9$. Takže

$$P = \frac{11 \cdot 6 \cdot 10 + 11 \cdot 10 \cdot 9}{17 \cdot 16 \cdot 15} = 0.404.$$

3. 5 vadných tištěných spojů je zamícháno mezi 10 dobrých. Postupně je testujeme dokud neobjevíme všechny dobré spoje. Jaká je pravděpodobnost, že poslední z dobrých spojů bude objeven jako 12-tý v pořadí?

Řešení: Všech uspořádání 15 spojů je $15!$. Příznivá uspořádání vzniknou takto: Na zadané 12. místo dáme jeden z 10 dobrých spojů. Za něj na místa 13, 14 a 15 umístíme 3 vadné spoje, což lze $5 \cdot 4 \cdot 3$ způsoby. Na zbylá místa 1 – 11 dáme zbylých 11 spojů jakkoli, což lze $11!$ způsoby.

$$P = \frac{10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 11!}{15!} = 0.018.$$

4. Studenti A a B jdou na zkoušku, jejíž hodnocení je 1, 2 a 3. Označíme následující jevy

$$\begin{aligned} A &= \{A \text{ dostane } 2\}, \\ B &= \{B \text{ dostane } 2\}, \\ C &= \{\text{žádný } 1, \text{ ale aspoň jeden } 2\} \end{aligned}$$

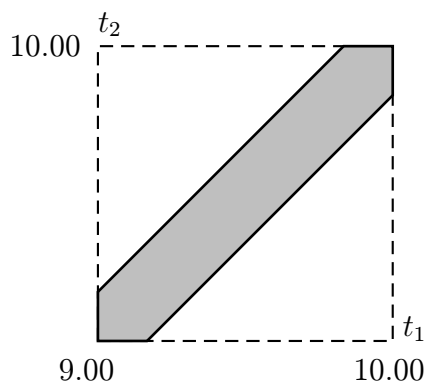
a víme, že $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.3$ a $P(C) = 0.4$. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jeden dostane 2, ale nikdo 3?

Řešení: Označíme si $D = \{\text{alespoň jeden dostane } 2, \text{ ale nikdo } 3\}$. Pak $C \subset A \cup B$ a $D = ((A \cup B) \setminus C) \cup (A \cap B)$. Odtud

$$\begin{aligned} P(D) &= P((A \cup B) \setminus C) + P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(C) + P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(C) + P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(C) = 0.2. \end{aligned}$$

5. Dva přátelé A a B si domluví schůzku mezi 9.00 a 10.00. Jejich příchody na dané místo jsou náhodné v rámci smluveného časového intervalu. Každý bude čekat 10 minut a pak odchází. Jaká je pravděpodobnost, že dojde k setkání?

Řešení: Všechny možné časy příchodů obou přátel je množina dvojic (t_1, t_2) , kde t_1 je čas příchodu osoby A a t_2 čas příchodu osoby B . (Na obrázku je tato množina reprezentována celým čtvercem s čárkovaným okrajem.) Aby se oba přátelé potkali, musí se doby jejich příchodů lišit maximálně o $1/6$ hodiny. Takové příznivé dvojice časů (t_1, t_2) jsou na obrázku vyznačeny šedivou oblastí kolem diagonály.



Tato šedivá oblast zabírá z obsahu čtverce $11/36$, což je hledaná pravděpodobnost.

6. Úsečku délky r rozdělíme náhodně na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že ze vzniklých částí lze sestavit trojúhelník?

Řešení: $1/4$

7. Z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ vybereme postupně tři čísla x_1, x_2 a x_3 . Jaká je pravděpodobnost, že třetí vybrané číslo bude ležet mezi prvními dvěma?

Řešení: Máme šest možností, jak bude vybraná trojice čísel vypadat:

$$x_1 < x_2 < x_3$$

$$x_1 < x_3 < x_2$$

$$x_2 < x_1 < x_3$$

$$x_2 < x_3 < x_1$$

$$x_3 < x_1 < x_2$$

$$x_3 < x_2 < x_1.$$

Díky symetrii mají všechny tyto možnosti stejnou pravděpodobnost. Příznivé výběry jsou dva, druhý a čtvrtý, a proto je pravděpodobnost rovna $1/3$.

8. V krabici máme n bílých a m černých koulí. Postupně je taháme všechny ven (bez navracení). Jaká je pravděpodobnost, že k -tá tažená koule je bílá?

Řešení: Všechny možnosti jak postupně vytáhnout $m+n$ koulí z krabice je $(m+n)!$. Příznivé uspořádání vznikne tak, že na k -té místo dáme bílou kouli, což lze n způsoby. Ostatní koule doplníme libovolně $(m+n-1)!$ způsoby.

$$P = \frac{n(m+n-1)!}{(m+n)!} = \frac{n}{m+n}.$$

9. Rozdělme $2n$ koulí náhodně do n krabic ($n \geq 3$). Jaká je pravděpodobnost, že první krabice bude obsahovat právě 6 koulí? Čemu se tato pravděpodobnost blíží, když $n \rightarrow +\infty$?

Řešení: Všech rozdělení je n^{2n} . Příznivé uspořádání vznikne vybráním 6 koulí, což lze $\binom{2n}{6}$ způsoby, a jejich umístěním do 1. krabice. Zbytek rozdělíme do zbylých $n - 1$ krabic libovolně, a to lze $(n - 1)^{2n-6}$ způsoby.

$$P = \binom{2n}{6} \frac{(n-1)^{2n-6}}{n^{2n}} \rightarrow 2^6 e^{-2} / 6!.$$

10. Rozmístíme $2n$ koulí označených čísly $1, 2, \dots, 2n$ po jedné náhodně do $2n$ krabic rovněž očíslovaných $1, 2, \dots, 2n$. Jaká je pravděpodobnost toho, že u každé krabice bude součet jejího čísla a čísla koule uvnitř sudý? Jaká je hodnota této pravděpodobnosti při $n \rightarrow \infty$?

Řešení: Všech rozmístění je $(2n)!$. Aby součet čísla koule a krabice byl sudý, musí být buď obě čísla sudá nebo obě lichá. Rozdělíme koule se sudým číslem do krabic se sudým číslem, což lze $n!$ způsoby. Stejně po té rozdělíme $n!$ způsoby koule s lichým číslem do krabic s lichým číslem.

$$P = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \rightarrow 0.$$

11. Mějme n krabic a mějme $n + k$ koulí. Všechny tyto koule rozmístíme náhodně do krabic. Jaká je pravděpodobnost toho, že první krabice zůstala prázdná? K čemu se tato hodnota blíží při $n \rightarrow \infty$?

Řešení: Všech rozmístění je n^{n+k} . Příznivá rozmístění jsou ta, u kterých použijeme k rozmístění jen $n - 1$ krabic.

$$P = \frac{(n-1)^{n+k}}{n^{n+k}} \rightarrow e^{-1}.$$

12. $4n$ bílých a n černých koulí je náhodně rozmístěno do n krabic tak, že v každé krabici je právě 5 koulí. Položme

$$A = \{\text{v každé krabici jsou 4 bílé a 1 černá koule}\}.$$

- a) Spočítejte $P(A)$.
b) Pro $n = 5$ určete pravděpodobnost, že všechny černé koule se ocitnou v jediné krabici.

Řešení: a) Počet všech rozdělení $5n$ koulí do n krabic zjistíme tak, že budeme postupně vybírat po 5 koulích a umísťovat je do krabic:

$$\binom{5n}{5} \binom{5n-5}{5} \binom{5n-10}{5} \dots \binom{5}{5} = \frac{(5n)!}{(5!)^n}.$$

Stejně vytvoříme příznivá rozdělení. Do 1. krabice dáme 4 bílé z celkového počtu $4n$ bílých a 1 černou z n černých, což lze $\binom{4n}{4} \binom{n}{1}$ způsoby. Do 2. krabice dáme 4 bílé z $4n - 4$ bílých a 1 černou z $n - 1$ černých. To lze $\binom{4n-4}{4} \binom{n-1}{1}$ způsoby, atd. Počet příznivých rozdělení je tak

$$\binom{4n}{4} \binom{n}{1} \binom{4n-4}{4} \binom{n-1}{1} \dots \binom{4}{4} \binom{1}{1} = \frac{(4n)! n!}{(4!)^n}.$$

Takže

$$P = \frac{(5!)^n (4n)! n!}{(4!)^n (5n)!} = \frac{5^n n! (4n)!}{(5n)!}.$$

- b) $P = 20! 5! 5 / 25! = 1/10626$.

13. Každou z n různě obarvených tyčinek rozložíme na dva díly, kratší a delší. Ze všech $2n$ vzniklých částí utvoříme dvojice. Jaká je pravděpodobnost, že
- v každé dvojici bude jeden kratší a jeden delší díl,
 - každá dvojice bude tvořit původní tyčinku?

Řešení: a) Počet všech rozdělení $2n$ částí do dvojic zjistíme tak, že budeme postupně vybírat po 2 kusech a umísťovat je do dvojic:

$$\binom{2n}{2} \binom{2n-2}{2} \binom{2n-4}{2} \cdots \binom{2}{2} = \frac{(2n)!}{2^n}.$$

Stejně vytvoříme příznivá rozdělení. Do 1. dvojice dáme 1 dlouhou z celkového počtu n dlouhých a 1 krátkou z n krátkých, což lze n^2 způsoby. Do 2. dvojice dáme 1 dlouhou z $n-1$ dlouhých a 1 krátkou z $n-1$ krátkých, a to $(n-1)^2$ způsoby, atd. Počet příznivých rozdělení je tak $(n!)^2$. Takže

$$P = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

b) Zde bude jiný počet příznivých rozdělení. Do každé dvojice k libovolně vybrané dlouhé části máme přesně jednu krátkou část na doplnění. Počet příznivých rozdělení je tak $n!$ a $P = 2^n n! / (2n)!$.

14. Jaká je pravděpodobnost, že mezi n náhodně zvolenými lidmi budou alespoň dva slavit narozeniny ve stejný den?

Řešení: Každý může mít narozeniny v jednom z 365 dní. (Uvažujeme nepřestupný rok.) Počet všech rozložení narozenin n lidí je tak 365^n . Určíme pravděpodobnost jevu opačného než je v zadání úlohy, tj. zajímá nás počet takových rozložení narozenin, kdy každý z n lidí má narozeniny v jiném dni. Těch je $365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - (n-1))$, (součin má n činitelů). Tedy

$$P = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} = 1 - \frac{1}{365^n} \binom{365}{n} n!.$$

15. Z n párů bot vybereme $2k$ jednotlivých kusů.

- Jaká je pravděpodobnost, že jedna mezi vybranými nebude ani jeden pár?
- Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými bude přesně jeden pár?
- Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými budou přesně dva páry?

Řešení: Všech výběrů $2k$ kusů z $2n$ bot je $\binom{2n}{2k}$.

a) Příznivý výběr získáme takto: Z n párů si napřed vybereme $2k$ párů, a to lze $\binom{n}{2k}$ způsoby. Pak z každého takto vybraného páru jednu botu - pravou nebo levou, což je možné dvěma způsoby. Tím počet výběrů bot, mezi kterými není žádný pár je

$$\binom{n}{2k} \overbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}^{2k} = \binom{n}{2k} 2^{2k}.$$

Hledaná pravděpodobnost je

$$P = \frac{\binom{n}{2k} 2^{2k}}{\binom{2n}{2k}}.$$

b) Zvolíme si do výběru jeden celý pár. To lze n způsoby. Zbývá vybrat z $n - 1$ párů $2k - 2$ bot. To je ale předchozí případ a) s $n - 1$ místo n a $2k - 2$ místo $2k$. Tedy

$$P = \frac{n \binom{n-1}{2k-2} 2^{2k-2}}{\binom{2n}{2k}}.$$

c) Zvolíme do výběru celé dva páry, což lze $\binom{n}{2}$ způsoby. Zbývá nám $n - 2$ párů, ze kterých volíme $2k - 4$ bot stejně jako v případě a). Takže

$$P = \frac{\binom{n}{2} \binom{n-2}{2k-4} 2^{2k-4}}{\binom{2n}{2k}}.$$

16. Kniha o k stranách obsahuje celkově n tiskových chyb. Jaká je pravděpodobnost, že na 1. straně je r_1 chyb, na 2. straně je r_2 chyb, ... a na k -té straně je r_k tiskových chyb? ($r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$.)

Řešení: Každá chyba může být na jedné z k stran. Tím je celkový počet rozmístění n chyb na k stran roven k^n . Příznivá rozdělení získáme, že na 1. stranu vybereme r_1 chyb, což lze $\binom{n}{r_1}$ způsoby. Na 2. stranu můžeme dát r_2 chyb $\binom{n-r_1}{r_2}$ způsoby atd. Počet příznivých rozmístění všech chyb je

$$\binom{n}{r_1} \binom{n-r_1}{r_2} \binom{n-r_1-r_2}{r_3} \dots \binom{n-r_1-\dots-r_{k-1}}{r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}.$$

Odpověď je $P = n! / (r_1! \dots r_k! k^n)$.

17. Uvažujme n lidí mezi nimiž jsou zahrnuty i dvě osoby A a B .

- (a) Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném seřazení n lidí do řady bude mezi osobou A a B stát právě k lidí?
 (b) Jaká je pravděpodobnost, že při posazení n lidí kolem kulatého stolu bude mezi A a B právě k lidí?

Řešení: a) Počet všech uspořádání n lidí do řady je $n!$. Počet způsobů, jak do řady umístit osobu A , za ní k volných míst a pak osobu B je $n - k - 1$. Protože A a B se mohou prohodit, vynásobíme předešlé číslo dvěma. Zbýlých $n - 2$ osob umístíme na zbylých $n - 2$ míst libovolně, což lze $(n - 2)!$ způsoby.

$$P = \frac{2(n-k-1)(n-2)!}{n!} = \frac{2(n-k-1)}{n(n-1)}.$$

b) Počet rozmístění n lidí v řadě je n -krát větší než počet rozmístění n lidí kolem kulatého stolu: Máme-li osoby rozesazené kolem stolu, zvolíme jednu z nich jako první a od ní pak ostatní odpočítáváme, jako by stáli v řadě. Protože volba první osoby může být uskutečněna n způsoby, získáme z jednoho rozesazení kolem stolu n různých řad. Počet všech rozesazení n lidí kolem kulatého stolu je tak $n! / n = (n - 1)!$. Příznivá rozesazení získáme následovně. Osoby A a B posadíme tak, aby mezi nimi bylo k volných židlí. Zbýlých $n - 2$ osob rozmístíme na $n - 2$ volných míst $(n - 2)!$ způsoby. Poslední, co musíme vzít v úvahu je fakt, že prohodíme-li osoby A a B získáme nové rozesazení. Toto ovšem platí s výjimkou

jednoho případu: Když $k = (n - 2)/2$, sedí A a B přesně naproti sobě a jejich prohozením nezískáváme nové rozesazení. Závěr:

$$P = \frac{2(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{2}{n-1} \text{ pro } k \neq \frac{n-2}{2},$$

$$P = \frac{(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{1}{n-1} \text{ pro } k = \frac{n-2}{2}.$$

18. V sadě n výrobků je 5 vadných. Vybereme náhodně k z celé sady. Jaká je pravděpodobnost, že vzorek obsahuje právě jeden vadný výrobek, jestliže
- výběr je bez navracení.
 - výběr je s navracením.

Řešení: (a) Počet všech možných výběrů k -tic z n výrobků je $\binom{n}{k}$. Příznivý případ je, když v k -tici je přesně jeden vadný výrobek. Ten můžeme vybrat z 5 vadných a zbylých $k - 1$ doplnit z $n - 5$ výrobků bez závady. To lze $5\binom{n-5}{k-1}$. Výsledek je

$$P = \frac{5\binom{n-5}{k-1}}{\binom{n}{k}}.$$

(b) Počet všech možných výběrů k -tic z n výrobků s navracením je n^k . Příznivý případ je, když v k -tici je přesně jeden vadný výrobek. Ten můžeme vybrat z 5 vadných a umístit ho na jedno z k míst ve vybrané k -tici, což lze $5k$ způsoby. Zbylých $k - 1$ výrobků doplníme z $n - 5$ výrobků bez závady, což dává $(n - 5)^{k-1}$ způsobů. Výsledek je

$$P = \frac{5k(n-5)^{k-1}}{n^k} = \frac{5k}{n} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^{k-1}.$$

19. Mezi N míčky je n bílých a $N - n$ modrých. Náhodně vybereme bez navracení K míčků z celkového počtu.
- Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými bude k bílých?
 - Jak se změní výsledek, budeme-li provádět výběr s navracením každého taženého míčku?

Řešení: (a) Počet všech možných výběrů K -tic z N míčků je $\binom{N}{K}$. Příznivý případ je, když v K -tici je přesně k bílých míčků. Ty můžeme vybrat z n bílých $\binom{n}{k}$ způsoby a zbylých $K - k$ doplnit z $N - n$ modrých. To lze $\binom{n}{k}\binom{N-n}{K-k}$ způsoby. Výsledek je

$$P = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{K-k}}{\binom{N}{K}}.$$

(b) Počet všech možných výběrů K -tic z N výrobků s navracením je N^K . Příznivý případ je, když v K -tici je přesně k bílých míčků. Ty lze vybrat z n bílých n^k způsoby a umístit je do K -tice $\binom{K}{k}$ způsoby. Zbylých $K - k$ míčků doplníme z $N - n$ modrých a to $(N - n)^{K-k}$ způsoby. Výsledek je

$$P = \frac{n^k \binom{K}{k} (N-n)^{K-k}}{N^K} = \binom{K}{k} \left(\frac{n}{N}\right)^k \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{K-k}.$$

Jiný způsob výpočtu je, když si uvědomíme, že se jedná o Bernoulliho schéma s K pokusy vybírání míčků do K -tice, kde úspěch je výběr bílého míčku. Pravděpodobnost úspěchu je n/N a tedy pravděpodobnost k úspěchů z K pokusů je daná

$$P = \binom{K}{k} \left(\frac{n}{N}\right)^k \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{K-k}.$$

20. Nezkušený zaměstnanec vybírá vzorek o n kusech tak, že si zapíše číslo náhodně zvoleného kusu a kus opět vrátí do zásobníku obsahujícího celkově N kusů. Jaká je pravděpodobnost, že jeho seznam obsahuje alespoň dvě duplicitní položky?

Řešení: Uvažujme jev opačný, tj. seznam obsahuje navzájem různé položky. Počet všech možných zápisů délky n , kde položky mohou být brány z N možností je N^n . Chceme-li, aby všechny položky byly navzájem různé, zvolíme si n různých položek z celkového počtu N , což lze $\binom{N}{n}$ způsoby. Tyto položky pak mohou být na seznamu v různých pořadích a to dává dalších $n!$ možností. Celkově

$$P = 1 - \binom{N}{n} \frac{n!}{N^n}.$$

21. A hodí 3 krát mincí, u níž je pravděpodobnost, že padne panna p_A . B hodí dvakrát mincí, u které je pravděpodobnost panny p_B . A vyhraje, pokud mu padne větší počet pannen. Jinak vyhrává B .

- (a) Jaká je pravděpodobnost, že vyhraje A ?
 (b) Ukažte, že hra je spravedlivá, pokud jsou mince symetrické.

Řešení: (a) Vítězství hráče A nastane v každém z následujících tří případů. Buď hráči A padnou tři panny (pak na hráči B nezáleží), což má pravděpodobnost p_A^3 . Nebo A hodí dvakrát pannu a jednou orla, což má pravděpodobnost $3p_A^2(1 - p_A)$, a v tom případě nesmí mít B dvakrát pannu, $1 - p_B^2$. Pravděpodobnost tohoto případu je tak $3p_A^2(1 - p_A)(1 - p_B^2)$. Zbývá poslední možnost, že A hodí jen jednu pannu a dvakrát orla, $3p_A(1 - p_A)^2$, a B jenom dvakrát orla, $(1 - p_B)^2$, což má celkově pravděpodobnost $3p_A(1 - p_A)^2(1 - p_B)^2$. Sečtením všech tří případů dostaneme

$$P = p_A^3 + 3p_A^2(1 - p_A)(1 - p_B^2) + 3p_A(1 - p_A)^2(1 - p_B)^2.$$

- (b) Pro symetrické mince je $p_A = p_B = 1/2$ a výsledek případu (a) je $P = 1/2$.
22. Do n očíslovaných krabic náhodně rozmístíme n očíslovaných míčků.
- (a) Jaká je pravděpodobnost, že žádná krabice nebude prázdná?
 (b) Jaká je pravděpodobnost, že přesně jedna krabice bude prázdná?
 (c) Rozmístíme nyní $n + 1$ míčků. Jaká je pravděpodobnost, že přesně jedna krabice bude prázdná?
 (d) Rozmístíme nyní $n + 2$ míčků. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jedna krabice bude prázdná?

Řešení: (a) Počet všech možných rozmístění je n^n . Příznivá jsou ta rozmístění, kdy v každé krabici je jen jeden míček a těch je $n!$. Takže $P = n!/n^n$.

(b) Při tomto rozmístění musí být jedna krabice prázdná, jedna krabice obsahující dva míčky a zbylých $n - 2$ krabic má po jednom míčku. Počet těchto rozdělení získáme tak, že si zvolíme krabici, která bude prázdná (n možností), a která bude obsahovat dva míčky ($(n - 1)$ možností). Do této krabice vybereme z n míčků

dva, což lze $\binom{n}{2}$ způsoby a zbylých $(n-2)$ míčků rozdělíme po jednom do zbylých $(n-2)$ krabic $(n-2)!$ způsoby. Celkově

$$P = \frac{n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n} = \binom{n}{2} \frac{n!}{n^n}.$$

(c) Počet všech rozmístění je n^{n+1} . Příznivá rozložení jsou dvojího typu. Buď existuje krabice se třemi míčky a $(n-2)$ krabic má po jednom míčku nebo existují dvě krabice po dvou míčkách a $(n-3)$ krabic po jednom míčku. Rozložení prvního typu získáme, že si zvolíme krabici, která bude prázdná (n způsoby) a krabici se třemi míčky ($(n-1)$ způsoby). Do té vybereme tři míčky z $(n+1)$, což lze $\binom{n+1}{3}$ způsoby. Do zbylých $(n-2)$ krabic rozdělíme míčky po jednom a to $(n-2)!$ možnostmi. Celkově máme

$$n(n-1)\binom{n+1}{3}(n-2)! = \binom{n+1}{3}n!$$

rozdělení prvního typu. Pro druhý typ postupujeme podobně. Zvolíme krabici, která bude prázdná (n možností) a dvě krabice, které budou obsahovat po dvou míčkách ($\binom{n-1}{2}$ možností). Do první krabice, která má obsahovat dva míčky dáme dva míčky z $(n+1)$, což lze $\binom{n+1}{2}$ způsoby. Další dva míčky ze zbylých ($\binom{n-1}{2}$ možností) dáme do druhé připravené krabice. Nakonec nám zůstalo $(n-3)$ míčků, které rozdělíme do $(n-3)$ krabic $(n-3)!$ způsoby. Takže počet rozmístění druhého typu je

$$n\binom{n-1}{2}\binom{n+1}{2}\binom{n-1}{2}(n-3)! = \frac{n}{4}\binom{n-1}{2}(n+1)!$$

Pravděpodobnost, že přesně jedna krabice zůstane prázdná je tak

$$P = \frac{1}{n^{n+1}} \left(\binom{n+1}{3}n! + \frac{n}{4}\binom{n-1}{2}(n+1)! \right).$$

(d) Budeme uvažovat jev opačný, tj. že žádná krabice nezůstala prázdná. Počet všech rozmístění je zde n^{n+2} . Příznivá rozložení jsou dvojího typu. Buď existuje krabice se třemi míčky a $(n-1)$ krabic má po jednom míčku nebo existují dvě krabice po dvou míčkách a $(n-2)$ krabic po jednom míčku. Rozložení prvního typu získáme, že si zvolíme krabici, která bude obsahovat tři míčky (n způsoby). Do té vybereme tři míčky z $(n+2)$, což lze $\binom{n+2}{3}$ způsoby. Do zbylých $(n-1)$ krabic rozdělíme míčky po jednom a to $(n-1)!$ možnostmi. Celkově máme

$$n\binom{n+2}{3}(n-1)! = \binom{n+2}{3}n!$$

možností. Pro druhý typ postupujeme podobně. Zvolíme dvě krabice, které budou obsahovat po dvou míčkách ($\binom{n}{2}$ možností). Do první z nich dáme dva míčky z $(n+2)$, což lze $\binom{n+2}{2}$ způsoby. Další dva míčky ze zbylých ($\binom{n}{2}$ možností) dáme do druhé připravené krabice. Nakonec nám zůstalo $(n-2)$ míčků, které rozdělíme do $(n-2)$ krabic $(n-2)!$ způsoby. Takže počet rozmístění druhého typu je

$$\binom{n}{2}\binom{n+2}{2}\binom{n}{2}(n-2)! = \binom{n}{2} \frac{(n+2)!}{4}.$$

Celkově máme pro hledanou pravděpodobnost P

$$P = 1 - \frac{1}{n^{n+2}} \left(\binom{n+2}{3}n! + \binom{n}{2} \frac{(n+2)!}{4} \right).$$

23. Do N očíslovaných krabic se náhodně rozdělí n očíslovaných míčků. Jaká je pravděpodobnost, že v K -té krabici bude k míčků?

Řešení: Pokud si povšimneme, že se jedná o Bernoulliho schéma, kde pokus je umístění míčku do jedné z N krabic a úspěch je umístění míčku přesně do K -té krabice (pravděpodobnost úspěchu je tedy $1/N$), pak podle vzorce pro pravděpodobnost k úspěchů v sérii n pokusů máme

$$P = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{N}\right)^k \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k}.$$

Jiné řešení: Počet všech možných umístění n míčků do N krabic je N^n . Příznivé rozložení dostaneme, že vezmeme k míčků z celkového počtu n (což, lze $\binom{n}{k}$ způsoby) a dáme je do K -té krabice. Zbýlých $(n - k)$ míčků rozdělíme libovolně do zbylých $(N - 1)$ krabic a to $(N - 1)^{n-k}$ způsoby. Celkově

$$P = \frac{\binom{n}{k} (N - 1)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{N}\right)^k \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k}.$$

24. Ve městě žije $n + 1$ obyvatel. Jeden z občanů začne šířit fámu a to tak, že ji sdělí náhodně vybranému obyvateli. Ten ji opět sdělí dalšímu náhodně vybranému obyvateli (může to být i ten, od koho se ji dozvěděl). Tak se fáma šíří městem.

- (a) Jaká je pravděpodobnost, že fáma bude k krát předána, aniž by se vrátila k původci?
 (b) Jaká je pravděpodobnost, že fáma bude k krát předána, aniž by se vrátila k někomu, kdo ji už slyšel?

Jak se změní výsledek, když místo jednoho obyvatele si v každém kroku může osoba předávající fámu vybrat náhodně r posluchačů?

Řešení: (a) Počet všech způsobů, jak se fáma může šířit během k kroků je n^k , neboť v každém kroku může být sdělena jednomu z n obyvatel. Příznivé šíření fámy je takové, že z dalších kroků je vyloučen její původce: v 1. kroku ji předá jednomu z n obyvatel a v dalších $(k - 1)$ krocích je pouze $(n - 1)$ možností komu ji předat, neboť původce je nyní vyloučen. Počet příznivých šíření je $n(n - 1)^{k-1}$. Celkově

$$P = \frac{n(n - 1)^{k-1}}{n^k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}.$$

(b) Počet všech způsobů šíření je stejný jako v případě (a), tj. n^k . Příznivá šíření: v 1. kroku máme na výběr z n obyvatel. Ve 2. kroku už jen $(n - 1)$ obyvatel neboť kdo fámu již slyšel je vyloučen z další účasti na šíření, ... atd, a v posledním k -tém kroku je pouze $(n - k + 1)$ obyvatel, kteří fámu ještě neslyšeli. Výsledná pravděpodobnost je

$$P = \frac{n(n - 1) \cdots (n - k + 1)}{n^k} = \binom{n}{k} \frac{k!}{n^k}.$$

Pro r : (a) $\frac{\binom{n-1}{r}^{r+r^2+\dots+r^{k-1}}}{\binom{n}{r}^{r+r^2+\dots+r^{k-1}}}$, (b) $\frac{\prod_{j=1}^{k-1} \prod_{i=1}^{r^j} \binom{n-ir-r^2-\dots-r^j}{r}}{\binom{n}{r}^{r+r^2+\dots+r^{k-1}}}$.

25. Tři hráči A , B a C hrají karty způsobem, že vždy dva se účastní hry a třetí stojí mimo. Kdo ve hře prohraje, je nahrazen tím, který nehrál. Tento systém pokračuje tak dlouho, dokud jeden z hráčů nevyhraje dvakrát za sebou. Pak se stává celkovým vítězem. Všichni hráči jsou v kartách stejně dobří. Začínají hrát hráči A a B .

- (a) Jaké jsou pravděpodobnosti celkového vítězství pro A , B a C ?
 (b) Jaká je pravděpodobnost, že hra skončí nejpozději v k -tém kole?

Jak se změní řešení, předpokládáme-li, že A a B jsou stejně dobří, ale nad hráčem C oba vyhrávají s pravděpodobností p ?

Řešení: a) Průběh hry budeme značit posloupností výherců v jednotlivých kolech. Např. $ACBB$ označuje hru skládající se ze čtyř kol, v prvním vyhrál A , který pak hrál s hráčem C a vyhrál hráč C . Pak C hrál s B a vyhrál B a nakonec hrál B opět s A a vyhrál znovu B . Tím byla série her ukončena.

Jsou dva typy serií, kdy vyhraje hráč A :

- (a) $ACB ACB \cdots ACB AA$, kde se skupina ACB opakuje k krát, $k = 0, 1, \dots$;
 (b) $BCA BCA \cdots BCA A$, kde se skupina BCA opakuje k krát, $k = 1, 2, \dots$

Výsledná pravděpodobnost se spočte sečtením pravděpodobností všech uvedených případů.

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^k \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^k \frac{1}{2} = \frac{2}{7} + \frac{1}{14} = \frac{5}{14}.$$

Ze symetrie $P(A) = P(B) = 5/14$ a doplňková pravděpodobnost je $P(C) = 4/14$. Pro obecnější případ si stačí uvědomit, že pravděpodobnost skupiny ACB i BCA je rovna $\frac{1}{2}(1-p)p$. Pak

$$P(A) = P(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(1-p)p\right)^k \frac{1}{2}p + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(1-p)p\right)^k \frac{1}{2} = \frac{p}{2} \frac{3-p}{2-p+p^2}.$$

b) Nejkratší série jsou dvě AA a BB a tato série má pravděpodobnost $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. Pro tři kola máme dvě série ACC a BCC a pravděpodobnost $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$, pro čtyři opět dvě série $ACBB$ a $BCAA$ a příslušnou pravděpodobnost $\frac{1}{16} + \frac{1}{16}$, atd. Má-li série přesně $k \geq 2$ kol, má tedy pravděpodobnost 2^{-k+1} . Sečtením těchto pravděpodobností dostaneme odpověď

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} = 1 - \frac{1}{2^{k-1}}.$$

V obecném případě je jednodušší spočítat pravděpodobnost jevu opačného. Výsledek závisí na tvaru čísla k :

$$\begin{aligned} P &= 1 - 2\left(\frac{1}{2}(1-p)p\right)^i && \text{pro } k = 3i, \\ P &= 1 - \left(\frac{1}{2}(1-p)p\right)^i && \text{pro } k = 3i + 1, \\ P &= 1 - (p-1)\left(\frac{1}{2}(1-p)p\right)^i && \text{pro } k = 3i + 2. \end{aligned}$$

26. Mějme minci, u níž je pravděpodobnost panny rovna $p \in \langle 0, 1 \rangle$ a orla $1-p$. Házíme tak dlouho, dokud nepadne za sebou dvakrát totéž.

- (a) Jaká je pravděpodobnost, že série hodů skončí nejpozději v šestém hodu?
 (b) Jaká je pravděpodobnost, že série bude mít sudý počet hodů?

Řešení: (a) Uvažujme opačný jev, tj. série má minimálně 6 hodů. Aby tomu tak bylo nesmí za sebou padnout dvakrát totéž, takže máme jen dva možné případy: *OPOPOP* nebo *POPOPO*. Oba dva mají stejnou pravděpodobnost $p^3(1-p)^3$. Takže

$$P = 1 - 2p^3(1-p)^3.$$

(b) Má-li mít série sudý počet hodů, pak poslední dva hody jsou buď *PP* nebo *OO*. V předchozích hodech se pak musí střídat *P* a *O* a to tak, že jsou jen dvě možnosti jak série může vypadat: buď *POPO...POPP* nebo *OPOP...OPOO*. Je-li délka série $2n$, pak první z nich má pravděpodobnost $p^{n+1}(1-p)^{n-1}$ a druhá $p^{n-1}(1-p)^{n+1}$. Takže

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(p^{n+1}(1-p)^{n-1} + p^{n-1}(1-p)^{n+1} \right) \\ &= p^2 \sum_{n=1}^{\infty} (p(1-p))^{n-1} + (1-p)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (p(1-p))^{n-1} \\ &= \frac{p^2}{1-p(1-p)} + \frac{(1-p)^2}{1-p(1-p)} = \frac{p^2 + (1-p)^2}{1-p(1-p)}. \end{aligned}$$

27. V krabici jsou bílé a černé koule. Provedeme dvakrát náhodný výběr, přičemž po každém tahu kouli opět vrátíme do krabice. Označme

$$A = \{\text{obě tažené koule jsou téže barvy}\}.$$

a) Ukažte, že $P(A) \geq \frac{1}{2}$.

b) Spočítejte $P(A)$ v případě, že bychom tažené koule do krabice nevraceli. Platí i v tomto případě, že $P(A) \geq \frac{1}{2}$?

Řešení: (a) Označme si počet bílých koulí jako n a černých m . Pak

$$P(A) = \frac{m^2 + n^2}{(m+n)^2}.$$

Protože pro libovolná m, n platí $2mn \leq m^2 + n^2$, je $P(A) \geq \frac{1}{2}$. Pro případ (b) je pravděpodobnost

$$P(A) = \frac{m(m-1) + n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$$

a to je např. pro $m = n = 2$ rovno $1/3$.

28. Do k krabic rozmístíme náhodně n míčků.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že poslední krabice zůstala prázdná?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že nějaký míček se dostal do první nebo do poslední krabice?

Řešení: Každý míček má k možností, kam ho lze umístit. Proto počet všech možných rozmístění je k^n .

(a) Máme-li zakázánu poslední krabici, je počet možností, jak umístit míček $k-1$, a tedy

$$P = \frac{(k-1)^n}{k^n}.$$

(b) Podíváme se na opačný jev, tj. že první a poslední krabice zůstaly prázdné. V tom případě máme jen $k-2$ možností, kam umíšťovat míčky, a tak

$$P = 1 - \frac{(k-2)^n}{k^n}.$$

29. Ve skladovacím boxu je n monočlánků, mezi nimiž je zamícháno k vybitých monočlánků, $k < n$. Postupně je vybíráme z boxu bez navrácení a testujeme, je-li monočlánek vybitý či nikoli.

- (a) Jaká je pravděpodobnost, že poslední vytažený monočlánek bude nevybitý?
- (b) Jaká je pravděpodobnost, že poslední nevybitý monočlánek vytahneme jako třetí od konce?

Řešení: (a) Výsledek jedné série vytahování monočlánků si můžeme zapsat jako posloupnost n symbolů, např. $NVV \dots NVN$, kde V označuje vybitý monočlánek a N monočlánek nabitý. Počet symbolů V je k a počet symbolů N je $n - k$. Všech takových n -tic je $\binom{n}{k}$. Příznivý výběr je, když n -tice končí symbolem N . Takové uspořádání dostaneme, že na poslední místo v n -tici dáme N a ze zbylých $n - 1$ míst vybereme $\binom{n-1}{k}$ způsoby k -tice, které obsadíme symboly V . Takže

$$P = \frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{n-k}{n}.$$

(b) Příznivý výběr je v tomto případě n -tice zakončená $\dots NVV$. Do prvních $n - 3$ neobsazených míst můžeme umístit $\binom{n-3}{k-2}$ způsoby $k - 2$ symbolů V . Odtud máme

$$P = \frac{\binom{n-3}{k-2}}{\binom{n}{k}} = \frac{k(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)}.$$

Podmíněná pravděpodobnost

1. Hodíme dvěma kostkami, červenou a zelenou. Označíme A jev „na červené padla 3, 4 nebo 5“, B jev „na zelené padla 1 nebo 2“, C jev „součet bodů je 7“. Ukažte, že jevy A, B, C jsou nezávislé.
2. Hodíme tři kostky. Jaká je pravděpodobnost, že padla alespoň jedna šestka, víme-li, že padla navzájem různá čísla?

Řešení: Položíme $A = \{\text{alespoň jedna 6}\}$ a $B = \{\text{navzájem různá čísla}\}$. Pak $P(B) = 6 \cdot 5 \cdot 4 / 6^3$ a $P(A \cap B) = 3 \cdot 5 \cdot 4 / 6^3$, takže

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2}.$$

3. Předpokládáme, že narození chlapce nebo děvčete má stejnou pravděpodobnost. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se dvěma dětmi jsou oba chlapci, víme-li, že

- (a) alespoň jedno z dětí je chlapec.
- (b) první dítě je chlapec.

Řešení: (a) Položíme $A = \{\text{oba chlapci}\}$ a $B = \{\text{alespň jeden chlapec}\}$. Pak $P(B) = 1 - 1/4 = 3/4$ a $P(A \cap B) = P(A) = 1/4$. Takže $P(A|B) = 1/3$.

(b) Zde bude jev $B = \{\text{první dítě je chlapec}\}$. Pak $P(B) = 1/2$ a $P(A \cap B) = P(A) = 1/4$. Tím $P(A|B) = 1/2$.

4. Zásilka 24 produktů obsahuje 13 vadných. Je rozdělena do dvou stejných skupin.
 - (a) Jaká je pravděpodobnost, že jedna skupina obsahuje jen vadné produkty?

- (b) Produkty jsou rozděleny tak, že jedna skupina se skládá ze samých vadných výrobků. Náhodně zvolíme skupinu a produkt z ní. Je vadný. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolený produkt z druhé skupiny bude také vadný?

Řešení: (a) Počet všech rozdělení 24 produktů do dvou stejných skupin je $\binom{24}{12}$. Příznivá rozdělení dostaneme, že buď do první nebo do druhé skupiny vybíráme pouze z 13-ti vadných produktů, což je $2\binom{13}{12}$ způsobů. Takže

$$P = \frac{2\binom{13}{12}}{\binom{24}{12}}.$$

- (b) Budeme potřebovat následující jevy:

$$\begin{aligned} C &= \{\text{náhodně zvolená skupina obsahuje jen vadné produkty}\}, \\ B &= \{\text{produkt zvolený z náhodně vybrané skupiny je vadný}\}, \\ A &= \{\text{produkt zvolený z druhé skupiny je vadný}\}. \end{aligned}$$

V tomto označení máme zjistit $P(A|B)$. Pro výpočet $P(A \cap B)$ a $P(B)$ musíme použít vzorec pro úplnou pravděpodobnost.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|C)P(C) + P(B|\bar{C})P(\bar{C}) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{24}, \\ P(A \cap B) &= P(A \cap B|C)P(C) + P(A \cap B|\bar{C})P(\bar{C}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Odtud

$$P(A|B) = \frac{2}{13}.$$

5. V krabici je jeden míček barvy bílé nebo černé. Přidáme k němu jeden bílý míček a pak z krabice náhodně jeden míček vytahneme. Je bílý. Jaká je pravděpodobnost, že na počátku byl míček v krabici také bílý?

Řešení: Položíme $A = \{\text{původní míček je bílý}\}$ a $B = \{\text{tažený míček je bílý}\}$. Chceme vypočítat $P(A|B)$. Víme, že $P(B|A) = 1$, $P(B|\bar{A}) = 1/2$ a $P(A) = 1/2$. Podle Bayesova vzorce dostaneme

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{2}{3}.$$

6. Házíme kostkou tak dlouho dokud nepadne šestka.

- (a) Nepadla-li šestka při prvním hodu, jaká je pravděpodobnost, že nepadne ani při dalších dvou?
(b) Víme-li, že počet potřebných hodů byl sudý, jaká je pravděpodobnost, že byl roven dvěma?

Řešení: (a) Protože hody jsou nezávislé (a tedy výsledek prvního hodu nemá vliv na další hody) je pravděpodobnost rovna

$$P = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}.$$

- (b) Položíme $A = \{\text{počet hodů je 2}\}$ a $B = \{\text{počet hodů je sudý}\}$. Chceme vypočítat $P(A|B)$.

$$P(A \cap B) = P(A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}.$$

Zbývá zjistit $P(B)$. Musíme sečíst pravděpodobnosti, že šestka padla poprvé ve druhém hoďu, ve čtvrtém hoďu, v šestém hoďu, ... atd. Tedy

$$P(B) = \frac{5}{6} \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^5 \frac{1}{6} + \dots = \frac{5}{11}.$$

Odtud dostaneme výsledek $P(A|B) = 11/36$.

7. V koši je n bílých a m černých míčků. Náhodně vytahneme jeden. Vratíme ho zpět a přidáme do koše k míčků téže barvy, jakou měl tažený míček. Tento postup opakujeme. Jaká je pravděpodobnost, že při j -tém tahu vytahneme bílý míček?

Řešení: Vyřešíme případ pro $j = 2$. Označíme si

$$A = \{\text{tažený míček v 1. tahu je bílý}\}$$

$$B = \{\text{tažený míček ve 2. tahu je bílý}\}.$$

Chceme vypočítat $P(B)$. Za zadání známe následující pravděpodobnosti:

$$P(B|A) = (n+k)/(m+n+k), \quad P(A) = n/(m+n),$$

$$P(B|\bar{A}) = n/(m+n+k), \quad P(\bar{A}) = m/(m+n).$$

Podle vzorce o úplné pravděpodobnosti dostaneme

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$$

$$= \frac{n+k}{m+n+k} \frac{n}{m+n} + \frac{n}{m+n+k} \frac{m}{m+n} = \frac{n}{m+n}.$$

Protože po provedení tahu jsou pravděpodobnosti vytažení bílého či černého míčku stejné jako na počátku, výsledek se opakováním taků nemění a odpověď je, že při j -tém tahu je pravděpodobnost vytažení bílého míčku $n/(m+n)$.

8. Stroj má 2 komponenty A a B , které fungují nezávisle na sobě. Stroj pracuje, jsou-li obě komponenty funkční. Víme, že A má spolehlivost 98% a stroj má spolehlivost 95%. Jakou spolehlivost má komponenta B ?

Řešení: Je-li A , resp. B označují jevy, že komponenty A , resp. B jsou funkční, pak máme, že $P(A) = 0.98$ a $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.95$. Odtud $P(B) = 0.97$.

9. Máme n bílých a n černých míčků. Jak je máme rozdělit do dvou krabic, aby při náhodné volbě krabice a vytažení náhodného míčku z této krabice byla pravděpodobnost, že míček je bílý maximální?

Řešení: [1 bílý, 0 černých], [($n-1$) bílých, n černých].

10. Házíme n krát mincí, kde pravděpodobnost panny je p .

- (a) Jaká je pravděpodobnost, že ve čtvrtém hoďu padla panna, víme-li, že v celé sérii padlo k panen?
- (b) Označíme jevy $A = \{\text{v prvním hoďu padla panna}\}$ a $B_k = \{\text{v sérii padlo } k \text{ panen}\}$. Pro jaké hodnoty k jsou jevy A a B_k nezávislé?

Řešení: a) k/n , b) $k = pn$.

11. Házíme nesymetrickou mincí s pravděpodobností panny rovnou p tak dlouho, dokud nám nepadne panna.

- (a) Nepadla-li panna v prvních dvou hoďech, jaká je pravděpodobnost, že nepadne ani v následujících třech hoďech?

- (b) Víme-li, že potřebný počet hodů byl lichý, jaká je pravděpodobnost, že byl roven třem?

Řešení: a) $(1 - p)^3$, b) $(1 - p)^2 p(2 - p)$

12. V souboru n mincí je jedna mající na obou stranách pannu. Ostatní mince jsou správné. Náhodně zvolíme minci a šestkrát s ní hodíme. Pokaždé padla panna. Jaká je pravděpodobnost, že tato mince má znak panny na obou stranách?

Řešení: $2^6 / (2^6 + n - 1)$.

13. V každé ze dvou krabic se nacházejí dvě mince. V první krabici jsou to mince u nichž je pravděpodobnost, že padne panna rovna p_1 a ve druhé krabici mince, kde pravděpodobnost panny je p_2 , $p_1 \neq p_2$. Máme na výběr dva postupy:

- (a) Náhodně zvolíme krabici a hodíme oběma mincemi, které se v ní nachází.
(b) Z každé krabice náhodně vybereme po jedné minci a hodíme s nimi.

Výhra nám přináleží, padne-li na obou mincích panna. Který postup je výhodnější?

Řešení: a) $(p_1^2 + p_2^2)/2$, b) $p_1 p_2$. Postup a) je výhodnější.

14. Vzácná mince spadla do jednoho z n kontejnerů se šrotem. Pravděpodobnost, že zapadla do i -tého kontejneru je p_i , $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Je-li mince v i -tém kontejneru a hledáme-li ji tam, pak ji nalezneme s pravděpodobností q_i . Jaká je pravděpodobnost, že mince je v i -tém kontejneru, když jsme ji nenašli v j -tém kontejneru?

Řešení: $p_i / (1 - p_j q_j)$ pro $i \neq j$ a $(1 - q_i) p_i / (1 - p_i q_i)$ pro $i = j$.

15. Osoby A , B a C lžou s pravděpodobností p a mluví pravdu s pravděpodobností $1 - p$ a to nezávisle na sobě. Osoba C pronesla jistý výrok. Jaká je pravděpodobnost, že nebyl pravdivý, víme-li, že osoba A prohlásila: „ B mi sdělil, že C lhal.“

Řešení: $(p^2 + (1 - p)^2) / (3p^2 + (1 - p)^2)$.

16. Máme tři krabice K_1 , K_2 a K_3 . Složení krabice K_i je n_i bílých míček a m_i černých míček, $i = 1, 2, 3$.

- (a) Z náhodně zvolené krabice vytáhneme dva míčky. Jsou bílý a černý. Jaká je pravděpodobnost, že byly taženy z krabice K_i , $i = 1, 2, 3$?
(b) Z krabice K_1 přendáme náhodně jeden míček do K_2 a pak opět jeden míček zpět do K_1 . Jaká je pravděpodobnost, že složení K_1 a K_2 zůstali stejné?
(c) Z krabice K_1 přendáme náhodně jeden míček do K_2 , z K_2 jeden míček do K_3 a pak z K_3 jeden míček zpět do K_1 . Jaká je pravděpodobnost, že složení všech krabic zůstane stejné?

Řešení: (a) $\frac{n_i m_i}{\binom{n_i + m_i}{2}} / \sum_{j=1}^3 \frac{n_j m_j}{\binom{n_j + m_j}{2}}$, (b) $\frac{n_1(n_2 + 1) + m_1(m_2 + 1)}{(n_1 + m_1)(n_2 + m_2 + 1)}$,

(c) $\frac{n_1(n_2 + 1)(n_3 + 1) + m_1(m_2 + 1)(m_3 + 1)}{(n_1 + m_1)(n_2 + m_2 + 1)(n_3 + m_3 + 1)}$.

17. Krabice obsahuje lístečky očíslované $1, \dots, n$. Náhodně vytáhneme jeden. Má-li číslo 1, necháme si ho. Jinak ho vrátíme do krabice. Vytáhneme další lístek. Jaká je pravděpodobnost, že má číslo 2?

Řešení: $\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{n-1}{n} \right)$.

18. Máme 16 zlatých mincí, z nichž 7 je pouze na povrchu pozlacených, zbylé jsou pravé. Mince rozdělíme do dvou stejně velkých skupin.

- (a) Jaká je pravděpodobnost, že jedna ze skupin bude obsahovat pouze pravé mince?
- (b) Předpokládejme, že mince jsou rozděleny tak, že jedna ze skupin obsahuje pouze pravé mince. Z náhodně zvolené skupiny vybereme minci. Je pravá. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná mince z druhé skupiny je rovněž pravá?

Řešení: a) $2\binom{9}{8}/\binom{16}{8} = 0.0014$, b) $2/9$

Distribuční funkce

1. V intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ zvolíme náhodně bod A . Označíme-li X vzdálenost bodu A od bližšího konce intervalu, určete distribuční funkci F_X a hustotu f_X náhodné veličiny X .

Řešení:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ 2t & t \in \langle 0, 1/2 \rangle; \\ 1 & t > 1/2. \end{cases} \quad f_X(t) = \begin{cases} 0 & t \notin \langle 0, 1/2 \rangle; \\ 2 & t \in \langle 0, 1/2 \rangle. \end{cases}$$

2. Hráči A a B hází šipky na kruhový terč s poloměrem r . Náhodné veličiny L_A a L_B budou označovat vzdálenost šipky hozené hráčem A a B od středu terče. Známe jejich distribuční funkce

$$F_{L_A}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ \sqrt{t/r} & t \in \langle 0, r \rangle; \\ 1 & t > r. \end{cases} \quad F_{L_B}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ t^2/r^2 & t \in \langle 0, r \rangle; \\ 1 & t > r. \end{cases}$$

Který z hráčů je lepší?

Řešení: Lepší je ten z hráčů, který má větší pravděpodobnost umístění šipky blíže středu terče. Porovnáním hustot (tj. derivací funkcí F_{L_A} a F_{L_B}) zjistíme, že lepší je A .

3. Ve čtverci $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ zvolíme náhodně bod A . Označíme T trojúhelník s vrcholy $[0, 0]$, $[1, 0]$ a A . Bude-li X znamenat obsah trojúhelníka T , určete distribuční funkci F_X a hustotu f_X náhodné veličiny X .

Řešení:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ 2t & t \in \langle 0, 1/2 \rangle; \\ 1 & t > 1/2. \end{cases} \quad f_X(t) = \begin{cases} 0 & t \notin \langle 0, 1/2 \rangle; \\ 2 & t \in \langle 0, 1/2 \rangle. \end{cases}$$

4. Cestující přišel na zastávku autobusu právě, když autobus odjel. Je rozhodnut čekat 5 minut a pak odchází. Interval mezi příjezdy autobusů jsou náhodné v rozmezí 4 – 6 minut. Je-li X doba, po kterou cestující čeká na zastávce, nalezněte distribuční funkci F_X a hustotu f_X .

Řešení: Náhodná veličina X nabývá hodnot v intervalu $\langle 4, 5 \rangle$. Je-li $t \in \langle 4, 5 \rangle$, pak pravděpodobnost jevu ($X \leq t$) je stejná jako pravděpodobnost, že autobus přijede v časovém intervalu $\langle 4, t \rangle$ od doby odjezdu předchozího spoje. Tato pravděpodobnost je rovna $(t - 4)/2$. Takže

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 4; \\ (t - 4)/2 & t \in \langle 4, 5 \rangle; \\ 1 & t > 5. \end{cases}$$

5. Na trh je dán nový model přístroje. Průzkum ukázal, že přístroj by mohl být velmi úspěšný s pravděpodobností 0.6, středně úspěšný s pravděpodobností 0.3 a neúspěšný s pravděpodobností 0.1. Roční zisk spojený s případem „velmi úspěšný“ je 15 miliónů, v případě „úspěšný“ je 5 miliónů a v případě „neúspěšný“ je ztráta 0.5 miliónů. Je-li X roční zisk, nalezněte distribuční funkci F_X .

Řešení: X nabývá hodnot -0.5 , 5 a 15 miliónů. Odtud dostaneme

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < -0.5; \\ 0.1 & t \in \langle -0.5, 5 \rangle; \\ 0.4 & t \in \langle 5, 15 \rangle; \\ 1 & t \geq 15. \end{cases}$$

6. (Obtížné) Ve čtverci $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ zvolíme náhodně bod A . Označíme-li X vzdálenost bodu A od nejbližšího vrcholu čtverce, určete distribuční funkci F_X a hustotu f_X náhodné veličiny X .

Řešení:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ \pi t^2 & t \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle; \\ \pi t^2 + 2\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}} - 4t^2 \arcsin \frac{\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}}{t} & t \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}); \\ 1 & t > \frac{1}{2}\sqrt{2}. \end{cases}$$

$$f_X(t) = \begin{cases} 2\pi t & t \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle; \\ 2\pi t - 8t \arcsin \frac{\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}}{t} & t \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}); \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Střední hodnota

1. Ruleta má 37 polí očíslovaných $0, 1, 2, \dots, 36$. Lze vsadit buď nějaké na číslo mezi 1 a 36 a v tom případě se vyhrává 36 násobek vsazené částky. Nebo lze vsadit na barvu červenou či černou (sudá políčka jsou červená a lichá jsou černá, nula je zelená, na ní se nesází) a v tom případě se vyhrává dvojnásobek vsazené částky. Jaká je v obou případech průměrná výhra?

Řešení: Náhodná veličina X bude mít význam zisku.

- (a) Sázka na barvu: X má hodnoty při vsazené jednotkové částce 1 (výhra) nebo -1 (prohra). Tím $EX = 1 \cdot \frac{18}{37} - 1 \cdot \frac{19}{37} = -\frac{1}{37}$.
- (b) Sázka na číslo: X má hodnoty 35 (výhra) nebo -1 (prohra). $EX = 35 \cdot \frac{1}{37} - 1 \cdot \frac{36}{37} = -\frac{1}{37}$.

2. Pro n náhodně zvolených lidí určete průměrný počet dnů v roce, v nichž má právě k z nich narozeniny. Jaký je průměrný počet dnů, v nichž mají alespoň dva lidé narozeniny?

Řešení: X značí počet dnů v roce, kdy má přesně k lidí narozeniny. Napíšeme si X ve tvaru $X = X_1 + \dots + X_{365}$, kde náhodné veličiny X_i nabývají hodnoty 1, má-li v i -tý den právě k lidí narozeniny nebo 0, když tomu tak není. Pak $EX = EX_1 + \dots + EX_{365}$. Pravděpodobnost, že v pevně zvolený i -tý den má právě k lidí narozeniny je

$$P_i = \binom{n}{k} \frac{364^{n-k}}{365^n}.$$

Odtud dostaneme $EX_i = 1 \cdot P_i$ a celkově

$$EX = 365 \cdot \binom{n}{k} \frac{364^{n-k}}{365^n} = \binom{n}{k} \frac{364^{n-k}}{365^{n-1}}.$$

Druhou otázku zodpovíme tím, že od celkového počtu dní v roce odečteme průměrný počet dní, kdy nemá žádný z n lidí narozeniny a počet dní, kdy má právě jeden člověk narozeniny. Tyto dva údaje získáme z výše vypočteného vzorce pro

$$k = 0 \text{ a } k = 1, \text{ což dává } 365 - \frac{364^n}{365^{n-1}} - n \frac{364^{n-1}}{365^{n-1}}.$$

3. Jistá královská dynastie má následující pravidlo týkající se počtu dětí: Královský pár má mít děti dokud se nenarodí syn nebo dokud nejsou maximálně tři. Jaký je průměrný počet dětí v takové královské rodině, když pravděpodobnost narození dcery nebo syna je stejná?

Řešení: Položíme X náhodnou veličinu označující počet dětí v královské rodině. Její možné hodnoty jsou $X = 0, 1, 2, 3$. Dále, $P(X = 1) = 1/2$. Jev $X = 2$ znamená, že první se narodila dcera a pak syn, což dává $P(X = 2) = 1/4$. Zbývá jev $X = 3$, který znamená buď tři dcery nebo dvě dcery a nejmladší dítě je syn. Oba mají pravděpodobnost $1/8$, takže $P(X = 3) = 1/4$. Tím

$$EX = 0P(X = 0) + 1P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 1.75.$$

4. Hodíme dvakrát kostkou. Jaká je průměrná hodnota maximálního z obou výsledků?

Řešení: $161/36$

5. Házíme nesymetrickou mincí, kde pravděpodobnost panny je p a orla $1 - p$. Jaká je průměrná délka série hodů, při které nám padá stále jedna strana?

Řešení: $p/(1 - p) + (1 - p)/p$

6. V kapse máme n různých klíčů, z nichž pouze jeden je správný klíč ke dveřím, které chceme odemknout. Klíče náhodně taháme z kapsy a zkoušíme. Jaký je průměrný počet pokusů než se nám podaří dveře odemknout, když

(a) použité klíče nevracíme zpět do kapsy,

(b) použité klíče vracíme zpět do kapsy?

Řešení: $(n + 1)/2, n$

7. V krabici je n bílých a m černých koulí. Náhodně vytáhneme k z nich ven bez navrácení. Jaký je průměrný počet bílých koulí ve vzorku?

Řešení: $kn/(m + n)$

8. Z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ vybereme náhodně a nezávisle na sobě dvě čísla X_1 a X_2 .

(a) Jaká je průměrná hodnota většího z čísel X_1 a X_2 ?

(b) Jaká je průměrná hodnota vzdálenosti čísel X_1 a X_2 ?

(c) Jaká je průměrná hodnota druhé mocniny vzdálenosti bodu $(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$ od počátku?

(d) * Jaká je průměrná hodnota vzdálenosti bodu $(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$ od počátku? (Použijte polární souřadnice.)

Řešení: $2/3, 1/3, 2/3, \frac{1}{3}(\sqrt{2} + \ln \tan(3\pi/8))$.

9. Společnost přepravuje nákladními auty zboží mezi městy A a B vzdálenými 100 km. Vozy mají stejnou pravděpodobnost poruchy v jakémkoli místě trasy mezi A a B . Do jakého místa mezi A a B má firma umístit servisní stanici, aby průměrná vzdálenost od stanice do místa poruchy byla minimální? Jaká bude odpověď v případě, když hustota pravděpodobnosti místa poruchy je $f(x) = 2x/10000$, $x \in \langle 0, 100 \rangle$?

Řešení: uprostřed, $100/\sqrt{2}$ od A

10. Stojíme na břehu přímé řeky. Náhodně zvolíme směr od řeky a jdeme tímto směrem 1 km do bodu Q .

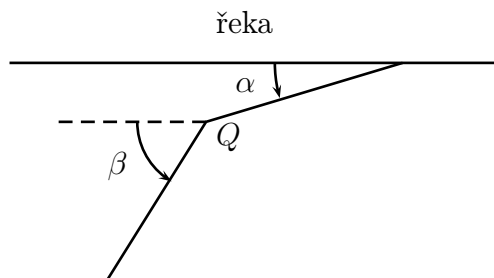
(a) Jaká je naše průměrná vzdálenost od řeky?

(b) Z bodu Q se dále vydáme náhodně jakýmkoli směrem a opět jdeme 1 km. Jaká je pravděpodobnost, že dosáhneme řeky dříve než ujdeme 1 km?

Řešení: (a) Vyjdeme-li od řeky pod náhodným úhlem $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$, pak vzdálenost po 1 km je $d = 1 \cdot \sin \alpha$. Tím

$$Ed = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \alpha \, d\alpha = \frac{2}{\pi}.$$

(b) Poloha v tomto případě je určena dvěma náhodnými úhly α a β , viz obrázek.



Úhel $\beta \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a ze symetrie se můžeme pro úhel α omezit na $\alpha \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$. Náhodný výběr dvojice úhlů $(\alpha, \beta) \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$ odpovídá jednomu pokusu. Máme-li zadaný úhel α , pak příznivé volby pro β , kdy dosáhneme břehu řeky dříve než ujdeme 1 km, jsou $\beta \in \langle \pi + \alpha, 2\pi - \alpha \rangle$. Tato množina zabírá v obdélníku $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$ jednu čtvrtinu, takže výsledek je $1/4$.

11. Životnost páru armádních bot má normální rozdělení se střední hodnotou 12 měsíců a směrodatnou odchylkou $\sigma = 2$. Je vydáno 10 000 párů. Kolik párů bude v průměru zapotřebí vyměnit po uplynutí 15 měsíců?

Řešení: 9331

12. Průměrná váha bedny je $\mu = 50$ kg a řídí se normálním rozdělením se směrodatnou odchylkou $\sigma = 5$. Kolik beden je možné naložit na nákladní auto s nosností 1 tuna, abychom s pravděpodobností 99% nepřesáhli dovolenou nosnost?

Řešení: $n = 18.98$ tj. maximálně 18.

13. Uvažujme v rovině trojúhelník T , jehož vrcholy jsou tvořeny body $(0, 1)$, $(0, 0)$ a $(1, 0)$. V trojúhelníku zvolíme náhodně bod (X, Y) , přičemž všechny volby jsou stejně pravděpodobné. Jaká je průměrná hodnota X -ové souřadnice bodu (X, Y) ?

Řešení: $1/3$

14. Životnost kryptonového zářiče má normální rozdělení se střední hodnotou $\mu = 160$ hodin. Požadavky zákazníka jsou: životnost mezi 120 – 200 hodin s pravděpodobností 95%.

- (a) Jaká musí být směrodatná odchylka, aby se požadavku zákazníka vyhovělo?
- (b) Je-li směrodatná odchylka rovna hodnotě zjištěné v předchozí otázce, jaká je pravděpodobnost, že průměr životností dvou na sobě nezávislých zářičů bude v limitu 120 – 200 hodin?

Řešení: $\sigma \leq 20.4, 0.994$

15. Obsah smogových částic v ovzduší v dané lokalitě je pravidelně monitorován. Přípustný limit je 7.7. Předpokládejme, že skutečný obsah smogových částic se řídí normálním rozdělením se střední hodnotou $\mu = 7.6$ a směrodatnou odchylkou $\sigma = 0.04$. Měřicí přístroj je zatížen nepřesností, která má normální rozdělení s $\mu = 0$ a $\sigma = 0.03$.

- (a) Jaká je pravděpodobnost, že výsledek měření nepřesáhne 7.7?
- (b) Jaká je pravděpodobnost, že průměr tří po sobě jdoucích nezávislých měření nepřesáhne 7.7?

Řešení: 0.97, 0.9997

16. V jednotkovém čtverci zvolíme náhodně bod (X, Y) , přičemž všechny volby jsou stejně pravděpodobné. Jaká je průměrná vzdálenost bodu (X, Y) od diagonály čtverce?

Řešení: $\sqrt{2}/6$

Centrální limitní věta

1. Hodíme 420 krát hrací kostkou a výsledky hodů sčítáme. Pomocí centrální limitní věty odhadněte pravděpodobnost, že součet bude ležet mezi čísly 1400 a 1550.

Řešení: Součet si označíme $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, kde $E(X_i) = 3.5$ a $D(X_i) = 2.916$. Pak $P(1400 \leq S_n \leq 1550) = 0.965$.

2. Bod konající náhodnou procházku po ose x začíná v bodě 0 a pohybuje se tak, že se po každé vteřině posune o jedničku doprava s pravděpodobností 1/2 nebo o jedničku doleva rovněž s pravděpodobností 1/2. Pomocí centrální limitní věty odhadněte pravděpodobnost, že bod bude po 100 krocích vzdálen od počátku nejvýše o 10.

Řešení: 0.682

3. Házíme n -krát hrací kostkou. Pomocí centrální limitní věty zjistěte, kolik je minimálně třeba provést hodů, máme-li s pravděpodobností 98% tvrdit, že počet dvojek padlých v n hodech leží v intervalu

$$\left\langle \frac{n}{12}, \frac{n}{4} \right\rangle ?$$

Řešení: Položíme $X_i = 1$ padla-li v i -tém hodu dvojka a $X_i = 0$ jinak. Pak $E(X_i) = 1/6$ a $D(X_i) = 5/(36)$ a počet dvojek v n hodech je $X_1 + \dots + X_n$. Standardizovaný součet S_n^* splňuje $|S_n^*| \leq \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{5}}$, a tím dostaneme $n \geq 109$.

4. Cena jedné akcie Pivovaru je v n -tý den roku rovna Y_n . Akcionář Albert zjistil, že rozdíly $X_n = Y_{n+1} - Y_n$ se chovají jako nezávislé náhodné veličiny se střední hodnotou $\mu = 0$ a rozptylem $\sigma^2 = 1/4$. Má-li akcie v 1. den roku hodnotu $Y_1 = 100$, určete pomocí centrální limitní věty pravděpodobnost, že $Y_{365} \geq 110$. (Návod: vyjádřete $Y_{365} - Y_1$ pomocí X_n .)

Řešení: 0.15

5. Měření vzdálenosti Jupitera a jeho měsíce Kalista je díky neovlivnitelným chybovým faktorům náhodná veličina, jejíž střední hodnota je skutečná vzdálenost a rozptyl $\sigma^2 = 16$. Kolik měření musíme provést, abychom s pravděpodobností 96% mohli tvrdit, že aritmetický průměr naměřených hodnot se od skutečné vzdálenosti liší nejvýše o 1.5 jednotek.

Řešení: $n \geq 30$

6. Házíme n -krát symetrickou mincí. Pomocí centrální limitní věty zjistěte, kolik je minimálně třeba provést hodů, máme-li s pravděpodobností 99% tvrdit, že počet S_n pannen padlých v n hodech je alespoň $4/5$ počtu orlů.

Řešení: $n \geq 440$