Separovatelné diferenciální rovnice

1. Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$x' = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{t}, \qquad x(1) = 0\,.$$

2. Řešte diferenciální rovnici $x' = x^{-2}$ s počáteční podmínkou:

   a) $x(1) = 1$; b) $x(-2) = 1$; c) $x(-2) = -2$.

3. Řešte diferenciální rovnici $x' = -t/x$ s počáteční podmínkou:

   a) $x(1) = 1$; b) $x(4) = -3$.

4. Řešte diferenciální rovnici $x' = -x^2$ s počáteční podmínkou:

   a) $x(-1) = 0$; b) $x(1) = 3$; c) $x(-2) = -1$.

5. Řešte diferenciální rovnici $x' = (x^2 - x)/t$ s počáteční podmínkou:

   a) $x(1) = 2$; b) $x(-2) = 1$; c) $x(1) = \frac{3}{4}$; d) $x(3) = 0$; e) $x(1) = -1$.

6. Řešte diferenciální rovnici $x' = (1 - x^2)/(2tx)$ s počáteční podmínkou:

   a) $x(1) = \frac{1}{2}$; b) $x(-2) = 1$; c) $x(2) = 2$; d) $x(3) = -2$; e) $x(-3) = -\frac{2}{3}$.

7. Řešte diferenciální rovnici $x' = 2\sqrt{x}$ s počáteční podmínkou:

   a) $x(0) = 1$; b) $x(0) = 0$.

Výsledky

1. $x(t) = \ln(1 + \ln t)$, $t \in \left(\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty\right)$; obecné řešení je $x(t) = \ln \ln ct$ pro $c \neq 0$ na intervalu $\left(-\infty, \frac{1}{c}\right)$ pro $c < 0$, $\left(\frac{1}{c}, +\infty\right)$ pro $c > 0$.

2. Obecné řešení $x(t) = \sqrt[3]{3(t-c)}$ na intervalech $(-\infty, c)$ a $(c, +\infty)$; a) $x(t) = \sqrt[3]{3t-2}$, $t \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$; b) $x(t) = \sqrt[3]{3t+7}$, $t \in \left(-\frac{7}{3}, +\infty\right)$; c) $x(t) = \sqrt[3]{3t-2}$, $t \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$.

3. Obecné řešení $x(t) = \sqrt{c^2 - t^2}$, $x(t) = -\sqrt{c^2 - t^2}$, $t \in (-c, c)$ pro $c > 0$; a) $x(t) = \sqrt{2 - t^2}$, $t \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$; b) $x(t) = -\sqrt{25 - t^2}$, $t \in (-5, 5)$.

4. Stacionární řešení $x(t) = 0$ na intervalu $\mathbb{R}$, nestacionární řešení $x(t) = \frac{1}{t-c}$ na intervalech $(-\infty, c)$ a $(c, +\infty)$; a) $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$; b) $x(t) = \frac{3}{3t-2}$, $t \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$; c) $x(t) = \frac{1}{t+1}$, $t \in (-\infty, -1)$.

5. Stacionární řešení $x(t) = 0$, $x(t) = 1$ na intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$; nestacionární řešení $x(t) = \frac{1}{1-ct}$ pro $c \neq 0$ na maximálních intervalech neobsahujících $0, \frac{1}{c}$; a) $x(t) = \frac{2}{2-t}$, $t \in (0, 2)$; b) $x(t) = 1$, $t \in (-\infty, 0)$; c) $x(t) = \frac{3}{3+t}$, $t \in (0, +\infty)$; d) $x(t) = 0$, $t \in (0, +\infty)$; e) $x(t) = \frac{1}{1-2t}$, $t \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

6. Stacionární řešení $x(t) = 1$, $x(t) = -1$ na intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$; nestacionární řešení $x(t) = \sqrt{1 - c/t}$ a $x(t) = -\sqrt{1 - c/t}$ na maximálních intervalech disjunktních s intervalem obsahujícím $0, c$; a) $x(t) = \sqrt{1 - 3/(4t)}$, $t \in \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$; b) $x(t) = 1$, $t \in (-\infty, 0)$; c) $x(t) = \sqrt{1 + 6/t}$, $t \in (0, +\infty)$; d) $x(t) = -\sqrt{1 + 9/t}$, $t \in (0, +\infty)$; e) $x(t) = -\sqrt{1 + 5/(3t)}$, $t \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$.

7. Stacionární řešení $x(t) = 0$ na intervalu $\mathbb{R}$, nestacionární řešení $x(t) = (t-c)^2$ na intervalech $(c, +\infty)$, dají se prodloužit stacionárním řešením na $\mathbb{R}$;

$$\text{a) } x(t) = \begin{cases} 0\,, & t \in (-\infty, -1\rangle\,, \\ (t+1)^2\,, & t \in \langle -1, +\infty)\,; \end{cases}$$

$$\text{b) } x(t) = 0\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \qquad \text{nebo} \qquad x(t) = \begin{cases} 0\,, & t \in (-\infty, c\rangle\,, \\ (t-c)^2\,, & t \in \langle c, +\infty)\,, \end{cases} \quad (c \geq 0)\,.$$

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

1. Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou:

   a) $x' = \dfrac{2tx}{t^2-1}\,, \quad x(3) = 4\,;$

   b) $x' = \dfrac{x+2}{t}\,, \quad x(2) = 4\,;$

   c) $x' = \dfrac{2x+4}{t}\,, \quad x(1) = 3\,;$

   d) $x' = -\dfrac{x}{t+1}\,, \quad x(1) = 2\,;$

   e) $x' = -\dfrac{3x+3}{t}\,, \quad x(1) = 0\,;$

   f) $x' = (x-1)\cos t\,, \quad x(\pi) = 0\,;$

   g) $x' = -2t\,(x+1)\,, \quad x(0) = 2\,;$

   h) $x' = (x-1)\operatorname{cotg} t\,, \quad x\big(\frac{\pi}{2}\big) = 3\,;$

   i) $x' = -\dfrac{tx}{t+1}\,, \quad x(0) = 2\,;$

   j) $x' = \dfrac{tx}{t+1}\,, \quad x(0) = 1\,.$

2. Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou:

   a) $x' = \dfrac{1}{t}\,x + \dfrac{1}{t^3}\,, \quad x(1) = 1\,;$

   b) $x' = -\dfrac{1}{t}\,x + \dfrac{1}{t^2}\,, \quad x(1) = 2\,;$

   c) $x' = \dfrac{2}{t}\,x + t^2\sin t\,, \quad x(\pi) = 0\,;$

   d) $x' = -\dfrac{2}{t}\,x + 4t\,, \quad x(2) = 5\,;$

   e) $x' = \dfrac{3}{t}\,x - t^3\,\mathrm{e}^t\,, \quad x(1) = 0\,;$

   f) $x' = -\dfrac{3}{t}\,x + \dfrac{2}{t^2}\,, \quad x(1) = 3\,;$

   g) $x' = 2t\,x - \mathrm{e}^{t^2}\,, \quad x(0) = 2\,;$

   h) $x' = -x\operatorname{tg} t + \cos t\,, \quad x(0) = 1\,;$

   i) $x' = \dfrac{1}{t+1}\,x + 1\,, \quad x(0) = -1\,;$

   j) $x' = \dfrac{-2t}{t^2+1}\,x + \dfrac{1}{t^2+1}\,, \quad x(1) = 0\,.$

Výsledky

1. Jedná se o lineární diferenciální rovnice, všechny lze řešit separací.

   a) $x(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$, $t \in (1, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = c(t^2 - 1)$);

   b) $x(t) = 3t - 2$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct - 2$);

   c) $x(t) = 5t^2 - 2$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct^2 - 2$);

   d) $x(t) = \frac{4}{t+1}$, $t \in (-1, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = \frac{c}{t+1}$);

   e) $x(t) = t^{-3} - 1$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct^{-3} - 1$);

   f) $x(t) = 1 - \mathrm{e}^{\sin t}$, $t \in \mathbb{R}$ (obecné řešení $x(t) = c\,\mathrm{e}^{\sin t} + 1$);

   g) $x(t) = 3\,\mathrm{e}^{-t^2} - 1$, $t \in \mathbb{R}$ (obecné řešení $x(t) = c\,\mathrm{e}^{-t^2} - 1$);

   h) $x(t) = 2\sin t + 1$, $t \in (0, \pi)$ (obecné řešení $x(t) = c\sin t + 1$);

   i) $x(t) = 2(t+1)\,\mathrm{e}^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$ (obecné řešení $x(t) = c(t+1)\,\mathrm{e}^{-t}$);

   j) $x(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{t+1}$, $t \in (-1, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = \frac{c\,\mathrm{e}^t}{t+1}$).

2. a) $x(t) = \frac{4}{3}t - \frac{1}{3}t^{-2}$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct - \frac{1}{3}t^{-2}$);

   b) $x(t) = (\ln t + 2)\,t^{-1}$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = \frac{c}{t} + \frac{1}{t}\ln|t|$);

   c) $x(t) = -(1 + \cos t)\,t^2$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct^2 - t^2\cos t$);

   d) $x(t) = 4t^{-2} + t^2$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct^{-2} + t^2$);

   e) $x(t) = t^3(\mathrm{e} - \mathrm{e}^t)$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct^3 - t^3\,\mathrm{e}^t$);

   f) $x(t) = 2t^{-3} + t^{-1}$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct^{-3} + t^{-1}$);

   g) $x(t) = (2 - t)\,\mathrm{e}^{t^2}$, $t \in \mathbb{R}$ (obecné řešení $x(t) = c\,\mathrm{e}^{t^2} - t\,\mathrm{e}^{t^2}$);

   h) $x(t) = (t+1)\cos t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (obecné řešení $x(t) = c\cos t + t\cos t$);

   i) $x(t) = (t+1)\big(\ln(t+1) - 1\big)$, $t \in (-1, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = c(t+1) + (t+1)\cdot$ $\cdot \ln|t+1|$);

   j) $x(t) = \frac{t-1}{t^2+1}$, $t \in \mathbb{R}$ (obecné řešení $x(t) = \frac{c}{t^2+1} + \frac{t}{t^2+1}$).

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

1. Řešte diferenciální rovnici s počátečními podmínkami:

   a) $x'' + 2x' - 3x = 0\,,\qquad x(0) = 3\,,\quad x'(0) = -1\,;$

   b) $x'' + 5x' = 0\,,\qquad x(0) = 0\,,\quad x'(0) = 5\,;$

   c) $x'' + 4x' + 4x = 0\,,\qquad x(0) = 2\,,\quad x'(0) = -5\,;$

   d) $x'' + 2x' + 5x = 0\,,\qquad x(0) = 0\,,\quad x'(0) = 6\,;$

   e) $x'' + 3x' + 2x = 6\,\mathrm{e}^t\,,\qquad x(0) = 3\,,\quad x'(0) = 0\,;$

   f) $x'' + 2x' + x = 2\sin t\,,\qquad x(0) = 0\,,\quad x'(0) = 0\,;$

   g) $x'' + 4x = 3\cos t\,,\qquad x(0) = 4\,,\quad x'(0) = 2\,;$

   h) $x'' + 2x' + 5x = 3\,\mathrm{e}^{-t}\sin t\,,\qquad x(0) = 3\,,\quad x'(0) = -2\,;$

   i) $x'' + 3x' + 2x = 2t\,\mathrm{e}^{-t}\,,\qquad x(0) = 0\,,\quad x'(0) = 0\,;$

   j) $x'' + x = \cos t\,,\qquad x(0) = 1\,,\quad x'(0) = 0\,.$

2. Řešte diferenciální rovnici s počátečními podmínkami:

   a) $x'' + x = \dfrac{1}{\sin t}\,,\qquad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,,\quad x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,;$

   b) $x'' + x = \dfrac{1}{\cos^3 t}\,,\qquad x(0) = 1\,,\quad x'(0) = 1\,;$

   c) $x'' - 2x' + x = \dfrac{\mathrm{e}^t}{t}\,,\qquad x(1) = 0\,,\quad x'(1) = \mathrm{e}\,;$

   d) $x'' - 2x' + x = \dfrac{\mathrm{e}^t}{t^2 + 1}\,,\qquad x(0) = 1\,,\quad x'(0) = 2\,.$

Výsledky

1. a) $x(t) = 2\,\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-3t}$, $t \in \mathbb{R}$ ($\tilde{x}(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,\mathrm{e}^{-3t}$);

   b) $x(t) = 1 - \mathrm{e}^{-5t}$, $t \in \mathbb{R}$ ($\tilde{x}(t) = c_1 + c_2\,\mathrm{e}^{-5t}$);

   c) $x(t) = (2 - t)\,\mathrm{e}^{-2t}$, $t \in \mathbb{R}$ ($\tilde{x}(t) = (c_1 + c_2 t)\,\mathrm{e}^{-2t}$);

   d) $x(t) = 3\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t$, $t \in \mathbb{R}$ ($\tilde{x}(t) = \mathrm{e}^{-t}\,(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$);

   e) $x(t) = 3\,\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^t$, $t \in \mathbb{R}$ ($\tilde{x}(t) = c_1\,\mathrm{e}^{-t} + c_2\,\mathrm{e}^{-2t}$, $\hat{x}(t) = A\,\mathrm{e}^t$);

   f) $x(t) = (t+1)\,\mathrm{e}^{-t} - \cos t$, $t \in \mathbb{R}$ ($\tilde{x}(t) = (c_1 + c_2 t)\,\mathrm{e}^{-t}$, $\hat{x}(t) = A\cos t + B\sin t$);

   g) $x(t) = 3\cos 2t + \sin 2t + \cos t$, $t \in \mathbb{R}$ ($\tilde{x}(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$, $\hat{x}(t) = A\cos t + B\sin t$);

   h) $x(t) = \mathrm{e}^{-t}\,(\sin t + 3\cos 2t)$, $t \in \mathbb{R}$ ($\tilde{x}(t) = \mathrm{e}^{-t}\,(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$, $\hat{x}(t) = \mathrm{e}^{-t}\,(A\cos t +$ $+ B\sin t)$);

   i) $x(t) = (t^2 - 2t + 2)\,\mathrm{e}^{-t} - 2\,\mathrm{e}^{-2t}$, $t \in \mathbb{R}$ ($\tilde{x}(t) = c_1\,\mathrm{e}^{-t} + c_2\,\mathrm{e}^{-2t}$, $\hat{x}(t) = t\,(At + B)\,\mathrm{e}^{-t}$);

   j) $x(t) = \cos t + \frac{1}{2}\,t\sin t$, $t \in \mathbb{R}$ ($\tilde{x}(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, $\hat{x}(t) = At\cos t + Bt\sin t$).

2. a) $x(t) = \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\cos t + \ln\sin t \cdot \sin t$, $t \in (0, \pi)$ ($\tilde{x}(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, $\hat{x}(t) = -t\cos t +$ $+ \ln\sin \cdot \sin t$);

   b) $x(t) = \frac{1}{2}\cos t + \sin t + \frac{1}{2\cos t}$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ($\tilde{x}(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, $\hat{x}(t) = \frac{1}{2\cos t}$);

   c) $x(t) = t\,\mathrm{e}^t \ln t$, $t \in (0, +\infty)$ ($\tilde{x}(t) = (c_1 + c_2 t)\,\mathrm{e}^t$, $\hat{x}(t) = t\,\mathrm{e}^t\,(\ln t - 1)$);

   d) $x(t) = \left(1 + t + t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right)\mathrm{e}^t$, $t \in \mathbb{R}$ ($\tilde{x}(t) = (c_1 + c_2 t)\,\mathrm{e}^t$, $\hat{x}(t) =$ $= \left(t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right)\mathrm{e}^t$).

Soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

1. Najděte fundamentální matici (přidružené homogenní) soustavy diferenciálních rovnic a řešení soustavy pro dané počáteční podmínky:

a) $x_1' = 2x_1 - x_2\,, \quad x_1(0) = 1\,,$
$x_2' = 4x_1 - 3x_2\,, \quad x_2(0) = -2\,;$

b) $x_1' = 2x_1 - x_2\,, \quad x_1(0) = 5\,,$
$x_2' = -2x_1 + x_2\,, \quad x_2(0) = 1\,;$

c) $x_1' = x_1 - x_2\,, \quad x_1(0) = -1\,,$
$x_2' = x_1 + 3x_2\,, \quad x_2(0) = 0\,;$

d) $x_1' = 2x_1 - 3x_2\,, \quad x_1(0) = 2\,,$
$x_2' = 3x_1 - 4x_2\,, \quad x_2(0) = 1\,;$

e) $x_1' = x_1 + x_2\,, \quad x_1(0) = 1\,,$
$x_2' = -2x_1 + 3x_2\,, \quad x_2(0) = 1\,;$

f) $x_1' = - x_2\,, \quad x_1(0) = 1\,,$
$x_2' = 2x_1 + 2x_2\,, \quad x_2(0) = 1\,;$

g) $x_1' = -x_1 + x_2 + \mathrm{e}^t\,, \quad x_1(0) = 0\,,$
$x_2' = x_1 - x_2 + \mathrm{e}^t\,, \quad x_2(0) = 0\,;$

h) $x_1' = x_1 - x_2 + 2\,\mathrm{e}^t\,, \quad x_1(0) = 0\,,$
$x_2' = -x_1 + x_2 + \mathrm{e}^t\,, \quad x_2(0) = 3\,.$

Výsledky

1.

a) $\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{-2t} \\ \mathrm{e}^{t} & 4\,\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-2t} \\ 2\,\mathrm{e}^{t} - 4\,\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}\,;$

b) $\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{3t} \\ 2 & -\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 + 3\,\mathrm{e}^{3t} \\ 4 - 3\,\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}\,;$

c) $\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & t\,\mathrm{e}^{2t} \\ -\mathrm{e}^{2t} & -(t+1)\,\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} (t-1)\,\mathrm{e}^{2t} \\ -t\,\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}\,;$

d) $\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & (3t+1)\,\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} & 3t\,\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} (3t+2)\,\mathrm{e}^{-t} \\ (3t+1)\,\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}\,;$

e) $\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}\cos t & \mathrm{e}^{2t}\sin t \\ \mathrm{e}^{2t}(\cos t - \sin t) & \mathrm{e}^{2t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}\cos t \\ \mathrm{e}^{2t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,;$

f) $\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t}\cos t & \mathrm{e}^{t}\sin t \\ \mathrm{e}^{t}(\sin t - \cos t) & -\mathrm{e}^{t}(\cos t + \sin t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t}(\cos t - 2\sin t) \\ \mathrm{e}^{t}(\cos t + 3\sin t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,;$

g) $\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-2t} \\ 1 & -\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} - 1 \\ \mathrm{e}^{t} - 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}\,;$

h) $\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{2t} \\ 1 & -\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{2t} \\ 2\,\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$

Obrazy v Laplaceově transformaci

1. Spočtěte obraz funkce v Laplaceově transformaci:

a) $2t^2 - 3t + 4$; b) $e^{2t} + 3e^{-4t}$; c) $\sinh t$;

d) $\cosh 2t$; e) $3\sin t - 2\cos t$; f) $4\cos 2t + 3\sin 2t$;

g) $3t\,e^{-t} + 2t^2 e^{3t}$; h) $t\sin 2t$; i) $t\cos 3t$;

j) $t^2 \sin 3t$; k) $t^2 \cos 2t$; l) $3e^{3t}\sin 2t$;

m) $2e^{-t}\cos 3t$; n) $t\,e^{2t}\sin 3t$; o) $t\,e^{-3t}\cos 2t$.

2. Spočtěte obraz funkce v Laplaceově transformaci:

a) $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle 0, 2), \\ 0, & t \in \langle 2, +\infty); \end{cases}$ b) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in \langle 0, 2), \\ 0, & t \in \langle 2, +\infty); \end{cases}$

c) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in \langle 0, \pi), \\ 0, & t \in \langle \pi, +\infty); \end{cases}$ d) $f(t) = \begin{cases} t^2, & t \in \langle 0, 1), \\ 1, & t \in \langle 1, +\infty); \end{cases}$

e) $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle 0, 1), \\ -1, & t \in \langle 1, 2), \\ 0, & t \in \langle 2, +\infty); \end{cases}$ f) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in \langle 0, 1), \\ 2 - t, & t \in \langle 1, 2), \\ 0, & t \in \langle 2, +\infty). \end{cases}$

3. Spočtěte v Laplaceově transformaci obraz periodické funkce, která je na intervalu $\langle 0, T)$ (T je její perioda) zadána předpisem:

a) $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle 0, \pi), \\ 0, & t \in \langle \pi, 2\pi); \end{cases}$ b) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in \langle 0, 1), \\ 2 - t, & t \in \langle 1, 2); \end{cases}$

c) $f(t) = \cos t, \quad t \in \langle 0, \pi)$.

Výsledky

1. a) $\frac{4}{p^3} - \frac{3}{p^2} + \frac{4}{p}$, $p > 0$; b) $\frac{1}{p-2} + \frac{3}{p+4}$, $p > 2$; c) $\frac{1}{p^2-1}$, $p > 1$; d) $\frac{p}{p^2-4}$, $p > 2$;
   e) $\frac{3-2p}{p^2+1}$, $p > 0$; f) $\frac{4p+6}{p^2+4}$, $p > 0$; g) $\frac{3}{(p+1)^2} + \frac{4}{(p-3)^3}$, $p > 3$; h) $\frac{4p}{(p^2+4)^2}$, $p > 0$;
   i) $\frac{p^2-9}{(p^2+9)^2}$, $p > 0$; j) $\frac{18(p^2-3)}{(p^2+9)^3}$, $p > 0$; k) $\frac{2p^3-24p}{(p^2+4)^3}$, $p > 0$; l) $\frac{6}{(p-3)^2+4}$, $p > 3$;
   m) $\frac{2(p+)}{(p+1)^2+9}$, $p > -1$; n) $\frac{6(p-2)}{((p-2)^2+9)^2}$, $p > 2$; o) $\frac{(p+3)^2-4}{((p+3)^2+4)^2}$, $p > -3$.

2. a) $\frac{1}{p}\,(1 - \mathrm{e}^{-2p})$; b) $\frac{1}{p^2} - \mathrm{e}^{-2p}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{2}{p}\right)$; c) $\frac{1}{p^2+1}\,(1 + \mathrm{e}^{-\pi p})$; d) $\frac{2}{p^3} - \mathrm{e}^{-p}\left(\frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^2}\right)$;
   e) $\frac{1}{p}\,(1 - 2\,\mathrm{e}^{-p} + \mathrm{e}^{-2p})$; f) $\frac{1}{p^2}\,(1 - 2\,\mathrm{e}^{-p} + \mathrm{e}^{-2p})$.

3. a) $\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\pi p}}$; b) $\frac{1}{p^2} \cdot \frac{(1-\mathrm{e}^{-p})^2}{1-\mathrm{e}^{-2p}} = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1-\mathrm{e}^{-p}}{1+\mathrm{e}^{-p}}$; c) $\frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi p}}{1-\mathrm{e}^{-\pi p}}$.

Vzory v Laplaceově transformaci

1. Najděte předmět (vzor v Laplaceově transformaci) k dané funkci:

a) $\dfrac{p^2+1}{p^3+3p^2+2p}$; b) $\dfrac{1}{p^3+6p^2+9p}$; c) $\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$;

d) $\dfrac{1}{(p-2)^3}$; e) $\dfrac{1}{(p+3)^4}$; f) $\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$;

g) $\dfrac{1}{p^2+4p+5}$; h) $\dfrac{3p+4}{p^2+2p+10}$; i) $\dfrac{4p-3}{p^2-2p+5}$;

j) $\dfrac{4p+5}{p^2+6p+13}$; k) $\dfrac{p+3}{p^2-4p+20}$; l) $\dfrac{2p^3-p^2+1}{p^2-3p}$.

2. Najděte předmět (vzor v Laplaceově transformaci) k dané funkci:

a) $\dfrac{1}{p^2}\,\mathrm{e}^{-p}$; b) $\dfrac{1}{p+2}\,\mathrm{e}^{-4p}$; c) $\dfrac{p}{p^2+9}\,\mathrm{e}^{-\pi p}$.

Výsledky

1. a) $\frac{1}{2} - 2\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{5}{2}\,\mathrm{e}^{-2t}$; b) $\frac{1}{9} - \left(\frac{1}{3}\,t + \frac{1}{9}\right)\mathrm{e}^{-3t}$; c) $\frac{1}{9}\,\mathrm{e}^{-2t} + \left(\frac{1}{3}\,t - \frac{1}{9}\right)\mathrm{e}^{-t}$; d) $\frac{1}{2}\,t^2\,\mathrm{e}^{2t}$;
   e) $\frac{1}{6}\,t^3\,\mathrm{e}^{-3t}$; f) $t - \sin t$; g) $\mathrm{e}^{-2t}\sin t$; h) $\mathrm{e}^{-t}\left(3\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t\right)$;
   i) $\mathrm{e}^{t}\left(4\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)$; j) $\mathrm{e}^{-3t}\left(4\cos 2t - \frac{7}{2}\sin 2t\right)$; k) $\mathrm{e}^{2t}\left(\cos 4t + \frac{5}{4}\sin 4t\right)$;
   l) neexistuje.

2. a) $(t-1)\cdot \mathrm{H}(t-1)$; b) $\mathrm{e}^{8-2t}\cdot \mathrm{H}(t-4)$; c) $-\cos 3t \cdot \mathrm{H}(t-\pi)$.

Řešení diferenciálních a integrodiferenciálních rovnic

1. Řešte pomocí Laplaceovy transformace:

   a) $x'' + x' - 2x = 0\,, \qquad x(0+) = 0\,, \quad x'(0+) = 3\,;$

   b) $x'' - 2x' + 2x = 0\,, \qquad x(0+) = 1\,, \quad x'(0+) = 1\,;$

   c) $x'' + 5x' + 6x = 4\,\mathrm{e}^{-t}\,, \qquad x(0+) = 0\,, \quad x'(0+) = 0\,;$

   d) $x'' + x = \sin 2t\,, \qquad x(0+) = 0\,, \quad x'(0+) = 0\,;$

   e) $x'' + x = \cos t\,, \qquad x(0+) = -1\,, \quad x'(0+) = 1\,.$

2. Řešte pomocí Laplaceovy transformace:

   a) $\begin{aligned} x' &= x + y\,, & x(0+) = 1\,,\\ y' &= -2x + 3y\,, & y(0+) = 1\,;\end{aligned}$

   b) $\begin{aligned} x' &= -y\,, & x(0+) = 1\,,\\ y' &= 2x + 2y\,, & y(0+) = 1\,;\end{aligned}$

   c) $\begin{aligned} x' &= -x + y + \mathrm{e}^t\,, & x(0+) = 0\,,\\ y' &= x - y + \mathrm{e}^t\,, & y(0+) = 0\,;\end{aligned}$

   d) $\begin{aligned} x' &= x - y + 2\,\mathrm{e}^t\,, & x(0+) = 0\,,\\ y' &= -x + y + \mathrm{e}^t\,, & y(0+) = 3\,.\end{aligned}$

3. Řešte pomocí Laplaceovy transformace:

   a) $x' + 6x + 9\displaystyle\int_0^t x(u)\,\mathrm{d}u = 0\,, \qquad x(0+) = 1\,;$

   b) $x' + 2x + 5\displaystyle\int_0^t x(u)\,\mathrm{d}u = 0\,, \qquad x(0+) = -1\,;$

   c) $x' - 4x + 5\displaystyle\int_0^t x(u)\,\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{e}^t\,, \qquad x(0+) = 1\,;$

   d) $x' + \displaystyle\int_0^t \cosh(t-u)\,x(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-t}\,, \qquad x(0+) = 0\,.$

4. Řešte pomocí Laplaceovy transformace:

   a) $x' - x = \begin{cases} 2 - t\,, & t \in \langle 0, 2)\,,\\ 0\,, & t \in \langle 2, +\infty)\,,\end{cases} \qquad x(0+) = -1\,;$

   b) $x' + x = \begin{cases} 5\cos 2t\,, & t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right)\,,\\ 0\,, & t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, +\infty\right)\,,\end{cases} \qquad x(0+) = 1\,;$

   c) $x'' + 4x = \begin{cases} 4\,, & t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4}\right)\,,\\ 8\,, & t \in \left\langle \frac{\pi}{4}, +\infty\right)\,,\end{cases} \qquad x(0+) = 4\,, \quad x'(0+) = 0\,;$

   d) $x'' + 9x = \begin{cases} 8\sin t\,, & t \in \langle 0, \pi)\,,\\ 0\,, & t \in \langle \pi, +\infty)\,,\end{cases} \qquad x(0+) = 0\,, \quad x'(0+) = 0\,.$

Výsledky

1. a) $\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-2t}\,,\; t\in\langle 0,+\infty)\,;$

   b) $\mathrm{e}^{t}\cos t\,,\; t\in\langle 0,+\infty)\,;$

   c) $2\,\mathrm{e}^{-t}-4\,\mathrm{e}^{-2t}+2\,\mathrm{e}^{-3t}\,,\; t\in\langle 0,+\infty)\,;$

   d) $\frac{2}{3}\sin t-\frac{1}{3}\sin 2t\,,\; t\in\langle 0,+\infty)\,;$

   e) $\left(\frac{1}{2}\,t+1\right)\sin t-\cos t\,,\; t\in\langle 0,+\infty)\,;$

2. a) $x(t)=\mathrm{e}^{2t}\cos t\,,\; y(t)=\mathrm{e}^{2t}\,(\cos t-\sin t)\,,\; t\in\langle 0,+\infty)\,;$

   b) $x(t)=\mathrm{e}^{t}\,(\cos t-2\sin t)\,,\; y(t)=\mathrm{e}^{t}\,(\cos t+3\sin t)\,,\; t\in\langle 0,+\infty)\,;$

   c) $x(t)=\mathrm{e}^{t}-1\,,\; y(t)=\mathrm{e}^{t}-1\,,\; t\in\langle 0,+\infty)\,;$

   d) $x(t)=\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{2t}\,,\; y(t)=2\,\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{2t}\,,\; t\in\langle 0,+\infty)\,.$

3. a) $x(t)=(1-3t)\,\mathrm{e}^{-3t}\,,\; t\in\langle 0,+\infty)\,;$

   b) $x(t)=\mathrm{e}^{-t}\left(\frac{1}{2}\sin 2t-\cos 2t\right),\; t\in\langle 0,+\infty)\,;$

   c) $x(t)=\mathrm{e}^{t}+5\,\mathrm{e}^{2t}\sin t\,,\; t\in\langle 0,+\infty)\,;$

   d) $x(t)=-\frac{1}{2}\,t^2+t\,,\; t\in\langle 0,+\infty)\,;$

4.

   a) $x(t)=\begin{cases} t-1\,, & t\in\langle 0,2)\,,\\ \mathrm{e}^{t-2}\,, & t\in\langle 2,+\infty)\,;\end{cases}$

   b) $x(t)=\begin{cases} \cos 2t+2\sin 2t\,, & t\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right)\,,\\ -\mathrm{e}^{\pi/2}\,\mathrm{e}^{-t}\,, & t\in\left\langle \frac{\pi}{2},+\infty\right)\,;\end{cases}$

   c) $x(t)=\begin{cases} 3\cos 2t+1\,, & t\in\left\langle 0,\frac{\pi}{4}\right)\,,\\ 2+3\cos 2t-\sin 2t\,, & t\in\left\langle \frac{\pi}{4},+\infty\right)\,;\end{cases}$

   d) $x(t)=\begin{cases} \sin t-\frac{1}{3}\sin 3t\,, & t\in\langle 0,\pi)\,,\\ 0\,, & t\in\langle \pi,+\infty)\,;\end{cases}$

Číselné řady

1. Určete součet:

a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n$;

b) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$;

c) $1 - 2 - 5 - \cdots - 56$;

d) $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots$;

e) $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \cdots$;

f) $1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8} + \cdots$.

2. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$;

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+3}$;

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$;

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$;

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$;

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-k)^7}{2^k}$;

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k!}$;

h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{8^k}$;

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$.

Výsledky

1. a) $\frac{1}{2}\,n(n+1)$; b) n^2; c) -550; d) 3; e) $\frac{1}{4}$; f) nekonverguje.

2. a) neabsolutně; b) neabsolutně; c) nekonverguje; d) absolutně; e) absolutně; f) absolutně; g) absolutně; h) nekonverguje; i) absolutně.

Mocninné řady

1. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci mocninné řady:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x-1)^k}{2k+3}$;

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3-2x)^k}{\sqrt{k}}$;

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k^2+2}\left(\frac{x-2}{3}\right)^k$;

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}\left(\frac{x}{2}+1\right)^k$;

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\left(2-\frac{x}{3}\right)^k$;

f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+2}(x-1)^k$;

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k^2}(x-2)^k$;

h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^4}(x+1)^k$;

i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k^2}(x+2)^k$;

j) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 3k^2\left(\frac{x}{2}-1\right)^k$;

k) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{k+2}}(x-1)^k$;

l) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{1+3^{-k}}$.

Výsledky

1. a) poloměr konvergence $r = \frac{1}{3}$, absolutně na $(0, \frac{2}{3})$, neabsolutně v 0;

   b) poloměr konvergence $r = \frac{1}{2}$, absolutně na $(1, 2)$, neabsolutně v 2;

   c) poloměr konvergence $r = 3$, absolutně na $(-1, 5)$, neabsolutně v -1;

   d) poloměr konvergence $r = 2$, absolutně na $(-4, 0)$, neabsolutně v -4;

   e) poloměr konvergence $r = 3$, absolutně na $(3, 9)$, neabsolutně v 9;

   f) poloměr konvergence $r = \frac{1}{3}$, absolutně na $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$, neabsolutně v $\frac{2}{3}$;

   g) poloměr konvergence $r = \frac{1}{4}$, absolutně na $\langle \frac{7}{4}, \frac{9}{4} \rangle$, neabsolutně nikde;

   h) poloměr konvergence $r = 0$, absolutně na $\{-1\}$, neabsolutně nikde;

   i) poloměr konvergence $r = +\infty$, absolutně na $\mathbb{R}$, neabsolutně nikde;

   j) poloměr konvergence $r = 2$, absolutně na $(0, 4)$, neabsolutně nikde;

   k) poloměr konvergence $r = 3$, absolutně na $(-2, 4)$, neabsolutně nikde;

   l) poloměr konvergence $r = 1$, absolutně na $(1, 3)$, neabsolutně nikde.

Taylorovy řady

1. Najděte Taylorovu řadu funkce f v bodě x_0 a určete interval, na kterém k této funkci konverguje:

a) $f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{3x}\,, \quad x_0 = 1\,;$

b) $f(x) = (2x+3)\,\mathrm{e}^{-x}\,, \quad x_0 = -1\,;$

c) $f(x) = \dfrac{x-\pi}{3}\sin 3x + 2x\,, \quad x_0 = \pi\,;$

d) $f(x) = (2x-1)\sin \pi x\,, \quad x_0 = \dfrac{1}{2}\,;$

e) $f(x) = (x-1)\cos \pi x + x\,, \quad x_0 = 1\,;$

f) $f(x) = \cos 2x - x\,, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{4}\,;$

g) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}\,, \quad x_0 = 2\,;$

h) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}\,, \quad x_0 = -1\,;$

i) $f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}\,, \quad x_0 = -1\,;$

j) $f(x) = \dfrac{2}{(x+4)^2}\,, \quad x_0 = -2\,;$

k) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^3}\,, \quad x_0 = -1\,.$

Výsledky

1.

a) $3e^3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^3(k+9)3^{k-1}}{k!} (x-1)^k , \qquad x \in \mathbb{R} ;$

b) $e + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e(2k-1)(-1)^{k-1}}{k!} (x+1)^k , \qquad x \in \mathbb{R} ;$

c) $2\pi + 2(x-\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 9^{k-1}}{(2k-2)!} (x-\pi)^{2k} , \qquad x \in \mathbb{R} ;$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\,(-1)^k\, \pi^{2k}}{(2k)!} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{2k+1} , \qquad x \in \mathbb{R} ;$

e) $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\pi^{2k}}{(2k)!} (x-1)^{2k+1} , \qquad x \in \mathbb{R} ;$

f) $\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2k+1} , \qquad x \in \mathbb{R} ;$

g) $\frac{5}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-7\,(-1)^k}{4^{k+1}} (x-2)^k , \qquad x \in (-2, 6) ;$

h) $1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (x+1)^k , \qquad x \in (-2, 0) ;$

i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{3^{k+1}} (x+1)^k , \qquad x \in (-4, 2) ;$

j) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)\,(-1)^k}{2^{k+1}} (x+2)^k , \qquad x \in (-4, 0) ;$

k) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(k+1)\,(k+2)}{2^{k+4}} (x+1)^k , \qquad x \in (-3, 1) .$

Fourierovy řady

1. Nalezněte Fourierovu řadu funkce:

   a) $f(t) = t\,,\quad t \in \langle 0, \pi)\,;$

   b) $f(t) = \begin{cases} 2\,, & t \in \langle 0, 2)\,, \\ -3\,, & t \in \langle 2, 4)\,; \end{cases}$

   c) $f(t) = \begin{cases} t\,, & t \in \langle 0, 1)\,, \\ 1\,, & t \in \langle 1, 2)\,. \end{cases}$

2. Nalezněte kosinovou Fourierovu řadu funkce:

   a) $f(t) = t\,,\quad t \in \langle 0, 1)\,;$

   b) $f(t) = t^2\,,\quad t \in \langle 0, \pi)\,.$

3. Nalezněte sinovou Fourierovu řadu funkce:

   a) $f(t) = 1 - t\,,\quad t \in \langle 0, 1)\,;$

   b) $f(t) = \begin{cases} t\,, & t \in \langle 0, 1)\,, \\ 1\,, & t \in \langle 1, 2)\,. \end{cases}$

Výsledky

1.

a) $\dfrac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{-1}{k} \sin 2kt\,;$

b) $-\dfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{10}{(2k-1)\pi} \sin \dfrac{(2k-1)\pi t}{2}\,;$

c) $\dfrac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{(-1)^k - 1}{(2k-1)^2\pi^2} \cos k\pi t - \dfrac{1}{k\pi} \sin k\pi t \right).$

2.

a) $\dfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{-4}{(2k-1)^2\pi^2} \cos(2k-1)\pi t\,;$

b) $\dfrac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{4\,(-1)^k}{k^2\pi^2} \cos kt\,.$

3.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{2}{k\pi} \sin k\pi t\,;$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{4}{k^2\pi^2} \sin \dfrac{k\pi}{2} - \dfrac{2\,(-1)^k}{k\pi} \right) \sin \dfrac{k\pi t}{2}\,.$