

Separovatelné diferenciální rovnice

1. Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$x' = \frac{e^{-x}}{t}, \quad x(1) = 0.$$

2. Řešte diferenciální rovnici $x' = x^{-2}$ s počáteční podmínkou:

a) $x(1) = 1$; b) $x(-2) = 1$; c) $x(-2) = -2$.

3. Řešte diferenciální rovnici $x' = -t/x$ s počáteční podmínkou:

a) $x(1) = 1$; b) $x(4) = -3$.

4. Řešte diferenciální rovnici $x' = -x^2$ s počáteční podmínkou:

a) $x(-1) = 0$; b) $x(1) = 3$; c) $x(-2) = -1$.

5. Řešte diferenciální rovnici $x' = (x^2 - x)/t$ s počáteční podmínkou:

a) $x(1) = 2$; b) $x(-2) = 1$; c) $x(1) = \frac{3}{4}$; d) $x(3) = 0$; e) $x(1) = -1$.

6. Řešte diferenciální rovnici $x' = (1 - x^2)/(2tx)$ s počáteční podmínkou:

a) $x(1) = \frac{1}{2}$; b) $x(-2) = 1$; c) $x(2) = 2$; d) $x(3) = -2$; e) $x(-3) = -\frac{2}{3}$.

7. Řešte diferenciální rovnici $x' = 2\sqrt{x}$ s počáteční podmínkou:

a) $x(0) = 1$; b) $x(0) = 0$.

Výsledky

1. $x(t) = \ln(1 + \ln t)$, $t \in (\frac{1}{e}, +\infty)$; obecné řešení je $x(t) = \ln \ln ct$ pro $c \neq 0$ na intervalu $(-\infty, \frac{1}{c})$ pro $c < 0$, $(\frac{1}{c}, +\infty)$ pro $c > 0$.
2. Obecné řešení $x(t) = \sqrt[3]{3(t-c)}$ na intervalech $(-\infty, c)$ a $(c, +\infty)$; a) $x(t) = \sqrt[3]{3t-2}$, $t \in (\frac{2}{3}, +\infty)$; b) $x(t) = \sqrt[3]{3t+7}$, $t \in (-\frac{7}{3}, +\infty)$; c) $x(t) = \sqrt[3]{3t-2}$, $t \in (-\infty, \frac{2}{3})$.
3. Obecné řešení $x(t) = \sqrt{c^2 - t^2}$, $x(t) = -\sqrt{c^2 - t^2}$, $t \in (-c, c)$ pro $c > 0$; a) $x(t) = \sqrt{2-t^2}$, $t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$; b) $x(t) = -\sqrt{25-t^2}$, $t \in (-5, 5)$.
4. Stacionární řešení $x(t) = 0$ na intervalu \mathbb{R} , nestacionární řešení $x(t) = \frac{1}{t-c}$ na intervalech $(-\infty, c)$ a $(c, +\infty)$; a) $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$; b) $x(t) = \frac{3}{3t-2}$, $t \in (\frac{2}{3}, +\infty)$; c) $x(t) = \frac{1}{t+1}$, $t \in (-\infty, -1)$.
5. Stacionární řešení $x(t) = 0$, $x(t) = 1$ na intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$; nestacionární řešení $x(t) = \frac{1}{1-ct}$ pro $c \neq 0$ na maximálních intervalech neobsahujících $0, \frac{1}{c}$; a) $x(t) = \frac{2}{2-t}$, $t \in (0, 2)$; b) $x(t) = 1$, $t \in (-\infty, 0)$; c) $x(t) = \frac{3}{3+t}$, $t \in (0, +\infty)$; d) $x(t) = 0$, $t \in (0, +\infty)$; e) $x(t) = \frac{1}{1-2t}$, $t \in (\frac{1}{2}, +\infty)$.
6. Stacionární řešení $x(t) = 1$, $x(t) = -1$ na intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$; nestacionární řešení $x(t) = \sqrt{1-c/t}$ a $x(t) = -\sqrt{1-c/t}$ na maximálních intervalech disjunktních s intervalem obsahujícím $0, c$; a) $x(t) = \sqrt{1-3/(4t)}$, $t \in (\frac{3}{4}, +\infty)$; b) $x(t) = 1$, $t \in (-\infty, 0)$; c) $x(t) = \sqrt{1+6/t}$, $t \in (0, +\infty)$; d) $x(t) = -\sqrt{1+9/t}$, $t \in (0, +\infty)$; e) $x(t) = -\sqrt{1+5/(3t)}$, $t \in (-\infty, -\frac{5}{3})$.
7. Stacionární řešení $x(t) = 0$ na intervalu \mathbb{R} , nestacionární řešení $x(t) = (t-c)^2$ na intervalech $(c, +\infty)$, dají se prodloužit stacionárním řešením na \mathbb{R} ;

$$\text{a) } x(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, -1), \\ (t+1)^2, & t \in (-1, +\infty); \end{cases}$$

$$\text{b) } x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{nebo} \quad x(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, c), \\ (t-c)^2, & t \in (c, +\infty), \end{cases} \quad (c \geq 0).$$

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

1. Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou:

a) $x' = \frac{2tx}{t^2 - 1}$, $x(3) = 4$;

b) $x' = \frac{x+2}{t}$, $x(2) = 4$;

c) $x' = \frac{2x+4}{t}$, $x(1) = 3$;

d) $x' = -\frac{x}{t+1}$, $x(1) = 2$;

e) $x' = -\frac{3x+3}{t}$, $x(1) = 0$;

f) $x' = (x-1)\cos t$, $x(\pi) = 0$;

g) $x' = -2t(x+1)$, $x(0) = 2$;

h) $x' = (x-1)\cotg t$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$;

i) $x' = -\frac{tx}{t+1}$, $x(0) = 2$;

j) $x' = \frac{tx}{t+1}$, $x(0) = 1$.

2. Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou:

a) $x' = \frac{1}{t}x + \frac{1}{t^3}$, $x(1) = 1$;

b) $x' = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{t^2}$, $x(1) = 2$;

c) $x' = \frac{2}{t}x + t^2 \sin t$, $x(\pi) = 0$;

d) $x' = -\frac{2}{t}x + 4t$, $x(2) = 5$;

e) $x' = \frac{3}{t}x - t^3 e^t$, $x(1) = 0$;

f) $x' = -\frac{3}{t}x + \frac{2}{t^2}$, $x(1) = 3$;

g) $x' = 2tx - e^{t^2}$, $x(0) = 2$;

h) $x' = -x \operatorname{tg} t + \cos t$, $x(0) = 1$;

i) $x' = \frac{1}{t+1}x + 1$, $x(0) = -1$;

j) $x' = \frac{-2t}{t^2+1}x + \frac{1}{t^2+1}$, $x(1) = 0$.

Výsledky

1. Jedná se o lineární diferenciální rovnice, všechny lze řešit separací.
 - a) $x(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$, $t \in (1, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = c(t^2 - 1)$);
 - b) $x(t) = 3t - 2$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct - 2$);
 - c) $x(t) = 5t^2 - 2$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct^2 - 2$);
 - d) $x(t) = \frac{4}{t+1}$, $t \in (-1, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = \frac{c}{t+1}$);
 - e) $x(t) = t^{-3} - 1$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct^{-3} - 1$);
 - f) $x(t) = 1 - e^{\sin t}$, $t \in \mathbb{R}$ (obecné řešení $x(t) = c e^{\sin t} + 1$);
 - g) $x(t) = 3e^{-t^2} - 1$, $t \in \mathbb{R}$ (obecné řešení $x(t) = c e^{-t^2} - 1$);
 - h) $x(t) = 2 \sin t + 1$, $t \in (0, \pi)$ (obecné řešení $x(t) = c \sin t + 1$);
 - i) $x(t) = 2(t+1)e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$ (obecné řešení $x(t) = c(t+1)e^{-t}$);
 - j) $x(t) = \frac{e^t}{t+1}$, $t \in (-1, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = \frac{c e^t}{t+1}$).
2.
 - a) $x(t) = \frac{4}{3}t - \frac{1}{3}t^{-2}$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct - \frac{1}{3}t^{-2}$);
 - b) $x(t) = (\ln t + 2)t^{-1}$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = \frac{c}{t} + \frac{1}{t} \ln |t|$);
 - c) $x(t) = -(1 + \cos t)t^2$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct^2 - t^2 \cos t$);
 - d) $x(t) = 4t^{-2} + t^2$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct^{-2} + t^2$);
 - e) $x(t) = t^3(e - e^t)$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct^3 - t^3 e^t$);
 - f) $x(t) = 2t^{-3} + t^{-1}$, $t \in (0, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = ct^{-3} + t^{-1}$);
 - g) $x(t) = (2 - t)e^{t^2}$, $t \in \mathbb{R}$ (obecné řešení $x(t) = c e^{t^2} - t e^{t^2}$);
 - h) $x(t) = (t + 1) \cos t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (obecné řešení $x(t) = c \cos t + t \cos t$);
 - i) $x(t) = (t + 1)(\ln(t + 1) - 1)$, $t \in (-1, +\infty)$ (obecné řešení $x(t) = c(t + 1) + (t + 1) \cdot \ln |t + 1|$);
 - j) $x(t) = \frac{t-1}{t^2+1}$, $t \in \mathbb{R}$ (obecné řešení $x(t) = \frac{c}{t^2+1} + \frac{t}{t^2+1}$).

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

1. Řešte diferenciální rovnici s počátečními podmínkami:

a) $x'' + 2x' - 3x = 0$, $x(0) = 3$, $x'(0) = -1$;

b) $x'' + 5x' = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 5$;

c) $x'' + 4x' + 4x = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = -5$;

d) $x'' + 2x' + 5x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 6$;

e) $x'' + 3x' + 2x = 6e^t$, $x(0) = 3$, $x'(0) = 0$;

f) $x'' + 2x' + x = 2 \sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;

g) $x'' + 4x = 3 \cos t$, $x(0) = 4$, $x'(0) = 2$;

h) $x'' + 2x' + 5x = 3e^{-t} \sin t$, $x(0) = 3$, $x'(0) = -2$;

i) $x'' + 3x' + 2x = 2te^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;

j) $x'' + x = \cos t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

2. Řešte diferenciální rovnici s počátečními podmínkami:

a) $x'' + x = \frac{1}{\sin t}$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

b) $x'' + x = \frac{1}{\cos^3 t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$;

c) $x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{t}$, $x(1) = 0$, $x'(1) = e$;

d) $x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{t^2 + 1}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

Výsledky

1. a) $x(t) = 2e^t + e^{-3t}$, $t \in \mathbb{R}$ ($\tilde{x}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-3t}$);
b) $x(t) = 1 - e^{-5t}$, $t \in \mathbb{R}$ ($\tilde{x}(t) = c_1 + c_2 e^{-5t}$);
c) $x(t) = (2 - t)e^{-2t}$, $t \in \mathbb{R}$ ($\tilde{x}(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}$);
d) $x(t) = 3e^{-t} \sin 2t$, $t \in \mathbb{R}$ ($\tilde{x}(t) = e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$);
e) $x(t) = 3e^{-t} - e^{-2t} + e^t$, $t \in \mathbb{R}$ ($\tilde{x}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$, $\hat{x}(t) = A e^t$);
f) $x(t) = (t + 1)e^{-t} - \cos t$, $t \in \mathbb{R}$ ($\tilde{x}(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t}$, $\hat{x}(t) = A \cos t + B \sin t$);
g) $x(t) = 3 \cos 2t + \sin 2t + \cos t$, $t \in \mathbb{R}$ ($\tilde{x}(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$, $\hat{x}(t) = A \cos t + B \sin t$);
h) $x(t) = e^{-t}(\sin t + 3 \cos 2t)$, $t \in \mathbb{R}$ ($\tilde{x}(t) = e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$, $\hat{x}(t) = e^{-t}(A \cos t + B \sin t)$);
i) $x(t) = (t^2 - 2t + 2)e^{-t} - 2e^{-2t}$, $t \in \mathbb{R}$ ($\tilde{x}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$, $\hat{x}(t) = t(At + B)e^{-t}$);
j) $x(t) = \cos t + \frac{1}{2}t \sin t$, $t \in \mathbb{R}$ ($\tilde{x}(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, $\hat{x}(t) = At \cos t + Bt \sin t$).
2. a) $x(t) = (\frac{\pi}{2} - t) \cos t + \ln \sin t \cdot \sin t$, $t \in (0, \pi)$ ($\tilde{x}(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, $\hat{x}(t) = -t \cos t + \ln \sin t \cdot \sin t$);
b) $x(t) = \frac{1}{2} \cos t + \sin t + \frac{1}{2 \cos t}$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ($\tilde{x}(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, $\hat{x}(t) = \frac{1}{2 \cos t}$);
c) $x(t) = t e^t \ln t$, $t \in (0, +\infty)$ ($\tilde{x}(t) = (c_1 + c_2 t)e^t$, $\hat{x}(t) = t e^t (\ln t - 1)$);
d) $x(t) = (1 + t + t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1)) e^t$, $t \in \mathbb{R}$ ($\tilde{x}(t) = (c_1 + c_2 t)e^t$, $\hat{x}(t) = (t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1)) e^t$).

Soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

1. Najděte fundamentální matici (přidružené homogenní) soustavy diferenciálních rovnic a řešení soustavy pro dané počáteční podmínky:

a) $x_1' = 2x_1 - x_2, \quad x_1(0) = 1,$
 $x_2' = 4x_1 - 3x_2, \quad x_2(0) = -2;$

b) $x_1' = 2x_1 - x_2, \quad x_1(0) = 5,$
 $x_2' = -2x_1 + x_2, \quad x_2(0) = 1;$

c) $x_1' = x_1 - x_2, \quad x_1(0) = -1,$
 $x_2' = x_1 + 3x_2, \quad x_2(0) = 0;$

d) $x_1' = 2x_1 - 3x_2, \quad x_1(0) = 2,$
 $x_2' = 3x_1 - 4x_2, \quad x_2(0) = 1;$

e) $x_1' = x_1 + x_2, \quad x_1(0) = 1,$
 $x_2' = -2x_1 + 3x_2, \quad x_2(0) = 1;$

f) $x_1' = -x_2, \quad x_1(0) = 1,$
 $x_2' = 2x_1 + 2x_2, \quad x_2(0) = 1;$

g) $x_1' = -x_1 + x_2 + e^t, \quad x_1(0) = 0,$
 $x_2' = x_1 - x_2 + e^t, \quad x_2(0) = 0;$

h) $x_1' = x_1 - x_2 + 2e^t, \quad x_1(0) = 0,$
 $x_2' = -x_1 + x_2 + e^t, \quad x_2(0) = 3.$

Výsledky

1.

$$\text{a) } \mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-2t} \\ e^t & 4e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-2t} \\ 2e^t - 4e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R};$$

$$\text{b) } \mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{3t} \\ 2 & -e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 + 3e^{3t} \\ 4 - 3e^{3t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R};$$

$$\text{c) } \mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & -(t+1)e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} (t-1)e^{2t} \\ -te^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R};$$

$$\text{d) } \mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & (3t+1)e^{-t} \\ e^{-t} & 3te^{-t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} (3t+2)e^{-t} \\ (3t+1)e^{-t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R};$$

$$\text{e) } \mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \cos t & e^{2t} \sin t \\ e^{2t} (\cos t - \sin t) & e^{2t} (\cos t + \sin t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \cos t \\ e^{2t} (\cos t - \sin t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R};$$

$$\text{f) } \mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ e^t (\sin t - \cos t) & -e^t (\cos t + \sin t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t (\cos t - 2 \sin t) \\ e^t (\cos t + 3 \sin t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R};$$

$$\text{g) } \mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2t} \\ 1 & -e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t - 1 \\ e^t - 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R};$$

$$\text{h) } \mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{2t} \\ 1 & -e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t - e^{2t} \\ 2e^t + e^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Obrazy v Laplaceově transformaci

1. Spočtěte obraz funkce v Laplaceově transformaci:

- | | | |
|------------------------------|----------------------------|------------------------------|
| a) $2t^2 - 3t + 4$; | b) $e^{2t} + 3e^{-4t}$; | c) $\sinh t$; |
| d) $\cosh 2t$; | e) $3 \sin t - 2 \cos t$; | f) $4 \cos 2t + 3 \sin 2t$; |
| g) $3te^{-t} + 2t^2e^{3t}$; | h) $t \sin 2t$; | i) $t \cos 3t$; |
| j) $t^2 \sin 3t$; | k) $t^2 \cos 2t$; | l) $3e^{3t} \sin 2t$; |
| m) $2e^{-t} \cos 3t$; | n) $te^{2t} \sin 3t$; | o) $te^{-3t} \cos 2t$. |

2. Spočtěte obraz funkce v Laplaceově transformaci:

- | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle 0, 2 \rangle, \\ 0, & t \in \langle 2, +\infty \rangle; \end{cases}$ | b) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in \langle 0, 2 \rangle, \\ 0, & t \in \langle 2, +\infty \rangle; \end{cases}$ |
| c) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in \langle 0, \pi \rangle, \\ 0, & t \in \langle \pi, +\infty \rangle; \end{cases}$ | d) $f(t) = \begin{cases} t^2, & t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 1, & t \in \langle 1, +\infty \rangle; \end{cases}$ |
| e) $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ -1, & t \in \langle 1, 2 \rangle, \\ 0, & t \in \langle 2, +\infty \rangle; \end{cases}$ | f) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 2 - t, & t \in \langle 1, 2 \rangle, \\ 0, & t \in \langle 2, +\infty \rangle. \end{cases}$ |

3. Spočtěte v Laplaceově transformaci obraz periodické funkce, která je na intervalu $\langle 0, T \rangle$ (T je její perioda) zadána předpisem:

- | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle 0, \pi \rangle, \\ 0, & t \in \langle \pi, 2\pi \rangle; \end{cases}$ | b) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 2 - t, & t \in \langle 1, 2 \rangle; \end{cases}$ |
| c) $f(t) = \cos t, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle.$ | |

Výsledky

1. a) $\frac{4}{p^3} - \frac{3}{p^2} + \frac{4}{p}, p > 0$; b) $\frac{1}{p-2} + \frac{3}{p+4}, p > 2$; c) $\frac{1}{p^2-1}, p > 1$; d) $\frac{p}{p^2-4}, p > 2$;
e) $\frac{3-2p}{p^2+1}, p > 0$; f) $\frac{4p+6}{p^2+4}, p > 0$; g) $\frac{3}{(p+1)^2} + \frac{4}{(p-3)^3}, p > 3$; h) $\frac{4p}{(p^2+4)^2}, p > 0$;
i) $\frac{p^2-9}{(p^2+9)^2}, p > 0$; j) $\frac{18(p^2-3)}{(p^2+9)^3}, p > 0$; k) $\frac{2p^3-24p}{(p^2+4)^3}, p > 0$; l) $\frac{6}{(p-3)^2+4}, p > 3$;
m) $\frac{2(p+)}{(p+1)^2+9}, p > -1$; n) $\frac{6(p-2)}{((p-2)^2+9)^2}, p > 2$; o) $\frac{(p+3)^2-4}{((p+3)^2+4)^2}, p > -3$.
2. a) $\frac{1}{p}(1 - e^{-2p})$; b) $\frac{1}{p^2} - e^{-2p}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{2}{p}\right)$; c) $\frac{1}{p^2+1}(1 + e^{-\pi p})$; d) $\frac{2}{p^3} - e^{-p}\left(\frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^2}\right)$;
e) $\frac{1}{p}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p})$; f) $\frac{1}{p^2}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p})$.
3. a) $\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1+e^{-\pi p}}$; b) $\frac{1}{p^2} \cdot \frac{(1-e^{-p})^2}{1-e^{-2p}} = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1-e^{-p}}{1+e^{-p}}$; c) $\frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-\pi p}}$.

Vzory v Laplaceově transformaci

1. Najděte předmět (vzor v Laplaceově transformaci) k dané funkci:

a) $\frac{p^2 + 1}{p^3 + 3p^2 + 2p}$;

b) $\frac{1}{p^3 + 6p^2 + 9p}$;

c) $\frac{1}{(p-1)^2(p+2)}$;

d) $\frac{1}{(p-2)^3}$;

e) $\frac{1}{(p+3)^4}$;

f) $\frac{1}{p^2(p^2+1)}$;

g) $\frac{1}{p^2 + 4p + 5}$;

h) $\frac{3p + 4}{p^2 + 2p + 10}$;

i) $\frac{4p - 3}{p^2 - 2p + 5}$;

j) $\frac{4p + 5}{p^2 + 6p + 13}$;

k) $\frac{p + 3}{p^2 - 4p + 20}$;

l) $\frac{2p^3 - p^2 + 1}{p^2 - 3p}$.

2. Najděte předmět (vzor v Laplaceově transformaci) k dané funkci:

a) $\frac{1}{p^2} e^{-p}$;

b) $\frac{1}{p+2} e^{-4p}$;

c) $\frac{p}{p^2 + 9} e^{-\pi p}$.

Výsledky

1. a) $\frac{1}{2} - 2e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t}$; b) $\frac{1}{9} - \left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{9}\right)e^{-3t}$; c) $\frac{1}{9}e^{-2t} + \left(\frac{1}{3}t - \frac{1}{9}\right)e^{-t}$; d) $\frac{1}{2}t^2e^{2t}$;
e) $\frac{1}{6}t^3e^{-3t}$; f) $t - \sin t$; g) $e^{-2t}\sin t$; h) $e^{-t}\left(3\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t\right)$;
i) $e^t\left(4\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)$; j) $e^{-3t}\left(4\cos 2t - \frac{7}{2}\sin 2t\right)$; k) $e^{2t}\left(\cos 4t + \frac{5}{4}\sin 4t\right)$;
l) neexistuje.
2. a) $(t - 1) \cdot H(t - 1)$; b) $e^{8-2t} \cdot H(t - 4)$; c) $-\cos 3t \cdot H(t - \pi)$.

Řešení diferenciálních a integrodiferenciálních rovnic

1. Řešte pomocí Laplaceovy transformace:

a) $x'' + x' - 2x = 0$, $x(0+) = 0$, $x'(0+) = 3$;

b) $x'' - 2x' + 2x = 0$, $x(0+) = 1$, $x'(0+) = 1$;

c) $x'' + 5x' + 6x = 4e^{-t}$, $x(0+) = 0$, $x'(0+) = 0$;

d) $x'' + x = \sin 2t$, $x(0+) = 0$, $x'(0+) = 0$;

e) $x'' + x = \cos t$, $x(0+) = -1$, $x'(0+) = 1$.

2. Řešte pomocí Laplaceovy transformace:

a) $x' = x + y$, $x(0+) = 1$,
 $y' = -2x + 3y$, $y(0+) = 1$;

b) $x' = -y$, $x(0+) = 1$,
 $y' = 2x + 2y$, $y(0+) = 1$;

c) $x' = -x + y + e^t$, $x(0+) = 0$,
 $y' = x - y + e^t$, $y(0+) = 0$;

d) $x' = x - y + 2e^t$, $x(0+) = 0$,
 $y' = -x + y + e^t$, $y(0+) = 3$.

3. Řešte pomocí Laplaceovy transformace:

a) $x' + 6x + 9 \int_0^t x(u) du = 0$, $x(0+) = 1$;

b) $x' + 2x + 5 \int_0^t x(u) du = 0$, $x(0+) = -1$;

c) $x' - 4x + 5 \int_0^t x(u) du = 2e^t$, $x(0+) = 1$;

d) $x' + \int_0^t \cosh(t-u)x(u) du = e^{-t}$, $x(0+) = 0$.

4. Řešte pomocí Laplaceovy transformace:

a) $x' - x = \begin{cases} 2-t, & t \in \langle 0, 2 \rangle, \\ 0, & t \in \langle 2, +\infty \rangle, \end{cases}$ $x(0+) = -1$;

b) $x' + x = \begin{cases} 5 \cos 2t, & t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \\ 0, & t \in \langle \frac{\pi}{2}, +\infty \rangle, \end{cases}$ $x(0+) = 1$;

c) $x'' + 4x = \begin{cases} 4, & t \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle, \\ 8, & t \in \langle \frac{\pi}{4}, +\infty \rangle, \end{cases}$ $x(0+) = 4$, $x'(0+) = 0$;

d) $x'' + 9x = \begin{cases} 8 \sin t, & t \in \langle 0, \pi \rangle, \\ 0, & t \in \langle \pi, +\infty \rangle, \end{cases}$ $x(0+) = 0$, $x'(0+) = 0$.

Výsledky

1. a) $e^t - e^{-2t}$, $t \in \langle 0, +\infty \rangle$;
b) $e^t \cos t$, $t \in \langle 0, +\infty \rangle$;
c) $2e^{-t} - 4e^{-2t} + 2e^{-3t}$, $t \in \langle 0, +\infty \rangle$;
d) $\frac{2}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t$, $t \in \langle 0, +\infty \rangle$;
e) $(\frac{1}{2}t + 1) \sin t - \cos t$, $t \in \langle 0, +\infty \rangle$;
2. a) $x(t) = e^{2t} \cos t$, $y(t) = e^{2t} (\cos t - \sin t)$, $t \in \langle 0, +\infty \rangle$;
b) $x(t) = e^t (\cos t - 2 \sin t)$, $y(t) = e^t (\cos t + 3 \sin t)$, $t \in \langle 0, +\infty \rangle$;
c) $x(t) = e^t - 1$, $y(t) = e^t - 1$, $t \in \langle 0, +\infty \rangle$;
d) $x(t) = e^t - e^{2t}$, $y(t) = 2e^t + e^{2t}$, $t \in \langle 0, +\infty \rangle$.
3. a) $x(t) = (1 - 3t)e^{-3t}$, $t \in \langle 0, +\infty \rangle$;
b) $x(t) = e^{-t} (\frac{1}{2} \sin 2t - \cos 2t)$, $t \in \langle 0, +\infty \rangle$;
c) $x(t) = e^t + 5e^{2t} \sin t$, $t \in \langle 0, +\infty \rangle$;
d) $x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t$, $t \in \langle 0, +\infty \rangle$;
4. a) $x(t) = \begin{cases} t - 1, & t \in \langle 0, 2 \rangle, \\ e^{t-2}, & t \in \langle 2, +\infty \rangle; \end{cases}$
b) $x(t) = \begin{cases} \cos 2t + 2 \sin 2t, & t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \\ -e^{\pi/2} e^{-t}, & t \in \langle \frac{\pi}{2}, +\infty \rangle; \end{cases}$
c) $x(t) = \begin{cases} 3 \cos 2t + 1, & t \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle, \\ 2 + 3 \cos 2t - \sin 2t, & t \in \langle \frac{\pi}{4}, +\infty \rangle; \end{cases}$
d) $x(t) = \begin{cases} \sin t - \frac{1}{3} \sin 3t, & t \in \langle 0, \pi \rangle, \\ 0, & t \in \langle \pi, +\infty \rangle; \end{cases}$

Číselné řady

1. Určete součet:

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n$;

b) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$;

c) $1 - 2 - 5 - \dots - 56$;

d) $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots$;

e) $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \dots$;

f) $1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8} + \dots$.

2. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$;

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k + 3}$;

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$;

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1}$;

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$;

f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-k)^7}{2^k}$;

g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k!}$;

h) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{8^k}$;

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$.

Výsledky

1. a) $\frac{1}{2}n(n+1)$; b) n^2 ; c) -550 ; d) 3 ; e) $\frac{1}{4}$; f) nekonverguje.
2. a) neabsolutně; b) neabsolutně; c) nekonverguje; d) absolutně; e) absolutně;
f) absolutně; g) absolutně; h) nekonverguje; i) absolutně.

Mocninné řady

1. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci mocninné řady:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x-1)^k}{2k+3}$;

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k^2+2} \left(\frac{x-2}{3}\right)^k$;

e) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} \left(2-\frac{x}{3}\right)^k$;

g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k^2} (x-2)^k$;

i) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k^2} (x+2)^k$;

k) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{k+2}} (x-1)^k$;

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3-2x)^k}{\sqrt{k}}$;

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \left(\frac{x}{2}+1\right)^k$;

f) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+2} (x-1)^k$;

h) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^4} (x+1)^k$;

j) $\sum_{k=0}^{\infty} 3k^2 \left(\frac{x}{2}-1\right)^k$;

l) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{1+3^{-k}}$.

Výsledky

1. a) poloměr konvergence $r = \frac{1}{3}$, absolutně na $(0, \frac{2}{3})$, neabsolutně v 0 ;
- b) poloměr konvergence $r = \frac{1}{2}$, absolutně na $(1, 2)$, neabsolutně v 2 ;
- c) poloměr konvergence $r = 3$, absolutně na $(-1, 5)$, neabsolutně v -1 ;
- d) poloměr konvergence $r = 2$, absolutně na $(-4, 0)$, neabsolutně v -4 ;
- e) poloměr konvergence $r = 3$, absolutně na $(3, 9)$, neabsolutně v 9 ;
- f) poloměr konvergence $r = \frac{1}{3}$, absolutně na $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$, neabsolutně v $\frac{2}{3}$;
- g) poloměr konvergence $r = \frac{1}{4}$, absolutně na $(\frac{7}{4}, \frac{9}{4})$, neabsolutně nikde;
- h) poloměr konvergence $r = 0$, absolutně na $\{-1\}$, neabsolutně nikde;
- i) poloměr konvergence $r = +\infty$, absolutně na \mathbb{R} , neabsolutně nikde;
- j) poloměr konvergence $r = 2$, absolutně na $(0, 4)$, neabsolutně nikde;
- k) poloměr konvergence $r = 3$, absolutně na $(-2, 4)$, neabsolutně nikde;
- l) poloměr konvergence $r = 1$, absolutně na $(1, 3)$, neabsolutně nikde.

Taylorovy řady

1. Najděte Taylorovu řadu funkce f v bodě x_0 a určete interval, na kterém k této funkci konverguje:

a) $f(x) = (x + 2)e^{3x}$, $x_0 = 1$; b) $f(x) = (2x + 3)e^{-x}$, $x_0 = -1$;
c) $f(x) = \frac{x - \pi}{3} \sin 3x + 2x$, $x_0 = \pi$; d) $f(x) = (2x - 1) \sin \pi x$, $x_0 = \frac{1}{2}$;
e) $f(x) = (x - 1) \cos \pi x + x$, $x_0 = 1$; f) $f(x) = \cos 2x - x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;
g) $f(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$, $x_0 = 2$; h) $f(x) = \frac{2x + 3}{x + 2}$, $x_0 = -1$;
i) $f(x) = \frac{3}{(x - 2)^2}$, $x_0 = -1$; j) $f(x) = \frac{2}{(x + 4)^2}$, $x_0 = -2$;
k) $f(x) = \frac{1}{(x - 1)^3}$, $x_0 = -1$.

Výsledky

1.

$$\text{a) } 3e^3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^3(k+9)3^{k-1}}{k!} (x-1)^k, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\text{b) } e + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e(2k-1)(-1)^{k-1}}{k!} (x+1)^k, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\text{c) } 2\pi + 2(x-\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 9^{k-1}}{(2k-2)!} (x-\pi)^{2k}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\text{d) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k \pi^{2k}}{(2k)!} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\text{e) } 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} (x-1)^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\text{f) } \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\text{g) } \frac{5}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-7(-1)^k}{4^{k+1}} (x-2)^k, \quad x \in (-2, 6);$$

$$\text{h) } 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (x+1)^k, \quad x \in (-2, 0);$$

$$\text{i) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{3^{k+1}} (x+1)^k, \quad x \in (-4, 2);$$

$$\text{j) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(-1)^k}{2^{k+1}} (x+2)^k, \quad x \in (-4, 0);$$

$$\text{k) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(k+1)(k+2)}{2^{k+4}} (x+1)^k, \quad x \in (-3, 1).$$

Fourierovy řady

1. Nalezněte Fourierovu řadu funkce:

a) $f(t) = t, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle;$

b) $f(t) = \begin{cases} 2, & t \in \langle 0, 2 \rangle, \\ -3, & t \in \langle 2, 4 \rangle; \end{cases}$

c) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 1, & t \in \langle 1, 2 \rangle. \end{cases}$

2. Nalezněte kosinovou Fourierovu řadu funkce:

a) $f(t) = t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle;$

b) $f(t) = t^2, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle.$

3. Nalezněte sinovou Fourierovu řadu funkce:

a) $f(t) = 1 - t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle;$

b) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 1, & t \in \langle 1, 2 \rangle. \end{cases}$

Výsledky

1.

$$\text{a) } \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k} \sin 2kt;$$

$$\text{b) } -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{10}{(2k-1)\pi} \sin \frac{(2k-1)\pi t}{2};$$

$$\text{c) } \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k - 1}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos k\pi t - \frac{1}{k\pi} \sin k\pi t \right).$$

2.

$$\text{a) } \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos(2k-1)\pi t;$$

$$\text{b) } \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2 \pi^2} \cos kt.$$

3.

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin k\pi t;$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi}{2} - \frac{2(-1)^k}{k\pi} \right) \sin \frac{k\pi t}{2}.$$