Diferenciální rovnice

(*Obyčejná*) *diferenciální rovnice řádu n*:

$$\boxed{F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0}$$

Řešení na intervalu I: funkce $x\colon\ I \to \mathbb{R}$ taková, že pro každé $t \in I$ je $F\big(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)\big) = 0$.

Maximální řešení: neexistuje řešení na větším intervalu.

Cauchyova úloha: navíc *počáteční podmínky*

$$x(t_0) = x_{0,0}, \quad x'(t_0) = x_{0,1}, \quad \dots \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{0,n-1}$$

Cauchyova úloha je *jednoznačně řešitelná*, jestliže každá dvě řešení splývají na některém okolí t_0.

Věta. *Je-li f spojitá funkce na $I \times J$ (I, J otevřené intervaly), $t_0 \in I$, $x_0 \in J$, pak Cauchyova úloha $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ má řešení na intervalu $I' \subset I$. Je-li navíc $\frac{\partial f}{\partial y}$ lokálně omezená na $I \times J$, pak je Cauchyova úloha jednoznačně řešitelná.*

Poznámky.
1) $f(t, x) = g(t)\, h(x)$: stačí spojitost g, h, h'.
2) $f(t, x) = g(t)\, x + h(t)$: stačí spojitost g, h.

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

$$\boxed{x' = a(t)\, x + b(t)}$$

Předpoklady: a, b spojité na intervalu I.
Cauchyova úloha má pak právě jedno řešení na I.

Přidružená homogenní rovnice: $x' = a(t)\, x$.

Obecné řešení: $x(t) = \tilde{x}(t) + \hat{x}(t)$, kde $\tilde{x}$ je obecné řešení přidružené homogenní rovnice a $\hat{x}$ je jedno (*partikulární*) řešení původní rovnice.

Homogenní LDR 1. řádu

$$\boxed{x' = a(t)\, x}$$

Řešíme separací proměnných:

$$x(t) = c\,\mathrm{e}^{A(t)}, \quad t \in I, \qquad (c \in \mathbb{R}),$$

A je primitivní funkce k a.

Separovatelné diferenciální rovnice 1. řádu

$$\boxed{x' = g(t)\, h(x)}$$

Předpoklady: g spojitá na intervalu I, h spojitá na intervalu J.

1) $h(x_1) = 0 \dots\ x(t) = x_1$, $t \in I$ je *stacionární* řešení
2) $h(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} x'(t) &= g(t)\, h\big(x(t)\big) \\ \int \frac{x'(t)}{h\big(x(t)\big)}\,\mathrm{d}t &= \int g(t)\,\mathrm{d}t \\ \int \frac{\mathrm{d}x}{h(x)} &= \int g(t)\,\mathrm{d}t \ \ (+\, c) \\ x(t) &= \dots \end{aligned}$$

Cauchyova úloha

Dopočítat c nebo

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}u}{h(u)} = \int_{t_0}^{t} g(u)\,\mathrm{d}u$$

Obecný postup:
1) Maximální intervaly spojitosti g (I).
2) Stacionární řešení $x(t) = x_1$, $t \in I$ pro $h(x_1) = 0$.
3) Maximální intervaly spojitosti a nenulovosti h (J).
4) Pro $(t_0, x_0) \in I \times J$, existuje řešení uvnitř $I \times J$.

Nehomogenní LDR 1. řádu

$$\boxed{x' = a(t)\, x + b(t)}$$

Metoda *variace konstanty*: hledáme partikulární řešení ve tvaru obecného řešení přidružené homogenní rovnice, ve kterém konstantu nahradíme funkcí.

$$\hat{x}(t) = c(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}$$

Dosadíme do rovnice a spočítáme $c(t)$:

$$\begin{aligned} c'(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} + c(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} a(t) &= a(t)\, c(t)\,\mathrm{e}^{A(t)} + b(t) \\ c'(t) &= b(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)} \\ c(t) &= \int b(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)} \\ \hat{x}(t) &= \mathrm{e}^{A(t)} \cdot \int b(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)} \end{aligned}$$

Cauchyova úloha pro LDR 1. řádu

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= a(t)\, x + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}}$$

1) Obecné řešení přidružené homogenní rovnice separací proměnných.
2) Partikulární řešení metodou variace konstanty, obecné řešení dané LDR.
3) Určení konstanty dosazením počáteční podmínky.

Lineární diferenciální rovnice

$$\boxed{x^{(n)} + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\, x' + a_0(t)\, x = b(t)}$$

Předpoklady: $a_{n-1}, \ldots, a_0, b$ spojité na intervalu $I \ni t_0$.

Věta. *Cauchyova úloha má právě jedno řešení na I.*

Homogenní LDR ($b(t) = 0$ na I)

Věta. *Množina řešení homogenní LDR řádu n tvoří lineární prostor dimenze n. Její bázi nazýváme* fundamentální systém.

Důkaz. $D\colon x \mapsto x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0$ je lineární zobrazení, množina řešení je jeho jádro, tj. lineární prostor.

$x(t_0)$	$x'(t_0)$	$\ldots$	$x^{(n-1)}(t_0)$		řešení C. úlohy
1	0	$\ldots$	0	$\rightarrow$	$x_0(t)$
0	1	$\ldots$	0	$\rightarrow$	$x_1(t)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\ldots$	1	$\rightarrow$	$x_{n-1}(t)$
$x_{0,0}$	$x_{0,1}$	$\ldots$	$x_{0,n-1}$	$\rightarrow$	$\sum_{i=0}^{n-1} x_{0,i} x_i(t)$

$\Rightarrow$ lineární obal $\{x_0(t), \ldots, x_{n-1}(t)\}$ je celý prostor řešení

$$A_0\, x_0(t) + \cdots + A_{n-1}\, x_{n-1}(t) = 0 \xrightarrow{t=t_0} A_0 = 0$$
$${}'\colon\ A_0\, x_0'(t) + \cdots + A_{n-1}\, x_{n-1}'(t) = 0 \xrightarrow{t=t_0} A_1 = 0 \quad \ldots$$

$\Rightarrow$ funkce $x_0(t), \ldots, x_{n-1}(t)$ jsou lineárně nezávislé

Věta. *Nechť $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ jsou řešení jedné homogenní LDR řádu n na intervalu I. Tyto funkce jsou lineárně nezávislé na I právě tehdy, když pro každé $t \in I$ je následující determinant* (Wronského, Wronskián) *nenulový:*

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \ldots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Důkaz. 1) Jsou-li funkce závislé, pak některá x_i je lineární kombinací ostatních, x_i' je stejnou kombinací derivací ostatních, $\ldots$ i-tý sloupec determinantu je kombinací ostatních, tj. determinant je nulový pro každé $t \in I$.
2) Je-li determinant nulový v t_0, pak homogenní soustava rovnic s touto maticí má netriviální řešení $(A_1, \ldots, A_n)$, $A_1\, x_1(t) + \cdots + A_n\, x_n(t)$ je řešení s nulovými počátečními podmínkami v t_0, tj. nulové, tj. dané funkce jsou závislé.

Poznámka. Věta neplatí, pokud funkce nejsou řešením jedné LDR.

Nehomogenní LDR

Věta. 1) *Je-li x řešení LDR a $\tilde{x}$ řešení přidružené homogenní rovnice, pak $x + \tilde{x}$ je řešení dané LDR.*
2) *Jsou-li x_1, x_2 řešení LDR, pak $x_1 - x_2$ je řešení přidružené homogenní rovnice.*
3) *Jsou-li x_1, x_2 řešení pro pravé strany b_1, b_2, pak $x_1 + x_2$ je řešení pro pravou stranu $b_1 + b_2$* (princip superpozice).

LDR s konstantními koeficienty

$$\boxed{a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = b(t)}$$

Předpoklady: $a_n \neq 0$, b je spojitá na intervalu.

Homogenní LDR s konstantními koeficienty

Charakteristická rovnice:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0\,.$$

Věta. 1) *Je-li λ reálný kořen charakteristické rovnice násobnosti k, pak funkce*

$$\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad t\,\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad \ldots, \quad t^{k-1}\,\mathrm{e}^{\lambda t}$$

jsou řešením příslušné homogenní LDR.
2) *Jsou-li $\alpha \pm \beta\,\mathrm{j}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ imaginární kořeny charakteristické rovnice násobnosti k, pak funkce*

$$\begin{array}{llll} \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, & t\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, & \ldots, & t^{k-1}\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, \\ \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t, & t\,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t, & \ldots, & t^{k-1}\,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t, \end{array}$$

jsou řešením příslušné homogenní LDR.
3) *Všechna tato řešení tvoří fundamentální systém řešení.*

Nehomogenní LDR s konstantními koeficienty

Hledáme partikulární řešení.

1) *Variace konstant*:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= c_1 x_1(t) + \cdots + c_n x_n(t) \\ \hat{x}(t) &= c_1(t)\, x_1(t) + \cdots + c_n(t)\, x_n(t) \\ \hat{x}'(t) &= c_1(t)\, x_1'(t) + \cdots + c_n(t)\, x_n'(t) \\ &\quad + \underbrace{c_1'(t)\, x_1(t) + \cdots + c_n'(t)\, x_n(t)}_{=0} \\ \hat{x}''(t) &= c_1(t)\, x_1''(t) + \cdots + c_n(t)\, x_n''(t) \\ &\quad + \underbrace{c_1'(t)\, x_1'(t) + \cdots + c_n'(t)\, x_n'(t)}_{=0} \\ &\ \vdots \\ \hat{x}^{(n)}(t) &= c_1(t)\, x_1^{(n)}(t) + \cdots + c_n(t)\, x_n^{(n)}(t) \\ &\quad + c_1'(t)\, x_1^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n'(t)\, x_n^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

2) *Metoda odhadu* pro kvazipolynomiální pravou stranu: Jsou-li P, Q polynomy stupně nejvýše m, $(\alpha + \beta\,\mathrm{j})$ k-násobný kořen charakteristické rovnice,

$$f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\big(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t\big),$$

pak existuje partikulární řešení ve tvaru

$$\hat{x}(t) = t^k\,\mathrm{e}^{\alpha t}\big(\hat{P}(t)\cos\beta t + \hat{Q}(t)\sin\beta t\big),$$

kde $\hat{P}, \hat{Q}$ jsou polynomy stupně nejvýše m.

Soustavy LDR s konstantními koeficienty

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots + a_{1n}\,x_n + b_1(t)\\
x_2' &= a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \dots + a_{2n}\,x_n + b_2(t)\\
&\vdots\\
x_n' &= a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \dots + a_{nn}\,x_n + b_n(t)
\end{aligned}
$$

předpoklady: $b_1(t), \dots, b_n(t)$ spojité na intervalu I
počáteční podmínky ($t_0 \in I$):

$$x_1(t_0) = x_{01}\,, \quad x_2(t_0) = x_{02}\,, \quad \dots\,, \quad x_n(t_0) = x_{0n}$$

maticově (vektory sloupcově): $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$, $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$
homogenní soustava: $\boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{o}$

Poznámka. Obecněji mohou být diferenciální rovnice i vyšších řádů, ty se ale dají přepsat jako soustava lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu. Například soustavu

$$
\begin{aligned}
x_1' &= 2x_1 + x_2 \qquad + t\,, && x_1(0) = 0\,,\\
x_2'' &= \ \ x_1 + x_2 - x_2'\,, && x_2(0) = 0\,, \quad x_2'(0) = -1\,,
\end{aligned}
$$

lze substitucí $x_2' = x_3$ převést na tvar

$$
\begin{aligned}
x_1' &= 2x_1 + x_2 \qquad + t\,, && x_1(0) = 0\,,\\
x_2' &= \qquad\qquad x_3\,, && x_2(0) = 0\,,\\
x_3' &= \ \ x_1 + x_2 - x_3\,, && x_3(0) = -1\,.
\end{aligned}
$$

Věta. *Soustava LDR má právě jedno řešení pro každou počáteční podmínku.*

Věta. 1) *Množina řešení homogenní soustavy n LDR tvoří lineární prostor dimenze n. Vektorové funkce $\boldsymbol{x}_1(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t), \dots, \boldsymbol{x}_n(t)$ tvoří fundamentální systém (bázi) řešení soustavy právě tehdy, když determinant fundamentální matice soustavy*

$$
\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t)\\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}
$$

je nenulový pro každé $t \in I$.
2) *Obecné řešení soustavy LDR lze vyjádřit ve tvaru $\boldsymbol{x}(t) = \hat{\boldsymbol{x}}(t) + \tilde{\boldsymbol{x}}(t)$, kde $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ je kterékoliv (partikulární) řešení dané soustavy a $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ je obecné řešení přidružené homogenní soustavy.*
3) *Řešení soustavy LDR pro součet pravých stran je součtem řešení pro jednotlivé pravé strany* (princip superpozice).

Poznámka. LDR řádu n s počátečními podmínkami

$$x^{(n)} + a_{n-1}\,x^{(n-1)} + \dots + a_1\,x' + a_0\,x = b(t)$$
$$x(t_0) = x_{0,0}\,, \quad x'(t_0) = x_{0,1}\,, \quad \dots\,, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{0,n-1}$$

můžeme po označení $x = x_1$, $x' = x_2$, $\dots$, $x^{(n-1)} = x_n$ převést na soustavu s počátečními podmínkami

$$
\begin{aligned}
x_1' &= \qquad x_2\\
x_2' &= \qquad\qquad x_3\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \ddots\\
x_n' &= -a_0x_1 - a_1x_2 - a_3x_3 - \dots - a_{n-1}x_n + b(t)
\end{aligned}
$$

$$x_1(t_0) = x_{0,0}\,, \quad x_2(t_0) = x_{0,1}\,, \quad \dots\,, \quad x_n(t_0) = x_{0,n-1}$$

Poznámka. Obráceně můžeme soustavu převést na jednu LDR. Tomuto postupu se říká *eliminační metoda.*

Příklad.

$$
\begin{aligned}
x_1' &= 2x_1 + \ \ x_2 - 3\,, && x_1(0) = 5\,,\\
x_2' &= \ \ x_1 + 2x_2 + 3t - 4\,, && x_2(0) = 1\,.
\end{aligned}
$$

Z první rovnice vyjádříme $x_2 = x_1' - 2x_1 + 3$ a dosadíme do druhé. Dostaneme rovnici $x_1'' - 4x_1' + 3x_1 = 3t + 2$ s řešením $x_1(t) = t + 2 + c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,\mathrm{e}^{3t}$. Dopočítáme $x_2(t) = x_1'(t) - 2x_1(t) + 3 = -2t - c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,\mathrm{e}^{3t}$. Dosazením počátečních podmínek určíme koeficienty c_1, c_2. Výsledek je

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + 2 + \mathrm{e}^t + 2\,\mathrm{e}^{3t}\\ -2t - \mathrm{e}^t + 2\,\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Homogenní soustavy LDR s konstantními koeficienty

$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{v}\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ je řešení $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ pro $(\boldsymbol{A} - \lambda I)\,\boldsymbol{v} = 0$

Definice. *Charakteristická rovnice* soustavy LDR je rovnice $\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$. Řešení charakteristické rovnice soustavy se nazývají *vlastní čísla.* Pro každé vlastní číslo λ nazýváme rovnici $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ *charakteristickou soustavou*, její nenulová řešení nazýváme *vlastní vektory.*

Poznámka. Řešení ve tvaru $\boldsymbol{v}\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ jsou nezávislá pro různá vlastní čísla i pro nezávislé vlastní vektory. Hledáme tedy vlastní čísla a ke každému tolik lineárně nezávislých vlastních vektorů, jako je násobnost příslušného vlastního čísla.

Příklad. Řešme

$$
\begin{aligned}
x_1' &= 2x_1 + \ \ x_2\,, && x_1(0) = 3\,,\\
x_2' &= \ \ x_1 + 2x_2\,, && x_2(0) = 1\,.
\end{aligned}
$$

Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, vlastní vektory jsou například $(1, -1)^{\mathrm{T}}$ a $(1, 1)^{\mathrm{T}}$, fundamentální matice soustavy a obecné řešení je

$$\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{3t}\\ -\,\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{X}(t)\,\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,\mathrm{e}^{3t}\\ -c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}.$$

Dosazením počátečních podmínek ($\boldsymbol{X}(t_0)\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}_0$) dostaneme

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t + 2\,\mathrm{e}^{3t}\\ -\,\mathrm{e}^t + 2\,\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Pro dvojice komplexně sdružených imaginárních vlastních čísel bereme jedno z nich a uvažujeme reálné a imaginární části komplexních funkcí ($\mathrm{e}^{(\alpha+\beta\mathrm{j})t} = \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t + \mathrm{j}\sin\beta t)$).

Příklad. Řešme

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - 3x_2\,, \\ x_2' &= 3x_1 + x_2\,. \end{aligned}$$

Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$, vlastní čísla jsou $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3\mathrm{j}$, stačí uvažovat $\lambda_1 = 1+3\mathrm{j}$, vlastní vektor je například $(1, -\mathrm{j})^{\mathrm{T}}$. Příslušné řešení soustavy diferenciálních rovnic uvažujeme v komplexním oboru:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{j} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+3\mathrm{j})\,t} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t\cos 3t + \mathrm{j}\,\mathrm{e}^t \sin 3t \\ -\mathrm{j}\,\mathrm{e}^t\cos 3t + \mathrm{e}^t \sin 3t \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice řešení obsahuje za jednotlivé sloupce reálnou a imaginární část této vektorové funkce. Obecné řešení dostaneme jejich lineárními kombinacemi ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}(t) &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t\cos 3t & \mathrm{e}^t\sin 3t \\ \mathrm{e}^t\sin 3t & -\mathrm{e}^t\cos 3t \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{X}(t)\cdot\boldsymbol{c} &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t(c_1\cos 3t + c_2 \sin 3t) \\ \mathrm{e}^t(c_1 \sin 3t - c_2\cos 3t) \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Pokud má prostor řešení charakteristické soustavy dimenzi menší než násobnost vlastního čísla λ, uvažujeme kromě funkce $\mathrm{e}^{\lambda t}$ i funkce $t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$, $t^2\,\mathrm{e}^{\lambda t}$, …

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} \quad & \text{má nenulové řešení } \boldsymbol{v}_1\,, \\ & \text{dostaneme funkci } \boldsymbol{v}_1\,\mathrm{e}^{\lambda t}\,, \\ (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 \quad & \text{má řešení } \boldsymbol{v}_2\,, \\ & \text{dostaneme funkci } (\boldsymbol{v}_1\,t + \boldsymbol{v}_2)\,\mathrm{e}^{\lambda t}\,, \\ (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 \quad & \text{má řešení } \boldsymbol{v}_3\,, \\ & \text{dostaneme funkci } \big(\boldsymbol{v}_1\,\tfrac{1}{2}\,t^2 + \boldsymbol{v}_2\,t + \boldsymbol{v}_3\big)\,\mathrm{e}^{\lambda t}\,, \\ & \vdots \end{aligned}$$

(Polynom v závorce integrujeme a přidáváme další dopočtenou vektorovou konstantu.)

Příklad. Řešme

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2\,, \\ x_2' &= -x_1 + 4x_2\,. \end{aligned}$$

Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, vlastní čísla jsou $\lambda_{1,2} = 3$, vlastní vektor je například $\boldsymbol{v}_1 = (1,1)^{\mathrm{T}}$. Další lineárně nezávislé vektory neexistují, řešíme tedy $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1$, která má řešení například $\boldsymbol{v}_2 = (0,1)^{\mathrm{T}}$. Fundamentální matice řešení a obecné řešení jsou ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}(t) &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} & t\,\mathrm{e}^{3t} \\ \mathrm{e}^{3t} & (t+1)\,\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{X}(t)\cdot\boldsymbol{c} &= \begin{pmatrix} (c_2 t + c_1)\,\mathrm{e}^{3t} \\ (c_2 t + c_1 + c_2)\,\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Nehomogenní soustava LDR s konstantními koeficienty

Metoda *variace konstant*: Je-li $\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{X}(t)\cdot\boldsymbol{c}$ obecné řešení přidružené homogenní soustavy, můžeme partikulární řešení hledat ve tvaru $\hat{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{X}(t)\cdot\boldsymbol{c}(t)$, po dosazení dostaneme $\boldsymbol{c}'(t) = \boldsymbol{X}^{-1}(t)\,\boldsymbol{b}(t)$, tedy

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{X}(t)\int \boldsymbol{X}^{-1}(u)\,\boldsymbol{b}(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

pro počáteční podmínku $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ dostaneme

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{X}(t)\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{X}^{-1}(u)\,\boldsymbol{b}(u)\,\mathrm{d}u + \boldsymbol{X}(t)\,\boldsymbol{X}^{-1}(t_0)\,\boldsymbol{x}_0\,.$$

Věta (odhad partikulárního řešení)**.** *Pro soustavu*

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t + \boldsymbol{q}(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\,,$$

ve které $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ jsou vektorové polynomy stupně nejvýše m (každá složka je polynom stupně nejvýše m) a číslo $\alpha + \beta\mathrm{j}$ (číslo pravé strany) *je k-násobný kořen charakteristické rovnice přidružené homogenní soustavy diferenciálních rovnic, existuje partikulární řešení ve tvaru*

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t) = \hat{\boldsymbol{p}}(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t + \hat{\boldsymbol{q}}(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\,,$$

kde $\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{\boldsymbol{q}}$ jsou vektorové polynomy stupně nejvýše $m + k$.

Laplaceova transformace

Definice. *Laplaceovým obrazem* funkce f definované na $\langle 0, \infty)$ je funkce

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\,,$$

pokud integrál konverguje pro alespoň jedno $p \in \mathbb{R}$.

Značení: $\mathscr{L} : f(t) \mapsto F(p)$, $\mathscr{L}\{f\} = F$, $f \triangleq F$.

Příklady. e^{t^2} nemá Laplaceův obraz

$$\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{at}\} = \frac{1}{p-a}\,, \quad p > a$$

$$\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{p}\,, \quad p > 0$$

Poznámky. 1) F se obvykle uvažuje jako funkce komplexní proměnné pro $\operatorname{Re} p > p_f$.
2) Někdy se uvažují funkce $f(t)$ definované na $\mathbb{R}$, které jsou nulové pro $t < 0$ – místo $\sin t$ na $\langle 0, \infty)$ se píše $\sin t\cdot\mathrm{H}(t)$, kde $\mathrm{H}(t)$ je tzv. *Heavisideova funkce* (někdy se bere $H(0) = \frac{1}{2}$):

$$\mathrm{H}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Definice. Funkce $f(t)$ definovaná na $\langle 0,\infty)$ je *předmět standardního typu* (*f patří do třídy* $\mathscr{L}_0$), jestliže:
1) f je po částech spojitá,
2) f je *exponenciálního řádu* (α), tj. existují čísla $M,\alpha\in\mathbb{R}$:

$$|f(t)|\le M\,\mathrm{e}^{\alpha t},\quad t\in\langle 0,\infty)\,.$$

Věta. *Nechť f je předmět standardního typu exponenciálního řádu α. Pak Laplaceův obraz funkce f je definován na (α,∞) a $\lim_{p\to\infty}F(p)=0$.*

Důkaz. $\left|\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\right|\le\int_0^\infty|f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}|\,\mathrm{d}t\le$
$\le\int_0^\infty M\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty M\,\mathrm{e}^{-(p-\alpha)t}\,\mathrm{d}t=$
$=\left[-\frac{M}{p-\alpha}\,\mathrm{e}^{-(p-\alpha)t}\right]_0^\infty=\frac{M}{p-\alpha}$ pro $p>\alpha$.

Příklady.

$$\mathscr{L}\{\sin t\}=\frac{1}{p^2+1}\,,\quad p>0$$
$$\mathscr{L}\{\cos t\}=\frac{p}{p^2+1}\,,\quad p>0$$

Věta (o substituci [posunu] v obrazu). *Je-li $f\in\mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $F=\mathscr{L}\{f\}$, $a\in\mathbb{R}$, pak*

$$\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{at}f(t)\}=F(p-a)\,,\quad p>\alpha+a\,.$$

Důkaz. $|\mathrm{e}^{at}f(t)|\le\mathrm{e}^{at}M\,\mathrm{e}^{\alpha t}=M\,\mathrm{e}^{(\alpha+a)t}$
$\int_0^\infty\mathrm{e}^{at}f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{(a-p)t}\,\mathrm{d}t=F(p-a)$

Příklad. $\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{at}\sin t\}=\frac{1}{(p-a)^2+1}$, $p>a$

Věta (o změně měřítka). *Je-li $f\in\mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $F=\mathscr{L}\{f\}$, $a>0$, pak*

$$\mathscr{L}\{f(at)\}=\frac{1}{a}\,F\left(\frac{p}{a}\right)\,,\quad p>a\cdot\alpha\,.$$

Důkaz. $|f(at)|\le M\,\mathrm{e}^{\alpha(at)}=M\,\mathrm{e}^{(a\alpha)t}$
$\int_0^\infty f(at)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=\left|\begin{array}{c}at=u\\ a\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}u\end{array}\right|=\frac{1}{a}\int_0^\infty f(u)\,\mathrm{e}^{-(p/a)u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{a}\,F\left(\frac{1}{a}\right)$

Příklady.

$$\mathscr{L}\{\sin\omega t\}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\,,\quad p>0$$
$$\mathscr{L}\{\cos\omega t\}=\frac{p}{p^2+\omega^2}\,,\quad p>0$$

Věta (o linearitě). *Jsou-li $f,g\in\mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $a,b\in\mathbb{R}$, pak*

$$\mathscr{L}\{af+bg\}=a\,\mathscr{L}\{f\}+b\,\mathscr{L}\{g\}\,,\quad(p>\alpha)\,.$$

Důkaz. Přímý důsledek linearity integrálu.

Věta (o derivaci obrazu). *Je-li $f\in\mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $F=\mathscr{L}\{f\}$, pak*

$$\mathscr{L}\{t\cdot f(t)\}=-F'(p)\,,\quad p>\alpha\,.$$

Důkaz (náznak). $F'(p)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=$
$=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\right)\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty f(t)\,(-t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=$
$=-\int_0^\infty\big(t\,f(t)\big)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=-\mathscr{L}\{t\,f(t)\}$

Příklad.

$$\mathscr{L}\{t^n\}=\frac{n!}{p^{n+1}}\,,\quad p>0\,.$$

Věta (o integraci obrazu). *Je-li $f\in\mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $F=\mathscr{L}\{f\}$ a existuje-li vlastní $\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}$, pak*

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_p^\infty F(q)\,\mathrm{d}q\,,\quad p>\alpha\,.$$

Poznámka. $\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=-\int F(p)$, integrační konstanta se určí z podmínky $\lim_{p\to\infty}F(p)=0$.

Zpětná Laplaceova transformace

Věta. *Jsou-li $f_1,f_2\in\mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $\mathscr{L}\{f_1\}=\mathscr{L}\{f_2\}$ na (α,∞), pak $f_1(t)=f_2(t)$ na $\langle 0,\infty)$ s výjimkou nejvýše spočetně mnoha izolovaných bodů. Speciálně $f_1=f_2$, pokud jsou obě funkce spojité zprava.*

Věta. *Racionální funkce je Laplaceovým obrazem funkce třídy $\mathscr{L}_0$ právě tehdy, když je ryze lomená. Pak je obrazem na intervalu (α,∞), kde α je největší reálná část kořenů jmenovatele.*

Důkaz. $\Rightarrow$: $\lim_{p\to\infty}F(p)=0$
$\Leftarrow$: rozklad na součet parciálních zlomků, linearita

$$\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{at}\}=\frac{1}{p-a}\,,\qquad\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-a}\right\}=\mathrm{e}^{at}$$
$$\mathscr{L}\{t^n\,\mathrm{e}^{at}\}=\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}\,,\quad\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-a)^n}\right\}=\frac{t^{n-1}\,\mathrm{e}^{at}}{(n-1)!}$$

pro kvadratické členy ve jmenovateli:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{p+C}{(p^2+bp+c)^n}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(p+\frac{b}{2})+(C-\frac{b}{2})}{[(p+\frac{b}{2})^2+c-\frac{1}{4}\,b^2]^n}\right\}$$
$$=\mathrm{e}^{-\frac{b}{2}t}\Bigg[\underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2+\omega^2)^n}\right\}}_{f_n(t)}+\frac{2C-b}{2}\underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+\omega^2)^n}\right\}}_{g_n(t)}\Bigg]$$

$f_1(t)=\cos\omega t\,,\quad f_{n+1}(t)=\frac{1}{2n}\,t\,g_n(t)$
$g_1(t)=\frac{1}{\omega}\sin\omega t\,,\quad g_{n+1}(t)=\frac{1}{2n\omega^2}\,[(2n-1)\,g_n(t)-t\,g_n'(t)]$

Diferenciální a integrálně diferenciální rovnice

Zobrazíme Laplaceovou transformací, vyřešíme algebraickou rovnici, provedeme zpětnou transformaci.

Věta (o obrazu derivace). *Je-li $f' \in \mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $F = \mathscr{L}\{f\}$ a $f(0+) = \lim_{t\to 0+} f(t)$, pak*

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = p \cdot F(p) - f(0+) \,, \quad (p > \max\{\alpha, 0\}) \,.$$

Důkaz. $\int_0^\infty f'(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} u = \mathrm{e}^{-pt} & v' = f'(t) \\ u' = -p\,\mathrm{e}^{-pt} & v = f(t) \end{vmatrix} =$
$= \big[f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\big]_0^\infty + \int_0^\infty p\,f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = -f(0+) + p \cdot F(p)$

Důsledek.

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}\} = p^n\,\mathscr{L}\{f\} - \\ - p^{n-1} f(0+) - \cdots - p\,f^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+)$$

Poznámka. Pro LDR s konstantními koeficienty (a jejich soustavy) s kvazipolynomiální pravou stranu jsou řešeními kvazipolynomy, můžeme tedy použít Laplaceovu transformaci.

Věta (o obrazu integrálu). *Je-li $f \in \mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $F = \mathscr{L}\{f\}$, pak*

$$\mathscr{L}\Big\{\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\Big\} = \frac{F(p)}{p} \,, \quad (p > \max\{\alpha, 0\}) \,.$$

Důkaz. $g(t) = \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$, $g(0+) = 0$
$F(p) = \mathscr{L}\{g'(t)\} = p\,\mathscr{L}\{g(t)\} - g(0+) = p\,\mathscr{L}\{g(t)\}$

Poznámka. Rovnici $D(x) + \int_0^t x(u)\,\mathrm{d}u = f(t)$ lze substitucí $y(t) = \int_0^t x(u)\,\mathrm{d}u$ převést na rovnici $D(y') + y = f(t)$ s (další) počáteční podmínkou $y(0) = 0$. Je-li D lineární diferenciální operátor s konstantními koeficienty a f kvazipolynom, pak řešením pro y je kvazipolynom, jehož derivací je opět kvazipolynom vyhovující původní rovnici. Můžeme tedy použít Laplaceovu transformaci.

Definice. *Konvoluce* funkcí $f, g \in \mathscr{L}_0$ je funkce

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)\,g(u)\,\mathrm{d}u \,, \qquad t \in \langle 0, +\infty) \,.$$

Vlastnosti:
1) komutativita: $f * g = g * f$
2) asociativita: $(f * g) * h = f * (g * h)$
3) distributivita ke sčítání: $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

Věta (o obrazu konvoluce). *Jsou-li $f, g \in \mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $F = \mathscr{L}\{f\}$, $G = \mathscr{L}\{g\}$, pak*

$$\mathscr{L}\{(f * g)(t)\} = F(p) \cdot G(p) \,, \quad p > \alpha \,.$$

Poznámky.
1) $\mathscr{L}^{-1}\{F(p) \cdot G(p)\} = (f * g)(t)$.
2) $(\mathrm{H} * f)(t) = \int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t$, tj. věta o obrazu integrálu je zvláštním případem věty o obrazu konvoluce.

Věta (o translaci). *Je-li $f \in \mathscr{L}_0$ exponenciálního řádu α, $a \geq 0$, pak*

$$\mathscr{L}\{f(t)\,\mathrm{H}(t-a)\} = \mathrm{e}^{-ap}\,\mathscr{L}\{f(t+a)\} \,, \quad p > \alpha$$
$$\mathscr{L}\{f(t-a)\,\mathrm{H}(t-a)\} = \mathrm{e}^{-ap}\,\mathscr{L}\{f(t)\} \,, \quad p > \alpha$$

Důkaz. $\mathscr{L}\{f(t-b)\,\mathrm{H}(t-a)\} =$
$= \int_0^\infty f(t-b)\,\mathrm{H}(t-a)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_a^\infty f(t-b)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \overset{(t-a=u)}{=}$
$= \int_0^\infty f(u+a-b)\,\mathrm{e}^{-p(u+a)}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-ap}\,\mathscr{L}\{f(t+a-b)\}$
první vztah dostaneme pro $b = 0$, druhý pro $b = a$

Konečný impuls: $f(t) \cdot [\,\mathrm{H}(t-a) - \mathrm{H}(t-b)]$.

Poznámka. LDR s konstantními koeficienty a nespojitou pravou stranou bychom mohli řešit na jednotlivých intervalech a dopočítávat počáteční podmínky pro další interval. Dostaneme „řešení“, které v bodech nespojitosti pravé strany nemusí mít derivaci nejvyššího řádu.

Věta (o obrazu periodické funkce). *Je-li $f \in \mathscr{L}_0$ periodická funkce s periodou T, pak je exponenciálního řádu 0 a její obraz je*

$$F(p) = \frac{\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t}{1 - \mathrm{e}^{-pT}} \,, \quad p > 0 \,.$$

Důkaz. $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t =$
$= \begin{vmatrix} t = u + nT \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{vmatrix} = \sum_{n=0}^\infty \int_0^T f(u)\,\mathrm{e}^{-p(u+nT)}\,\mathrm{d}u =$
$= \sum_{n=0}^\infty (\mathrm{e}^{-pT})^n \int_0^T f(u)\,\mathrm{e}^{-pu}\,\mathrm{d}u =$
$= \big(\int_0^T f(u)\,\mathrm{e}^{-pu}\,\mathrm{d}u\big)/(1 - \mathrm{e}^{-pT})$

Posloupnosti v komplexním oboru

posloupnost: $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $(a_n)_{n=1}^\infty$
$\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \bar{\mathbb{C}}$
okolí $U(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - a| < r\}$ pro $a \in \mathbb{C}$,
$U(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| > r\}$
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$: pro každé okolí U bodu a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n \in U$ pro $n > n_0$.

Tvrzení. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní pro $a \in \mathbb{C}$:*
1) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
2) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} a_n = \operatorname{Re} a$, $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} a_n = \operatorname{Im} a$.
3) $\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ v $\mathbb{C}$ *právě tehdy, když* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ v $\mathbb{R}$.

Příklad. $\lim_{n\to\infty} (-1)^n n = \infty$ v $\mathbb{C}$, neexistuje v $\mathbb{R}$.

Číselné řady

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$

Definice. Nechť $(a_k)_{k=1}^\infty$ je posloupnost čísel. (*Nekonečná číselná*) *řada* je výraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{k=1}^\infty a_k \,.$$

Číslo a_k se nazývá *k-tý člen* této řady.

Poznámka. Obecněji:
$\sum_{k=n}^\infty a_k$, $n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$
$\sum_{k\in M} a_k$, M je množina: $\sum_{k=1}^\infty a_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$

Definice. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nazýváme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *n-tý částečný součet* řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Pokud existuje $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, nazýváme ji *součtem řady* a píšeme $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Řekneme, že řada: *konverguje*, je-li $s \in \mathbb{C}$; *diverguje*, je-li $s \in \{\pm\infty, \infty\}$; *osciluje*, pokud $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje.

Příklady.
1) $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ diverguje: $s_n = n$, $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$.
2) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ osciluje: $s_n = 1$ pro n sudé, $s_n = 0$ pro n liché.
3) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \lim_{n\to\infty}(1 - 2^{-n}) = 1$ konverguje.
4) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots$ osciluje v $\mathbb{R}$, diverguje v $\mathbb{C}$: $s_{2n-1} = n$, $s_{2n} = -n$.

Poznámka. „Lepší“ sčítání je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_n$, pro příklad 2) dá součet $\frac{1}{2}$.

Definice. *Aritmetická řada* s *diferencí* d:

$$a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \big(a + (k-1)d\big)\,.$$

Součty

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ &= \tfrac{1}{2}\left[(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_n + a_1)\right] \\ &= \tfrac{1}{2} n(a_1 + a_n)\,.\end{aligned}$$

Příklad. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$.

Definice. *Geometrická řada* s *kvocientem* q:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}\,.$$

Součty

$$\begin{aligned}s_n &= a(1 + q + \cdots + q^{n-1}) \\ qs_n &= a(\quad q + \cdots + q^{n-1} + q^n) \\ (1-q)s_n &= a(1 - q^n) \\ s_n &= \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q}\,, & q \neq 1 \\ na\,, & q = 1 \end{cases} \\ \sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} &= \frac{a}{1-q}\,, \quad |q| < 1 \\ \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} &= \begin{cases} +\infty\,, & q \geq 1\,, \\ \text{neex.}, & q \leq -1\,, \end{cases} \quad \text{v } \mathbb{R} \\ &= \begin{cases} \infty\,, & |q| > 1 \text{ nebo } q = 1\,, \\ \text{neex.}, & |q| = 1,\ q \neq 1\,, \end{cases} \quad \text{v } \mathbb{C}\end{aligned}$$

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3^k} = \frac{4/3}{1-1/3} = 2$.

Příklad. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots =$
$= \sum_{k=2}^{\infty} \big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\big) = \lim_{n\to\infty} \big(1 - \frac{1}{n}\big) = 1$.

Věta. *Komplexní řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když konvergují řady $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$. Pak*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + \mathrm{j} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k\,.$$

Věta. *Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergují, $c \in \mathbb{C}$, pak*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,.$$

Věta (nutná podmínka konvergence)**.** *Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, pak $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.*

Důkaz. $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} s_k - \lim_{k\to\infty} s_{k-1} = s - s = 0$.

Věta. *Je-li $a_k \geq 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ existuje.*

Důkaz. $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesající, tj. $\lim_{n\to\infty} s_n$ existuje ($= \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$).

Kriteria konvergence

Věta (srovnávací kriterium)**.** *Nechť $0 \leq a_k \leq b_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.*
1) *Konverguje-li $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, pak i $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.*
2) *Diverguje-li $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, pak i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverguje.*

Důkaz. $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$, $0 \leq s_n \leq t_n$
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n \leq \lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Příklady.
1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + 1 = 2$ konverguje.
2) $a \geq 2$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$ konverguje.
3) *harmonická řada*:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \cdots \\ &\geq 1 + \tfrac{1}{2} + \big(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\big) + \big(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\big) + \cdots \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \cdots = +\infty\,.\end{aligned}$$

4) $a \in (0, 1\rangle$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje.

Věta. *Konverguje-li* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, *pak konverguje* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Důkaz. 1) $a_k \in \mathbb{R}$: $a^+ = \max\{a, 0\}$, $a^- = \max\{-a, 0\}$
$a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$, $0 \le a^+, a^- \le |a|$
$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje ...
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergují (srovnávací kriterium) ...
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konv.
2) $a_k \in \mathbb{C}$: $0 \le |\operatorname{Re} a_k|, |\operatorname{Im} a_k| \le |a_k|$
$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje ...
$\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Re} a_k|$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im} a_k|$ konvergují (srovnávací kr.) ...
$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$ konvergují podle 1) ...
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + \mathrm{j} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$ konverguje

Definice. Řekneme, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje absolutně*, pokud konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Poznámka. Pokud reálná řada konverguje neabsolutně, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$.

Věta (odmocninové kriterium). *Je-li pro každé* $k \in \mathbb{N}$:
1) $\sqrt[k]{|a_k|} \le q < 1$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje (absolutně);*
2) $\sqrt[k]{|a_k|} \ge 1$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *nekonverguje.*

Důkaz. 1) $|a_k| \le q^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ konverguje
2) $|a_k| \ge 1$, $a_k \not\to 0$

Věta (limitní tvar odmocninového kriteria).
1) *Je-li* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje (abs.).*
2) *Je-li* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *nekonverguje.*

Příklady.
1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{\ln^k(k+1)}$ konverguje: $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{\sqrt[k]{3}}{\ln(k+1)} \to 0 < 1$.
2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^{10}}$ diverguje: $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{2}{\sqrt[k]{k^{10}}} \to 2 > 1$.
3) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$ kriterium nerozhodne: $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{k}{k+1} \nearrow 1$,
$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right]^{-1} = \mathrm{e}^{-1} \ne 0$ – diverguje.

Poznámky.
1) Stačí uvažovat $\limsup_{k\to\infty} < 1$, $\liminf_{k\to\infty} > 1$.
2) Odmocninové kriterium je účinnější (ne, pokud existují obě limity), ale někdy se hůře počítá.

Příklad. $a_{2k-1} = 2^{-k}$, $a_{2k} = 2^{1-k}$
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \cdots$
$\sqrt[k]{a_k} \to 2^{-1/2} < 1$ – konverguje podle odmocninového kr.
$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = 2$ – podílové kriterium nerozhodne

Věta (podílové kriterium). *Nechť* $a_k \ne 0$ *pro každé* $k \in \mathbb{N}$.
1) *Je-li* $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le q < 1$ *pro každé* $k \in \mathbb{N}$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje (absolutně).*
2) *Je-li* $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \ge 1$ *pro každé* $k \in \mathbb{N}$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *nekonverguje.*

Důkaz.
1) $|a_k| \le a_{k-1}|q| \le \cdots \le |a_1|q^{k-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_1|q^{k-1}$ konv.
2) $|a_k| \ge |a_{k-1}| \ge \cdots \ge |a_1|$, $a_k \not\to 0$

Poznámka. Stačí, aby byly nerovnosti splněny pro dostatečně velká k, tj. počínaje některým k_0.

Věta (limitní tvar podílového kriteria).
1) *Je-li* $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje (absolutně).*
2) *Je-li* $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, *pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *nekonverguje.*

Příklady.
1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konverguje: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{k+1} \to 0$.
2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}$ diverguje: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k+1}{2} \to +\infty$.
3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ – kr. nerozhodne: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k}{k+1} \nearrow 1$ (diverguje).
4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ – kr. nerozhodne: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \nearrow 1$ (konv.).

Věta (integrální kriterium). *Nechť* f *je nezáporná nerostoucí funkce na* $\langle 1, +\infty)$. *Pak* $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ *konverguje právě tehdy, když konverguje* $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz. $f(k) \ge \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \ge f(k+1)$,
$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \ge \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \ge \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - f(1)$

Příklady.
1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^{+\infty} = +\infty$.
2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ konverguje pro $a > 1$: $\int_1^{+\infty} x^{-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a-1}$.
3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ diverguje: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x = [\ln \ln x]_1^{+\infty} = +\infty$.

Příklad. Jaká je chyba $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{6}\pi^2$, pokud sečteme prvních 100 členů?
$\sum_{k=101}^{\infty} a_k \le \int_{100}^{+\infty} x^{-2}\,\mathrm{d}x = [-x^{-1}]_{100}^{+\infty} = \frac{1}{100} = 0{,}01$
$\sum_{k=101}^{\infty} a_k \ge \int_{101}^{+\infty} x^{-2}\,\mathrm{d}x = [-x^{-1}]_{101}^{+\infty} = \frac{1}{101} \doteq 0{,}0099$

Věta (Leibnizovo kriterium). *Nechť* $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ *je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel,* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. *Pak* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$ *konverguje.*

Důkaz. $s_1 \ge s_3 \ge \cdots \searrow s'$, $s_2 \le s_4 \le \cdots \nearrow s'' \le s'$,
$s' - s'' = \lim_{k\to\infty}(s_{2k+1} - s_{2k}) = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$

Poznámka. Alternující řada (střídají se znaménka) s $|a_k| \searrow 0$ konverguje.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots (= \ln 2)$ konverguje: střídají se znaménka, $|a_k| = \frac{1}{k} \searrow 0$. Ne absolutně: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ (podle integrálního kriteria).

Absolutní konvergence

Definice. *Přerovnáním řady* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nazýváme každou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}$, kde $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{N}$ je prosté zobrazení.

Věta. *Jestliže řada konverguje absolutně, pak každé její přerovnání konverguje absolutně a má stejný součet.*

Důkaz.
1) $a_k \geq 0$: označme $m_n = \max\{f(1), \dots, f(n)\}$
$\sum_{k=1}^{n} a_{f(k)} \leq \sum_{k=1}^{m_n} a_k$, tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
opačná nerovnost: první řada je přerovnáním druhé pro f_{-1}
2) $a_k \in \mathbb{R}$:
$\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}^{+} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}^{-} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{+} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
3) $a_k \in \mathbb{C}$: rozkladem na reálnou a imaginární část

Tvrzení. *Jestliže reálná řada konverguje neabsolutně, pak každé reálné číslo je součtem některého jejího přerovnání.*

Důkaz (náznak). $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{+} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-} = +\infty$, $c \in \mathbb{R}$
vybíráme nezáporné členy, dokud součet nebude $\geq c$
vybíráme záporné členy, dokud součet nebude $\leq c$
(postup opakujeme)

Poznámka. Podobně lze dosáhnout i součtu $\pm\infty$.

Věta (sčítání po částech)**.** *Nechť* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje absolutně. Pak* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ *konvergují (absolutně) a jejich součet je roven součtu původní řady.*

Důkaz. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k-1}|, \sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \; \dots$ (absolutní) konvergence
$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k-1} + a_{2k})$, částečné součty tvoří vybranou posloupnost z částečných součtů $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, mají tedy stejnou limitu

Poznámka. Absolutně konvergentní řadu můžeme rozdělit na konečně mnoho různě přeskládaných částí, součet se přitom nezmění. (Řadu můžeme před rozdělením na liché a sudé členy přerovnat, rozdělení můžeme opakovat).

Funkční řady

$f_1 + f_2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ na podmnožině $\bigcap_{k=1}^{\infty} D(f_k)$

(bodová) konvergence $\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f(x)$:
$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$
obor (absolutní) konvergence:
$\{x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D(f_k)\colon\ \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje (absolutně)$\}$

Příklad.
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\,(x-2)^k = (x-2) + \frac{1}{2}\,(x-2)^2 + \frac{1}{3}\,(x-2)^3 + \cdots$
podílové kriterium konvergence:
$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(x-2)^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{k}{(x-2)^k}\right| = \frac{k}{k+1} \cdot |x-2| \xrightarrow{k\to\infty} |x-2|$
$|x-2| < 1$ konverguje absolutně
$|x-2| > 1$ nekonverguje
$|x-2| = 1$:
 $x = 3$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ nekonverguje (harmonická řada)
 $x = 1$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konverguje (Leibnizovo kriterium)
obor konvergence: $\langle 1, 3)$
obor absolutní konvergence: $(1, 3)$

Definice. Posloupnost funkcí $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně* k funkci f na množině A, pokud

$$\sup_{x\in A} |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Posloupnost funkcí $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *konverguje lokálně stejnoměrně* k funkci f na množině A, pokud pro každé $x \in A$ existuje okolí U bodu x takové, že na množině $A \cap U$ je konvergence stejnoměrná.

Poznámky.
1) Stejnoměrně konvergentní posloupnost konverguje bodově.
2) Lokálně stejnoměrná konvergence na uzavřeném intervalu je stejnoměrná.

Příklad. $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$, $x \in \langle 0, +\infty)$
bodová konvergence:

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1\,, & x = 0 \\ 1/(1+nx) \xrightarrow{n\to+\infty} 0\,, & x > 0 \end{array} \right\} = f(x)$$

nekonverguje stejnoměrně:
 $\sup_{x\in\langle 0,+\infty)} |f(x) - f_n(x)| = 1 \not\to 0$
konverguje lokálně stejnoměrně na $(0, +\infty)$: pro $a > 0$ je

$$\sup_{x\in(a,+\infty)} |f(x) - f_n(x)| = f_n(a) = \frac{1}{1+na} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Poznámka. Pro řady uvažujeme konvergenci posloupnosti částečných součtů.

Věta (Weierstrassovo kriterium). *Nechť pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $|f_k(x)| \le a_k$ na množině A a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje. Pak $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje stejnoměrně a absolutně na množině A.*

Důkaz. absolutní (bodová) konvergence plyne z vlastností číselných řad; označme součet f
$\left|f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \le$
$\le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1,1)$ (geom. řada);
pro $|x| \le q < 1$ je $|x^{k-1}| \le q^{k-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ konverguje, tedy řada konverguje stejnoměrně na $\langle -q, q\rangle$ pro každé $q < 1$, tedy lokálně stejnoměrně na $(-1,1)$;
nekonverguje stejnoměrně:
$\sup_{x\in(-1,1)}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} x^{k-1}\right| = \sup_{x\in(-1,1)} \frac{x^n}{1-x} = +\infty$

Věta. *Nechť funkce f_n ($n \in \mathbb{N}$) jsou spojité a konvergují stejnoměrně k funkci f na intervalu I. Pak platí:*
1) f je spojitá.
2) $\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pro $a, b \in I$.
3) Jsou-li navíc f_n' spojité a konvergují-li stejnoměrně, pak $f_n'(x) \xrightarrow{n\to\infty} f'(x)$ na I.

Důkaz. 1) $a \in I$, $\varepsilon > 0$:
$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ a $|f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pro dostatečně velké n ze stejnoměrné konvergence,
$|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pro x blízko a ze spojitosti funkce f_n;
pak $|f(x)-f(a)| \le |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(a)|+|f_n(a)-f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$
2) $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \le$
$\le |b-a| \cdot \sup_{x\in\langle a,b\rangle} |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow{n\to 0} 0$
3) $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)\,\mathrm{d}t\right)' \overset{2)}{=}$
$\overset{2)}{=} \left(\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t\right)' = \left(\lim_{n\to\infty}\big(f_n(x) - f_n(a)\big)\right)' = \big(f(x) - f(a)\big)' = f'(x)$

Příklady. 1) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ konvergují k nespojité funkci na $\langle 0, +\infty)$, tedy nekonvergují stejnoměrně.
2)
$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2 x\,, & x \in \langle 0, 1/2n\rangle\,, \\ 4n - 4n^2 x\,, & x \in \langle 1/2n, 1/n\rangle\,, \\ 0\,, & x \in \langle 1/n, +\infty)\,, \end{cases}$$
konvergují k nulové funkci $f(x)$ na intervalu $\langle 0, +\infty)$, ale ne stejnoměrně: $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1 \ne \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Mocninné řady

Definice. *Mocninná řada* je řada ve tvaru
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x - x_0)^k = a_0 + a_1\,(x - x_0) + a_2\,(x - x_0)^2 + \cdots\,,$$
kde $a_k \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) jsou její *koeficienty* a $x_0 \in \mathbb{R}$ je její *střed.*

Věta. *Pro každou mocninnou řadu se středem x_0 existuje číslo $r \in \langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ nazývané* poloměr konvergence *této řady, pro které platí:*
1) Mocninná řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na množině $\{x\colon |x - x_0| < r\}$.
2) Mocninná řada nekonverguje na $\{x\colon |x - x_0| > r\}$.

Důkaz. Nechť mocninná řada konverguje v bodě $x_1 \ne x_0$:
$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x_1 - x_0)^k$ konverguje …
$a_k\,(x_1 - x_0)^k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ …
existuje $M \in \mathbb{R}$ tak, že $|a_k\,(x_1 - x_0)^k| \le M$;
pro $q < 1$, $|x - x_0| \le q\,|x_1 - x_0|$ je
$|a_k\,(x - x_0)^k| = |a_k\,(x_1 - x_0)^k| \cdot \left|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right|^k \le M \cdot q^k$;
podle Weierstrassova kriteria řada konverguje absolutně a stejnoměrně na množině $\{x\colon |x - x_0| \le q\,|x_1 - x_0|\}$, tedy lokálně stejnoměrně na množině $\{x\colon |x - x_0| < |x_1 - x_0|\}$

Poznámka. Na hranici oboru konvergence $\{x\colon |x - x_0| = r\}$ mohou nastat jen tyto případy:
1) nikde nekonverguje,
2) v některých bodech konverguje (ne absolutně), v některých ne,
3) všude konverguje absolutně (jakmile abs. v jednom bodě).

Věta. *Jestliže pro mocninnou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x - x_0)^k$ existuje $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = A$ nebo $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = A$, pak její poloměr konvergence je $\frac{1}{A}$ (včetně $\frac{1}{+\infty} = 0$, $\frac{1}{0+} = +\infty$).*

Důkaz (pro první případ).
$\sqrt[k]{|a_k\,(x - x_0)^k|} = \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |x - x_0| \xrightarrow{k\to\infty} A\,|x - x_0|$;
podle odmocninového kriteria konvergence řad mocninná řada konverguje pro $A\,|x - x_0| < 1$ (tedy $|x - x_0| < \frac{1}{A}$) a nekonverguje pro $A\,|x - x_0| > 1$ (tedy $|x - x_0| > \frac{1}{A}$)

Příklady.
1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,x^k$ má poloměr konvergence $+\infty$.
2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,x^k$ má poloměr konvergence 1, na hranici konverguje absolutně.
3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\,x^k$ má poloměr konvergence 1, v bodě 1 nekonverguje, v bodě -1 konverguje (neabsolutně).
4) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ má poloměr konvergence 1, na hranici nekonverguje.
5) $\sum_{k=0}^{\infty} k!\,x^k$ má poloměr konvergence 0 (ve svém středu řada vždy konverguje).

Poznámka. Poloměr konvergence je $1/\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

Věta. *Nechť* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = f(x)$ *pro* $|x-x_0|<r_1$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-x_0)^k = g(x)$ *pro* $|x-x_0|<r_2$. *Pak*

$$(f+g)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k+b_k)(x-x_0)^k\,,$$

$$(f\cdot g)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k\,, \quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\,,$$

pro $|x-x_0| < \min\{r_1, r_2\}$.

Tvrzení. *Řady* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ *a* $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1}$ *mají stejný poloměr konvergence.*

Důkaz. $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|(k+1)a_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k+1} \cdot \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_{k+1}|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$

Věta. *Součet mocninné řady je spojitá funkce, řadu lze derivovat a integrovat člen po členu.*

Příklad. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$, $x \in (-1,1)$ (geom. řada). Integrováním dostaneme $\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$, $x \in (-1,1)$ (integrační konstantu dostaneme dosazením středu řady).

Poznámka. Protože v předcházejícím příkladu v hraničním bodě 1 je funkce $\ln(1+x)$ spojitá a řada v něm konverguje, platí uvedená rovnost i pro tento bod. Je tedy $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$.

Taylorovy řady

Definice. Nechť funkce f má v bodě x_0 derivace včšech řádů. *Taylorova řada* funkce f v bodě x_0 je řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k\,.$$

Poznámka. Mocninná řada je Taylorovou řadou svého součtu ve svém středu. Taylorova řada funkce ale může mít za součet jinou funkci. Konvergence Taylorovy řady funkce f v bodě x_0 k funkci f v bodě x je zaručena, pokud zbytky Taylorova polynomu konvergují k 0, tedy pokud

$$\sup_{c \text{ mezi } x,\, x_0} \left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-x_0)^n \right| \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Příklady.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad. Taylorova řada funkce $x\,e^{2x}$ v bodě 1:

$$\begin{aligned} x\,e^{2x} &= [(x-1)+1]\, e^{2[(x-1)+1]} = [(x-1)+1] e^2 e^{2(x-1)} = \\ &= [(x-1)+1] e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} (x-1)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^2 2^k}{k!} (x-1)^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^2 2^k}{k!} (x-1)^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^2 2^{k-1}}{k-1!} (x-1)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^2 2^k}{k!} (x-1)^k = \\ &= e^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^2 2^{k-1}(k+2)}{k!} (x-1)^k \qquad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Věta. *Taylorova řada racionální funkce konverguje k této funkci, poloměr konvergence je vzdálenost středu řady od nejbližšího kořene jmenovatele v komplexním oboru.*

Důkaz. Rozklad na součet polynomu a parciálních zlomků (v komplexním oboru), stačí vyšetřit Taylorovu řady funkcí $f(x) = \frac{1}{x-a}$ v bodě $x_0 \neq a$. Využijeme větu o součtu geometrické řady:

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k\, k!}{(x-a)^{k+1}}\,, \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = \frac{(-1)^k}{(x_0-a)^{k+1}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x_0-a} \left(\frac{x-x_0}{a-x_0}\right)^k = \frac{1}{x-a}$$

pro $|\frac{x-x_0}{a-x_0}| < 1$, tedy $|x-x_0| < |a-x_0|$.

Příklad. Taylorova řada v bodě 1:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x+1} &= 1 - \frac{3}{x+1} = 1 - \frac{3}{(x-1)+2} = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} = \\ &= 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-1}{-2}} = 1 - \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{-2}\right)^k = \\ &= -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{(-2)^k} (x-1)^k\,, \qquad |x-1| < 2\,. \end{aligned}$$

Příklad. Taylorova řada v bodě 1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+1)^2} &= \left(\frac{-1}{x+1}\right)' = \cdots = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-2)^{k+1}} (x-1)^k\right)' = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(-2)^{k+1}} (x-1)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{(-2)^{k+2}} (x-1)^k \\ & |x-1| < 2\,. \end{aligned}$$

Příklad. Taylorova řada funkce $\operatorname{arctg} x$ v bodě 0: $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$;
integrací dostaneme $\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$ (integrační konstantu určíme dosazením středu řady);
kořeny polynomu x^2+1 jsou $\pm j$, tedy $|x| < 1$

Poznámka. Integrováním se může obor konvergence zvětšit (o hraniční body), ve výše uvedeném příkladu dostaneme rozvoj do Taylorovy řady na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Dosazením $x = 1$ dostaneme $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Fourierovy řady

skalární součin funkcí f, g s periodou $T > 0$:
$(f, g) = \int_0^T f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$

Tvrzení. *Nechť* $T = 2\pi/\omega > 0$, $k, m \in \mathbb{N}$. *Pak*

$$(\sin k\omega t, \cos m\omega t) = 0\,,$$

$$\big(f(k\omega t), f(m\omega t)\big) = \begin{cases} 0\,, & k \neq m\,, \\ T/2\,, & k = m\,, \end{cases} \qquad f \in \{\sin, \cos\}\,.$$

Důkaz.
$\int_0^T \sin k\omega t \cdot \cos m\omega t\, \mathrm{d}t = \int_0^T \frac{\sin(k+m)\omega t + \sin(k-m)\omega t}{2}\, \mathrm{d}t$
$\int_0^T \sin k\omega t \cdot \sin m\omega t\, \mathrm{d}t = \int_0^T \frac{\cos(k-m)\omega t - \cos(k+m)\omega t}{2}\, \mathrm{d}t$
$\int_0^T \cos k\omega t \cdot \cos m\omega t\, \mathrm{d}t = \int_0^T \frac{\cos(k-m)\omega t + \cos(k+m)\omega t}{2}\, \mathrm{d}t$

Poznámka. Je-li $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ ortogonální báze v prostoru $\mathbb{R}^n$, pak pro souřadnice vektoru $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ platí $x_k = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_k}{\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}_k}$. Podobně pro periodické funkce s periodou $T = 2\pi/\omega > 0$ máme ortogonální množinu funkcí $\{\cos k\omega t, \sin k\omega t : k \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$. Není to báze, ale můžeme vyjadřovat periodické funkce jako nekonečnou lineární kombinaci těchto funkcí s podobně spočtenými koeficienty.

Definice. *Fourierova řada* je řada ve tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)\,,$$

$a_0, a_k, b_k, \omega \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}$), $\omega > 0$.

Věta. *Jestliže řada* $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$ *konverguje stejnoměrně k funkci* f, $T = 2\pi/\omega$, *pak*

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos k\omega t\, \mathrm{d}t\,, \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,,$$
$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin k\omega t\, \mathrm{d}t\,, \qquad k \in \mathbb{N}\,.$$

Poznámky.
1) Ve výše uvedené větě můžeme integrovat na intervalu $(\alpha, \alpha + T)$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$, speciálně na $(-T/2, T/2)$.
2) $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, \mathrm{d}t$ je střední hodnota funkce f.

Definice. *Fourierova řada funkce* f s periodou $T = 2\pi/\omega$ je Fourierova řada s koeficienty spočtenými podle předcházející věty. Píšeme $f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$.

Věta. *Nechť funkce* f *je periodická s periodou* T, f *a* f' *jsou po částech spojité. Pak Fourierova řada funkce* f *konverguje v bodě* t *k hodnotě* $\frac{1}{2}\big(f(t-) + f(t+)\big)$. *Je-li navíc* f *spojitá, pak k ní její Fourierova řada konverguje stejnoměrně.*

Poznámka. V bodech nespojitosti f dochází k tzv. *Gibbsovu jevu* – konečné součty Fourierovy řady „překmitnou", délky rozkmitu se limitně blíží hodnotě $G \cdot |f(x+) - f(x-)|$, kde $G = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t \doteq 1{,}18$ je tzv. Gibbsova konstanta.

Poznámka. Fourierova řada sudé funkce je sudá funkce, skládá se pouze z kosinových členů, říkáme jí *kosinová Fourierova řada.* Fourierova řada liché funkce je lichá funkce, skládá se pouze ze sinových členů, říkáme jí *sinová Fourierova řada.*

Příklad. Funkce f s periodou $T = 2\pi$ je definována

$$f(t) = \begin{cases} 1\,, & t \in \langle 0, \pi)\,, \\ -1\,, & t \in \langle \pi, 2\pi)\,. \end{cases}$$

Funkce f je lichá, dostaneme tedy sinovou řadu s $b_k = \frac{2}{k\pi}\left(1 - (-1)^k\right)$, pro k sudé tedy 0, pro k liché $\frac{4}{k\pi}$: $f(t) \sim \frac{4}{\pi}\sin t + \frac{4}{3\pi}\sin 3t + \frac{4}{\pi}\sin 5t + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)t$.

Příklad. Určíme kosinovou řadu funkce $f(t) = 1 - t$, $t \in \langle 0, 1)$. Funkci nejprve dodefinujeme tak, abychom dostali sudou funkci: $f(t) = t - 1$ pro $t \in \langle -1, 0)$ a uvažujeme periodické prodloužení s periodou 2. Pak $a_0 = 1$ a integrací per-partes spočteme $a_k = \frac{2}{k^2\pi^2}\left(1 - (-1)^k\right)$ pro $k \in \mathbb{N}$. Dostáváme $f(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\cos\pi t + \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi t + \cdots = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos(2k-1)\pi t$. Dosazením $t = 0$ dostaneme $1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right)$, tedy $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$.

Věta. *Nechť* f *je periodická funkce s periodou* $T > 0$, f, f' *jsou po částech spojité,* $f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$. *Pak platí:*
1) *Je-li funkce* f *spojitá, pak* $f'(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)'$.
2) *Je-li* F *primitivní funkce k* f *a* $a_0 = 0$, *pak* $F(t) \sim \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-\frac{b_k}{k\omega}\cos k\omega t + \frac{a_k}{k\omega}\sin k\omega t)$.

Amplitudově-fázový tvar Fourierovy řady:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k)\,, \qquad A_k \geq 0\,.$$

Převody:

$$a_k = A_k \sin\varphi_k\,,$$
$$b_k = A_k \cos\varphi_k\,,$$
$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}\,,$$
$$\varphi_k: \quad \sin\varphi_k = \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}\,,\ \cos\varphi_k = \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \text{ pro } A > 0\,.$$

Komplexní tvar Fourierovy řady:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega t}\,.$$

Převody:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}\,,$$
$$c_k = \frac{a_k - \mathrm{j}b_k}{2}\,, \quad a_k = c_{-k} + c_k = 2\,\mathrm{Re}\, c_k\,, \qquad k \in \mathbb{N}\,,$$
$$c_{-k} = \frac{a_k + \mathrm{j}b_k}{2}\,, \quad b_k = c_{-k} - c_k = -2\,\mathrm{Im}\, c_k\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Přímý výpočet

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega t}\, \mathrm{d}t\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$