

Diferenciální rovnice

(Obyčejná) diferenciální rovnice řádu n :

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0$$

Řešení na intervalu I : funkce $x: I \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že pro každé $t \in I$ je $F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$.

Maximální řešení: neexistuje řešení na větším intervalu.

Cauchyova úloha: navíc počáteční podmínky

$$x(t_0) = x_{0,0}, \quad x'(t_0) = x_{0,1}, \quad \dots \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{0,n-1}$$

Cauchyova úloha je jednoznačně řešitelná, jestliže každá dvě řešení splývají na některém okolí t_0 .

Věta. Je-li f spojitá funkce na $I \times J$ (I, J otevřené intervaly), $t_0 \in I$, $x_0 \in J$, pak Cauchyova úloha $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ má řešení na intervalu $I' \subset I$. Je-li navíc $\frac{\partial f}{\partial y}$ lokálně omezená na $I \times J$, pak je Cauchyova úloha jednoznačně řešitelná.

Poznámky.

- 1) $f(t, x) = g(t)h(x)$: stačí spojitost g, h, h' .
- 2) $f(t, x) = g(t)x + h(t)$: stačí spojitost g, h .

Separovatelné diferenciální rovnice 1. řádu

$$x' = g(t)h(x)$$

Předpoklady: g spojitá na intervalu I , h spojitá na intervalu J .

- 1) $h(x_1) = 0 \dots x(t) = x_1, t \in I$ je stacionární řešení
- 2) $h(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} x'(t) &= g(t)h(x(t)) \\ \int \frac{x'(t)}{h(x(t))} dt &= \int g(t) dt \\ \int \frac{dx}{h(x)} &= \int g(t) dt (+ c) \\ x(t) &= \dots \end{aligned}$$

Cauchyova úloha

Dopočítat c nebo

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{du}{h(u)} = \int_{t_0}^t g(u) du$$

Obecný postup:

- 1) Maximální intervaly spojitosti $g(I)$.
- 2) Stacionární řešení $x(t) = x_1, t \in I$ pro $h(x_1) = 0$.
- 3) Maximální intervaly spojitosti a nenulovosti $h(J)$.
- 4) Pro $(t_0, x_0) \in I \times J$, existuje řešení uvnitř $I \times J$.

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

$$x' = a(t)x + b(t)$$

Předpoklady: a, b spojité na intervalu I .
Cauchyova úloha má pak právě jedno řešení na I .

Přidružená homogenní rovnice: $x' = a(t)x$.

Obecné řešení: $x(t) = \tilde{x}(t) + \hat{x}(t)$, kde \tilde{x} je obecné řešení přidružené homogenní rovnice a \hat{x} je jedno (partikulární) řešení původní rovnice.

Homogenní LDR 1. řádu

$$x' = a(t)x$$

Řešíme separací proměnných:

$$x(t) = ce^{A(t)}, \quad t \in I, \quad (c \in \mathbb{R}),$$

A je primitivní funkce k a .

Nehomogenní LDR 1. řádu

$$x' = a(t)x + b(t)$$

Metoda *variace konstanty*: hledáme partikulární řešení ve tvaru obecného řešení přidružené homogenní rovnice, ve kterém konstantu nahradíme funkcí.

$$\hat{x}(t) = c(t)e^{A(t)}$$

Dosadíme do rovnice a spočítáme $c(t)$:

$$\begin{aligned} c'(t)e^{A(t)} + c(t)e^{A(t)}a(t) &= a(t)c(t)e^{A(t)} + b(t) \\ c'(t) &= b(t)e^{-A(t)} \\ c(t) &= \int b(t)e^{-A(t)} \\ \hat{x}(t) &= e^{A(t)} \cdot \int b(t)e^{-A(t)} \end{aligned}$$

Cauchyova úloha pro LDR 1. řádu

$$\begin{aligned} x' &= a(t)x + b(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

- 1) Obecné řešení přidružené homogenní rovnice separací proměnných.
- 2) Partikulární řešení metodou variace konstanty, obecné řešení dané LDR.
- 3) Určení konstanty dosazením počáteční podmínky.

Lineární diferenciální rovnice

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

Předpoklady: a_{n-1}, \dots, a_0, b spojité na intervalu $I \ni t_0$.

Věta. Cauchyova úloha má právě jedno řešení na I .

Homogenní LDR ($b(t) = 0$ na I)

Věta. Množina řešení homogenní LDR řádu n tvoří lineární prostor dimenze n . Její bázi nazýváme fundamentální systém.

Důkaz. $D: x \mapsto x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x$ je lineární zobrazení, množina řešení je jeho jádro, tj. lineární prostor.

$x(t_0)$	$x'(t_0)$	\dots	$x^{(n-1)}(t_0)$	\rightarrow	řešení C. úlohy
1	0	\dots	0	\rightarrow	$x_0(t)$
0	1	\dots	0	\rightarrow	$x_1(t)$
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots
0	0	\dots	1	\rightarrow	$x_{n-1}(t)$
$x_{0,0}$	$x_{0,1}$	\dots	$x_{0,n-1}$	\rightarrow	$\sum_{i=0}^{n-1} x_{0,i}x_i(t)$

\Rightarrow lineární obal $\{x_0(t), \dots, x_{n-1}(t)\}$ je celý prostor řešení

$$A_0 x_0(t) + \dots + A_{n-1} x_{n-1}(t) = 0 \xrightarrow{t=t_0} A_0 = 0$$

$$' : A_0 x_0'(t) + \dots + A_{n-1} x_{n-1}'(t) = 0 \xrightarrow{t=t_0} A_1 = 0 \quad \dots$$

\Rightarrow funkce $x_0(t), \dots, x_{n-1}(t)$ jsou lineárně nezávislé

Věta. Necht' $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ jsou řešení jedné homogenní LDR řádu n na intervalu I . Tyto funkce jsou lineárně nezávislé na I právě tehdy, když pro každé $t \in I$ je následující determinant (Wronského, Wronskián) nenulový:

$$\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Důkaz. 1) Jsou-li funkce závislé, pak některá x_i je lineární kombinací ostatních, x_i' je stejnou kombinací derivací ostatních, \dots i -tý sloupec determinantu je kombinací ostatních, tj. determinant je nulový pro každé $t \in I$.

2) Je-li determinant nulový v t_0 , pak homogenní soustava rovnic s touto maticí má netriviální řešení (A_1, \dots, A_n) , $A_1 x_1(t) + \dots + A_n x_n(t)$ je řešení s nulovými počátečními podmínkami v t_0 , tj. nulové, tj. dané funkce jsou závislé.

Poznámka. Věta neplatí, pokud funkce nejsou řešením jedné LDR.

Nehomogenní LDR

Věta. 1) Je-li x řešení LDR a \tilde{x} řešení přidružené homogenní rovnice, pak $x + \tilde{x}$ je řešení dané LDR.

2) Jsou-li x_1, x_2 řešení LDR, pak $x_1 - x_2$ je řešení přidružené homogenní rovnice.

3) Jsou-li x_1, x_2 řešení pro pravé strany b_1, b_2 , pak $x_1 + x_2$ je řešení pro pravou stranu $b_1 + b_2$ (princip superpozice).

LDR s konstantními koeficienty

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = b(t)$$

Předpoklady: $a_n \neq 0, b$ je spojitá na intervalu.

Homogenní LDR s konstantními koeficienty

Charakteristická rovnice:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Věta. 1) Je-li λ reálný kořen charakteristické rovnice násobnosti k , pak funkce

$$e^{\lambda t}, \quad t e^{\lambda t}, \quad \dots, \quad t^{k-1} e^{\lambda t}$$

jsou řešením příslušné homogenní LDR.

2) Jsou-li $\alpha \pm \beta j$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) imaginární kořeny charakteristické rovnice násobnosti k , pak funkce

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad t e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad \dots, \quad t^{k-1} e^{\alpha t} \cos \beta t, \\ e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad t e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad \dots, \quad t^{k-1} e^{\alpha t} \sin \beta t, \end{aligned}$$

jsou řešením příslušné homogenní LDR.

3) Všechna tato řešení tvoří fundamentální systém řešení.

Nehomogenní LDR s konstantními koeficienty

Hledáme partikulární řešení.

1) Variace konstant:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) \\ \hat{x}(t) &= c_1(t) x_1(t) + \dots + c_n(t) x_n(t) \\ \hat{x}'(t) &= c_1(t) x_1'(t) + \dots + c_n(t) x_n'(t) \\ &\quad + \underbrace{c_1'(t) x_1(t) + \dots + c_n'(t) x_n(t)}_{=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}''(t) &= c_1(t) x_1''(t) + \dots + c_n(t) x_n''(t) \\ &\quad + \underbrace{c_1'(t) x_1'(t) + \dots + c_n'(t) x_n'(t)}_{=0} \end{aligned}$$

\vdots

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(n)}(t) &= c_1(t) x_1^{(n)}(t) + \dots + c_n(t) x_n^{(n)}(t) \\ &\quad + c_1'(t) x_1^{(n-1)}(t) + \dots + c_n'(t) x_n^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

2) Metoda odhadu pro kvazipolynomiální pravou stranu: Jsou-li P, Q polynomy stupně nejvýše m , ($\alpha + \beta j$) k -násobný kořen charakteristické rovnice,

$$f(t) = e^{\alpha t} (P(t) \cos \beta t + Q(t) \sin \beta t),$$

pak existuje partikulární řešení ve tvaru

$$\hat{x}(t) = t^k e^{\alpha t} (\hat{P}(t) \cos \beta t + \hat{Q}(t) \sin \beta t),$$

kde \hat{P}, \hat{Q} jsou polynomy stupně nejvýše m .

Soustavy LDR s konstantními koeficienty

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1(t) \\x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2(t) \\&\vdots \\x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n(t)\end{aligned}$$

předpoklady: $b_1(t), \dots, b_n(t)$ spojité na intervalu I
počáteční podmínky ($t_0 \in I$):

$$x_1(t_0) = x_{01}, \quad x_2(t_0) = x_{02}, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = x_{0n}$$

maticově (vektory sloupcově): $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$
homogenní soustava: $\mathbf{b}(t) = \mathbf{o}$

Poznámka. Obecněji mohou být diferenciální rovnice i vyšších řádů, ty se ale dají přepsat jako soustava lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu. Například soustavu

$$\begin{aligned}x_1' &= 2x_1 + x_2 + t, & x_1(0) &= 0, \\x_2'' &= x_1 + x_2 - x_2', & x_2(0) &= 0, \quad x_2'(0) = -1,\end{aligned}$$

lze substitucí $x_2' = x_3$ převést na tvar

$$\begin{aligned}x_1' &= 2x_1 + x_2 + t, & x_1(0) &= 0, \\x_2' &= & x_3, & x_2(0) = 0, \\x_3' &= x_1 + x_2 - x_3, & x_3(0) &= -1.\end{aligned}$$

Poznámka. LDR řádu n s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned}x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x &= b(t) \\x(t_0) = x_{0,0}, \quad x'(t_0) = x_{0,1}, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) &= x_{0,n-1}\end{aligned}$$

můžeme po označení $x = x_1$, $x' = x_2$, \dots , $x^{(n-1)} = x_n$ převést na soustavu s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned}x_1' &= & x_2 \\x_2' &= & x_3 \\&\vdots & \ddots \\x_n' &= -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 - \dots - a_{n-1}x_n + b(t)\end{aligned}$$

$$x_1(t_0) = x_{0,0}, \quad x_2(t_0) = x_{0,1}, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = x_{0,n-1}$$

Poznámka. Obráceně můžeme soustavu převést na jednu LDR. Tomuto postupu se říká *eliminací metoda*.

Příklad.

$$\begin{aligned}x_1' &= 2x_1 + x_2 - 3, & x_1(0) &= 5, \\x_2' &= x_1 + 2x_2 + 3t - 4, & x_2(0) &= 1.\end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme $x_2 = x_1' - 2x_1 + 3$ a dosadíme do druhé. Dostaneme rovnici $x_1'' - 4x_1' + 3x_1 = 3t + 2$ s řešením $x_1(t) = t + 2 + c_1e^t + c_2e^{3t}$. Dopočítáme $x_2(t) = x_1'(t) - 2x_1(t) + 3 = -2t - c_1e^t + c_2e^{3t}$. Dosazením počátečních podmínek určíme koeficienty c_1, c_2 . Výsledek je

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + 2 + e^t + 2e^{3t} \\ -2t - e^t + 2e^{3t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Věta. Soustava LDR má právě jedno řešení pro každou počáteční podmínku.

Věta. 1) Množina řešení homogenní soustavy n LDR tvoří lineární prostor dimenze n . Vektorové funkce $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ tvoří fundamentální systém (bázi) řešení soustavy právě tehdy, když determinant fundamentální matice soustavy

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{21}(t) & \dots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n}(t) & x_{2n}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

je nenulový pro každé $t \in I$.

2) Obecné řešení soustavy LDR lze vyjádřit ve tvaru $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{x}}(t)$, kde $\hat{\mathbf{x}}(t)$ je kterékoliv (partikulární) řešení dané soustavy a $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ je obecné řešení přidružené homogenní soustavy.

3) Řešení soustavy LDR pro součet pravých stran je součtem řešení pro jednotlivé pravé strany (princip superpozice).

Homogenní soustavy LDR s konstantními koeficienty

$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ je řešení $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ pro $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{o}$

Definice. Charakteristická rovnice soustavy LDR je rovnice $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. Řešení charakteristické rovnice soustavy se nazývají *vlastní čísla*. Pro každé vlastní číslo λ nazýváme rovnici $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{o}$ *charakteristickou soustavou*, její nenulová řešení nazýváme *vlastní vektory*.

Poznámka. Řešení ve tvaru $\mathbf{v}e^{\lambda t}$ jsou nezávislá pro různá vlastní čísla i pro nezávislé vlastní vektory. Hledáme tedy vlastní čísla a ke každému tolik lineárně nezávislých vlastních vektorů, jako je násobnost příslušného vlastního čísla.

Příklad. Řešme

$$\begin{aligned}x_1' &= 2x_1 + x_2, & x_1(0) &= 3, \\x_2' &= x_1 + 2x_2, & x_2(0) &= 1.\end{aligned}$$

Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, vlastní vektory jsou například $(1, -1)^T$ a $(1, 1)^T$, fundamentální matice soustavy a obecné řešení je

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ -e^t & e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1e^t + c_2e^{3t} \\ -c_1e^t + c_2e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Dosazením počátečních podmínek ($\mathbf{X}(t_0) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{x}_0$) dostaneme

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t + 2e^{3t} \\ -e^t + 2e^{3t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pro dvojice komplexně sdružených imaginárních vlastních čísel bereme jedno z nich a uvažujeme reálné a imaginární části komplexních funkcí ($e^{(\alpha+\beta j)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + j \sin \beta t)$).

Příklad. Řešme

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 - 3x_2, \\x_2' &= 3x_1 + x_2.\end{aligned}$$

Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$, vlastní čísla jsou $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3j$, stačí uvažovat $\lambda_1 = 1 + 3j$, vlastní vektor je například $(1, -j)^T$. Příslušné řešení soustavy diferenciálních rovnic uvažujeme v komplexním oboru:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -j \end{pmatrix} e^{(1+3j)t} = \begin{pmatrix} e^t \cos 3t + j e^t \sin 3t \\ -j e^t \cos 3t + e^t \sin 3t \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice řešení obsahuje za jednotlivé sloupce reálnou a imaginární část této vektorové funkce. Obecné řešení dostaneme jejich lineárními kombinacemi ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(t) &= \begin{pmatrix} e^t \cos 3t & e^t \sin 3t \\ e^t \sin 3t & -e^t \cos 3t \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{c} = \begin{pmatrix} e^t(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t) \\ e^t(c_1 \sin 3t - c_2 \cos 3t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Pokud má prostor řešení charakteristické soustavy dimenzi menší než násobnost vlastního čísla λ , uvažujeme kromě funkce $e^{\lambda t}$ i funkce $t e^{\lambda t}$, $t^2 e^{\lambda t}$, ...

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} = \mathbf{0} & \text{ má nenulové řešení } \mathbf{v}_1, \\ & \text{dostaneme funkci } \mathbf{v}_1 e^{\lambda t}, \\ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 & \text{ má řešení } \mathbf{v}_2, \\ & \text{dostaneme funkci } (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2) e^{\lambda t}, \\ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 & \text{ má řešení } \mathbf{v}_3, \\ & \text{dostaneme funkci } (\mathbf{v}_1 \frac{1}{2} t^2 + \mathbf{v}_2 t + \mathbf{v}_3) e^{\lambda t}, \\ & \vdots\end{aligned}$$

(Polynom v závorce integrujeme a přidáváme další dopočtenou vektorovou konstantu.)

Příklad. Řešme

$$\begin{aligned}x_1' &= 2x_1 + x_2, \\x_2' &= -x_1 + 4x_2.\end{aligned}$$

Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, vlastní čísla jsou $\lambda_{1,2} = 3$, vlastní vektor je například $\mathbf{v}_1 = (1, 1)^T$. Další lineárně nezávislé vektory neexistují, řešíme tedy $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{v} = \mathbf{v}_1$, která má řešení například $\mathbf{v}_2 = (0, 1)^T$. Fundamentální matice řešení a obecné řešení jsou ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(t) &= \begin{pmatrix} e^{3t} & t e^{3t} \\ e^{3t} & (t+1) e^{3t} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{c} = \begin{pmatrix} (c_2 t + c_1) e^{3t} \\ (c_2 t + c_1 + c_2) e^{3t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Nehomogenní soustava LDR s konstantními koeficienty

Metoda *variace konstant*: Je-li $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{c}$ obecné řešení přidružené homogenní soustavy, můžeme partikulární řešení hledat ve tvaru $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{c}(t)$, po dosazení dostaneme $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{X}^{-1}(t) \mathbf{b}(t)$, tedy

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}(t) \int \mathbf{X}^{-1}(u) \mathbf{b}(u) du.$$

pro počáteční podmínku $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ dostaneme

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{X}^{-1}(u) \mathbf{b}(u) du + \mathbf{X}(t) \mathbf{X}^{-1}(t_0) \mathbf{x}_0.$$

Věta (odhad partikulárního řešení). Pro soustavu

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{p}(t) e^{\alpha t} \cos \beta t + \mathbf{q}(t) e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

ve které \mathbf{p}, \mathbf{q} jsou vektorové polynomy stupně nejvýše m (každá složka je polynom stupně nejvýše m) a číslo $\alpha + \beta j$ (číslo pravé strany) je k -násobný kořen charakteristické rovnice přidružené homogenní soustavy diferenciálních rovnic, existuje partikulární řešení ve tvaru

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{p}}(t) e^{\alpha t} \cos \beta t + \hat{\mathbf{q}}(t) e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

kde $\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}$ jsou vektorové polynomy stupně nejvýše $m + k$.

Laplaceova transformace

Definice. Laplaceovým obrazem funkce f definované na $(0, \infty)$ je funkce

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt,$$

pokud integrál konverguje pro alespoň jedno $p \in \mathbb{R}$.

Značení: $\mathcal{L} : f(t) \mapsto F(p)$, $\mathcal{L}\{f\} = F$, $f \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{L}^{-1} F$.

Příklady. e^{t^2} nemá Laplaceův obraz

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{at}\} &= \frac{1}{p-a}, \quad p > a \\ \mathcal{L}\{1\} &= \frac{1}{p}, \quad p > 0\end{aligned}$$

Poznámky. 1) F se obvykle uvažuje jako funkce komplexní proměnné pro $\operatorname{Re} p > p_f$.

2) Někdy se uvažují funkce $f(t)$ definované na \mathbb{R} , které jsou nulové pro $t < 0$ – místo $\sin t$ na $(0, \infty)$ se píše $\sin t \cdot H(t)$, kde $H(t)$ je tzv. *Heavisideova funkce* (někdy se bere $H(0) = \frac{1}{2}$):

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Definice. Funkce $f(t)$ definovaná na $\langle 0, \infty \rangle$ je *předmět standardního typu* (f patří do třídy \mathcal{L}_0), jestliže:

- 1) f je po částech spojitá,
- 2) f je *exponenciálního řádu* (α), tj. existují čísla $M, \alpha \in \mathbb{R}$:

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \quad t \in \langle 0, \infty \rangle.$$

Věta. Necht' f je předmět standardního typu exponenciálního řádu α . Pak Laplaceův obraz funkce f je definován na (α, ∞) a $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$.

Důkaz. $|\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt| \leq \int_0^\infty |f(t) e^{-pt}| dt \leq \int_0^\infty M e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^\infty M e^{-(p-\alpha)t} dt = [-\frac{M}{p-\alpha} e^{-(p-\alpha)t}]_0^\infty = \frac{M}{p-\alpha}$ pro $p > \alpha$.

Příklady.

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{p^2 + 1}, \quad p > 0$$

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{p}{p^2 + 1}, \quad p > 0$$

Věta (o linearitě). Jsou-li $f, g \in \mathcal{L}_0$ exponenciálního řádu α , $a, b \in \mathbb{R}$, pak

$$\mathcal{L}\{af + bg\} = a \mathcal{L}\{f\} + b \mathcal{L}\{g\}, \quad (p > \alpha).$$

Důkaz. Přímý důsledek linearitě integrálu.

Věta (o derivaci obrazu). Je-li $f \in \mathcal{L}_0$ exponenciálního řádu α , $F = \mathcal{L}\{f\}$, pak

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = -F'(p), \quad p > \alpha.$$

Důkaz (náznak). $F'(p) = \frac{d}{dp} \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty \frac{d}{dp} (f(t) e^{-pt}) dt = \int_0^\infty f(t) (-t) e^{-pt} dt = -\int_0^\infty (t f(t)) e^{-pt} dt = -\mathcal{L}\{t f(t)\}$

Příklad.

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad p > 0.$$

Věta (o integraci obrazu). Je-li $f \in \mathcal{L}_0$ exponenciálního řádu α , $F = \mathcal{L}\{f\}$ a existuje-li vlastní $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$, pak

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_p^\infty F(q) dq, \quad p > \alpha.$$

Poznámka. $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = -\int F(p)$, integrační konstanta se určí z podmínky $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$.

Věta (o substituci [posunu] v obrazu). Je-li $f \in \mathcal{L}_0$ exponenciálního řádu α , $F = \mathcal{L}\{f\}$, $a \in \mathbb{R}$, pak

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(p - a), \quad p > \alpha + a.$$

Důkaz. $|e^{at} f(t)| \leq e^{at} M e^{\alpha t} = M e^{(\alpha+a)t}$

$$\int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{(a-p)t} dt = F(p - a)$$

Příklad. $\mathcal{L}\{e^{at} \sin t\} = \frac{1}{(p-a)^2 + 1}$, $p > a$

Věta (o změně měřítka). Je-li $f \in \mathcal{L}_0$ exponenciálního řádu α , $F = \mathcal{L}\{f\}$, $a > 0$, pak

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \quad p > a \cdot \alpha.$$

Důkaz. $|f(at)| \leq M e^{\alpha(at)} = M e^{(a\alpha)t}$

$$\int_0^\infty f(at) e^{-pt} dt = \left| \begin{matrix} at = u \\ a dt = du \end{matrix} \right| = \frac{1}{a} \int_0^\infty f(u) e^{-(p/a)u} du = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

Příklady.

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad p > 0$$

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad p > 0$$

Zpětná Laplaceova transformace

Věta. Jsou-li $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_0$ exponenciálního řádu α , $\mathcal{L}\{f_1\} = \mathcal{L}\{f_2\}$ na (α, ∞) , pak $f_1(t) = f_2(t)$ na $\langle 0, \infty \rangle$ s výjimkou nejvýše spočetně mnoha izolovaných bodů. Speciálně $f_1 = f_2$, pokud jsou obě funkce spojitě zprava.

Věta. Racionální funkce je Laplaceovým obrazem funkce třídy \mathcal{L}_0 právě tehdy, když je ryze lomená. Pak je obrazem na intervalu (α, ∞) , kde α je největší reálná část kořenů jmenovatele.

Důkaz. \Rightarrow : $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$

\Leftarrow : rozklad na součet parciálních zlomků, linearita

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-a}\right\} = e^{at}$$

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-a)^n}\right\} = \frac{t^{n-1} e^{at}}{(n-1)!}$$

pro kvadratické členy ve jmenovateli:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+C}{(p^2+bp+c)^n}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(p+\frac{b}{2})+(C-\frac{b}{2})}{[(p+\frac{b}{2})^2+c-\frac{1}{4}b^2]^n}\right\}$$

$$= e^{-\frac{b}{2}t} \left[\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2+\omega^2)^n}\right\}}_{f_n(t)} + \frac{2C-b}{2} \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+\omega^2)^n}\right\}}_{g_n(t)} \right]$$

$$f_1(t) = \cos \omega t, \quad f_{n+1}(t) = \frac{1}{2n} t g_n(t)$$

$$g_1(t) = \frac{1}{\omega} \sin \omega t, \quad g_{n+1}(t) = \frac{1}{2n\omega^2} [(2n-1)g_n(t) - t g_n'(t)]$$

Diferenciální a integrálně diferenciální rovnice

Zobrazíme Laplaceovou transformací, vyřešíme algebraickou rovnici, provedeme zpětnou transformaci.

Věta (o obrazu derivace). Je-li $f' \in \mathcal{L}_0$ exponenciálního řádu α , $F = \mathcal{L}\{f\}$ a $f(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$, pak

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = p \cdot F(p) - f(0+), \quad (p > \max\{\alpha, 0\}).$$

Důkaz. $\int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{l} u = e^{-pt} \quad v' = f'(t) \\ u' = -p e^{-pt} \quad v = f(t) \end{array} \right| =$
 $= [f(t) e^{-pt}]_0^\infty + \int_0^\infty p f(t) e^{-pt} dt = -f(0+) + p \cdot F(p)$

Důsledek.

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = p^n \mathcal{L}\{f\} - p^{n-1} f(0+) - \dots - p f^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+)$$

Poznámka. Pro LDR s konstantními koeficienty (a jejich soustavy) s kvazipolynomiální pravou stranou jsou řešeními kvazipolynomy, můžeme tedy použít Laplaceovu transformaci.

Věta (o obrazu integrálu). Je-li $f \in \mathcal{L}_0$ exponenciálního řádu α , $F = \mathcal{L}\{f\}$, pak

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{F(p)}{p}, \quad (p > \max\{\alpha, 0\}).$$

Důkaz. $g(t) = \int_0^t f(u) du, g(0+) = 0$

$$F(p) = \mathcal{L}\{g'(t)\} = p \mathcal{L}\{g(t)\} - g(0+) = p \mathcal{L}\{g(t)\}$$

Poznámka. Rovnici $D(x) + \int_0^t x(u) du = f(t)$ lze substitucí $y(t) = \int_0^t x(u) du$ převést na rovnici $D(y') + y = f(t)$ s (další) počáteční podmínkou $y(0) = 0$. Je-li D lineární diferenciální operátor s konstantními koeficienty a f kvazipolynom, pak řešením pro y je kvazipolynom, jehož derivací je opět kvazipolynom vyhovující původní rovnici. Můžeme tedy použít Laplaceovu transformaci.

Definice. Konvoluce funkcí $f, g \in \mathcal{L}_0$ je funkce

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u) g(u) du, \quad t \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Vlastnosti:

- 1) komutativita: $f * g = g * f$
- 2) asociativita: $(f * g) * h = f * (g * h)$
- 3) distributivita ke sčítání: $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

Věta (o obrazu konvoluce). Jsou-li $f, g \in \mathcal{L}_0$ exponenciálního řádu α , $F = \mathcal{L}\{f\}$, $G = \mathcal{L}\{g\}$, pak

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(p) \cdot G(p), \quad p > \alpha.$$

Poznámky.

- 1) $\mathcal{L}^{-1}\{F(p) \cdot G(p)\} = (f * g)(t)$.
- 2) $(\mathbb{H} * f)(t) = \int_0^t f(t) dt$, tj. věta o obrazu integrálu je zvláštním případem věty o obrazu konvoluce.

Věta (o translaci). Je-li $f \in \mathcal{L}_0$ exponenciálního řádu α , $a \geq 0$, pak

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t) \mathbb{H}(t-a)\} &= e^{-ap} \mathcal{L}\{f(t+a)\}, \quad p > \alpha \\ \mathcal{L}\{f(t-a) \mathbb{H}(t-a)\} &= e^{-ap} \mathcal{L}\{f(t)\}, \quad p > \alpha \end{aligned}$$

Důkaz. $\mathcal{L}\{f(t-b) \mathbb{H}(t-a)\} =$
 $= \int_0^\infty f(t-b) \mathbb{H}(t-a) e^{-pt} dt = \int_a^\infty f(t-b) e^{-pt} dt \stackrel{(t-a=u)}{=} \int_0^\infty f(u+a-b) e^{-p(u+a)} du = e^{-ap} \mathcal{L}\{f(t+a-b)\}$

první vztah dostaneme pro $b=0$, druhý pro $b=a$

Konečný impuls: $f(t) \cdot [\mathbb{H}(t-a) - \mathbb{H}(t-b)]$.

Poznámka. LDR s konstantními koeficienty a nespojitou pravou stranou bychom mohli řešit na jednotlivých intervalech a dopočítávat počáteční podmínky pro další interval. Dostaneme „řešení“, které v bodech nespojitosti pravé strany nemusí mít derivaci nejvyššího řádu.

Věta (o obrazu periodické funkce). Je-li $f \in \mathcal{L}_0$ periodická funkce s periodou T , pak je exponenciálního řádu 0 a její obraz je

$$F(p) = \frac{\int_0^T f(t) e^{-pt} dt}{1 - e^{-pT}}, \quad p > 0.$$

Důkaz. $\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} f(t) e^{-pt} dt =$
 $= \left| \begin{array}{l} t = u + nT \\ dt = du \end{array} \right| = \sum_{n=0}^\infty \int_0^T f(u) e^{-p(u+nT)} du =$
 $= \sum_{n=0}^\infty (e^{-pT})^n \int_0^T f(u) e^{-pu} du =$
 $= (\int_0^T f(u) e^{-pu} du) / (1 - e^{-pT})$

Posloupnosti v komplexním oboru

posloupnost: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, (a_n)_{n=1}^\infty$

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \bar{\mathbb{C}}$$

okolí $U(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ pro $a \in \mathbb{C}$,

$U(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$: pro každé okolí U bodu a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n \in U$ pro $n > n_0$.

Tvrzení. Následující tvrzení jsou ekvivalentní pro $a \in \mathbb{C}$:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} a_n = \operatorname{Re} a, \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} a_n = \operatorname{Im} a$.
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ v \mathbb{C} právě tehdy, když $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$ v \mathbb{R} .

Příklad. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n = \infty$ v \mathbb{C} , neexistuje v \mathbb{R} .

Číselné řady

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Definice. Necht $(a_k)_{k=1}^\infty$ je posloupnost čísel. (Nekonečná číselná) řada je výraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{k=1}^\infty a_k.$$

Číslo a_k se nazývá k -tý člen této řady.

Poznámka. Obecněji:

$$\sum_{k=n}^\infty a_k, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{k \in M} a_k, \quad M \text{ je množina: } \sum_{k=1}^\infty a_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$$

Definice. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nazýváme $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ n -tý částečný součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Pokud existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, nazýváme ji *součtem řady* a píšeme $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Řekneme, že řada: *konverguje*, je-li $s \in \mathbb{C}$; *diverguje*, je-li $s \in \{\pm\infty, \infty\}$; *osciluje*, pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ neexistuje.

Příklady.

- 1) $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ diverguje: $s_n = n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$.
- 2) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ osciluje: $s_n = 1$ pro n sudé, $s_n = 0$ pro n liché.
- 3) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 2^{-n}) = 1$ konverguje.
- 4) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$ osciluje v \mathbb{R} , diverguje v \mathbb{C} : $s_{2n-1} = n$, $s_{2n} = -n$.

Poznámka. „Lepší“ sčítání je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_n$, pro příklad 2) dá součet $\frac{1}{2}$.

Definice. *Aritmetická řada s diferencí d:*

$$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (a + (k-1)d).$$

Součty

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ &= \frac{1}{2} [(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_n + a_1)] \\ &= \frac{1}{2} n(a_1 + a_n). \end{aligned}$$

Příklad. $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$.

Definice. *Geometrická řada s kvocientem q:*

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}.$$

Součty

$$\begin{aligned} s_n &= a(1 + q + \dots + q^{n-1}) \\ qs_n &= a(q + \dots + q^{n-1} + q^n) \\ (1-q)s_n &= a(1 - q^n) \\ s_n &= \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \\ na, & q = 1 \end{cases} \\ \sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} &= \frac{a}{1-q}, \quad |q| < 1 \\ \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} &= \begin{cases} +\infty, & q \geq 1, \\ \text{neex.}, & q \leq -1, \end{cases} \quad \text{v } \mathbb{R} \\ &= \begin{cases} \infty, & |q| > 1 \text{ nebo } q = 1, \\ \text{neex.}, & |q| = 1, q \neq 1, \end{cases} \quad \text{v } \mathbb{C} \end{aligned}$$

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3^k} = \frac{4/3}{1-1/3} = 2$.

Příklad. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$.

Věta. *Komplexní řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když konvergují řady $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$. Pak*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + j \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k.$$

Věta. *Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergují, $c \in \mathbb{C}$, pak*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \\ \sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k &= c \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \end{aligned}$$

Věta (nutná podmínka konvergence). *Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, pak $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.*

Důkaz. $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k - \lim_{k \rightarrow \infty} s_{k-1} = s - s = 0$.

Věta. *Je-li $a_k \geq 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ existuje.*

Důkaz. $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesající, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ existuje ($= \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n$).

Kriteria konvergence

Věta (srovnávací kriterium). *Nechť $0 \leq a_k \leq b_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.*

- 1) *Konverguje-li $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, pak i $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.*
- 2) *Diverguje-li $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, pak i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverguje.*

Důkaz. $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^n b_k$, $0 \leq s_n \leq t_n$
 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Příklady.

- 1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + 1 = 2$ konverguje.
- 2) $a \geq 2$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$ konverguje.
- 3) *harmonická řada:*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = +\infty. \end{aligned}$$

4) $a \in (0, 1)$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje.

Věta. Konverguje-li $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, pak konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Důkaz. 1) $a_k \in \mathbb{R}$: $a^+ = \max\{a, 0\}$, $a^- = \max\{-a, 0\}$

$a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$, $0 \leq a^+$, $a^- \leq |a|$

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje ...

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergují (srovnávací kritérium) ...

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konv.

2) $a_k \in \mathbb{C}$: $0 \leq |\operatorname{Re} a_k|$, $|\operatorname{Im} a_k| \leq |a_k|$

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje ...

$\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Re} a_k|$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im} a_k|$ konvergují (srovnávací kr.) ...

$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$ konvergují podle 1) ...

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + j \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$ konverguje

Definice. Řekneme, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně, pokud konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Poznámka. Pokud reálná řada konverguje neabsolutně, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$.

Věta (odmocninové kritérium). Je-li pro každé $k \in \mathbb{N}$:

1) $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje (absolutně);

2) $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje.

Důkaz. 1) $|a_k| \leq q^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ konverguje

2) $|a_k| \geq 1$, $a_k \not\rightarrow 0$

Věta (limitní tvar odmocninového kritéria).

1) Je-li $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje (abs.).

2) Je-li $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje.

Příklady.

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{\ln^k(k+1)}$ konverguje: $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{\sqrt[k]{3}}{\ln(k+1)} \rightarrow 0 < 1$.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^{10}}$ diverguje: $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{2}{\sqrt[k]{k^{10}}} \rightarrow 2 > 1$.

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$ kritérium nerozhodne: $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{k}{k+1} \nearrow 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right]^{-1} = e^{-1} \neq 0$ - diverguje.

Poznámky.

1) Stačí uvažovat $\limsup_{k \rightarrow \infty} < 1$, $\liminf_{k \rightarrow \infty} > 1$.

2) Odmocninové kritérium je účinnější (ne, pokud existují obě limity), ale někdy se hůře počítá.

Příklad. $a_{2k-1} = 2^{-k}$, $a_{2k} = 2^{1-k}$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \dots$

$\sqrt[k]{a_k} \rightarrow 2^{-1/2} < 1$ - konverguje podle odmocninového kr.

$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = 2$ - podílové kritérium nerozhodne

Věta (podílové kritérium). Necht' $a_k \neq 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

1) Je-li $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje (absolutně).

2) Je-li $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje.

Důkaz.

1) $|a_k| \leq a_{k-1}|q| \leq \dots \leq |a_1|q^{k-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_1|q^{k-1}$ konv.

2) $|a_k| \geq |a_{k-1}| \geq \dots \geq |a_1|$, $a_k \not\rightarrow 0$

Poznámka. Stačí, aby byly nerovnosti splněny pro dostatečně velká k , tj. počínaje některým k_0 .

Věta (limitní tvar podílového kritéria).

1) Je-li $\lim_{k \rightarrow \infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje (absolutně).

2) Je-li $\lim_{k \rightarrow \infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje.

Příklady.

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konverguje: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{k+1} \rightarrow 0$.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}$ diverguje: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k+1}{2} \rightarrow +\infty$.

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ - kr. nerozhodne: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k}{k+1} \nearrow 1$ (diverguje).

4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ - kr. nerozhodne: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \nearrow 1$ (konv.).

Věta (integrální kritérium). Necht' f je nezáporná nerostoucí funkce na $(1, +\infty)$. Pak $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Důkaz. $f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1)$,

$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \geq \int_1^{+\infty} f(x) dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - f(1)$

Příklady.

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{+\infty} = +\infty$.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ konverguje pro $a > 1$: $\int_1^{+\infty} x^{-a} dx = \frac{1}{a-1}$.

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ diverguje: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = [\ln \ln x]_1^{+\infty} = +\infty$.

Příklad. Jaká je chyba $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{6} \pi^2$, pokud sečteme prvních 100 členů?

$\sum_{k=101}^{\infty} a_k \leq \int_{100}^{+\infty} x^{-2} dx = [-x^{-1}]_{100}^{+\infty} = \frac{1}{100} = 0,01$

$\sum_{k=101}^{\infty} a_k \geq \int_{101}^{+\infty} x^{-2} dx = [-x^{-1}]_{101}^{+\infty} = \frac{1}{101} \doteq 0,0099$

Věta (Leibnizovo kritérium). Necht' $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. Pak $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ konverguje.

Důkaz. $s_1 \geq s_3 \geq \dots \searrow s'$, $s_2 \leq s_4 \leq \dots \nearrow s'' \leq s'$,

$s' - s'' = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_{2k+1} - s_{2k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$

Poznámka. Alternující řada (střídají se znaménka) s $|a_k| \searrow 0$ konverguje.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots (= \ln 2)$ konverguje: střídají se znaménka, $|a_k| = \frac{1}{k} \searrow 0$. Ne absolutně: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ (podle integrálního kritéria).

Definice. Přerovnaním řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nazýváme každou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}$, kde $f: \mathbb{N} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{N}$ je prosté zobrazení.

Věta. Jestliže řada konverguje absolutně, pak každé její přerovnání konverguje absolutně a má stejný součet.

Důkaz.

- 1) $a_k \geq 0$: označme $m_n = \max\{f(1), \dots, f(n)\}$
 $\sum_{k=1}^n a_{f(k)} \leq \sum_{k=1}^{m_n} a_k$, tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
 opačná nerovnost: první řada je přerovnaním druhé pro f_{-1}
- 2) $a_k \in \mathbb{R}$:
 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
- 3) $a_k \in \mathbb{C}$: rozkladem na reálnou a imaginární část

Tvrzení. Jestliže reálná řada konverguje neabsolutně, pak každé reálné číslo je součtem některého jejího přerovnání.

Důkaz (náznak). $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$, $c \in \mathbb{R}$
 vybíráme nezáporné členy, dokud součet nebude $\geq c$
 vybíráme záporné členy, dokud součet nebude $\leq c$
 (postup opakujeme)

Poznámka. Podobně lze dosáhnout i součtu $\pm\infty$.

Věta (sčítání po částech). Necht' $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně. Pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ konvergují (absolutně) a jejich součet je roven součtu původní řady.

Důkaz. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k-1}|, \sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \dots$ (absolutní) konvergence
 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k-1} + a_{2k})$, částečné součty tvoří vybranou posloupnost z částečných součtů $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, mají tedy stejnou limitu

Poznámka. Absolutně konvergentní řadu můžeme rozdělit na konečně mnoho různě přeskládaných částí, součet se přitom nezmění. (Řadu můžeme před rozdělením na liché a sudé členy přerovnat, rozdělení můžeme opakovat).

$$f_1 + f_2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \text{ na podmnožině } \bigcap_{k=1}^{\infty} D(f_k)$$

(bodová) konvergence $\sum_{k=1}^n f_k(x) = f(x)$:

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$$

obor (absolutní) konvergence:

$$\{x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D(f_k) : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ konverguje (absolutně)}\}$$

Příklad.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (x-2)^k = (x-2) + \frac{1}{2} (x-2)^2 + \frac{1}{3} (x-2)^3 + \dots$$

podílové kritérium konvergence:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{(x-2)^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{k}{(x-2)^k} \right| = \frac{k}{k+1} \cdot |x-2| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |x-2|$$

$|x-2| < 1$ konverguje absolutně

$|x-2| > 1$ nekonverguje

$|x-2| = 1$:

$x = 3$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ nekonverguje (harmonická řada)

$x = 1$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konverguje (Leibnizovo kritérium)

obor konvergence: $\langle 1, 3 \rangle$

obor absolutní konvergence: $(1, 3)$

Definice. Posloupnost funkcí $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k funkci f na množině A , pokud

$$\sup_{x \in A} |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Posloupnost funkcí $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje lokálně stejnoměrně k funkci f na množině A , pokud pro každé $x \in A$ existuje okolí U bodu x takové, že na množině $A \cap U$ je konvergence stejnoměrná.

Poznámky.

- 1) Stejnoměrně konvergentní posloupnost konverguje bodově.
- 2) Lokálně stejnoměrná konvergence na uzavřeném intervalu je stejnoměrná.

Příklad. $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$, $x \in \langle 0, +\infty \rangle$

bodová konvergence:

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, & x = 0 \\ 1/(1+nx) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, & x > 0 \end{array} \right\} = f(x)$$

nekonverguje stejnoměrně:

$$\sup_{x \in \langle 0, +\infty \rangle} |f(x) - f_n(x)| = 1 \not\rightarrow 0$$

konverguje lokálně stejnoměrně na $(0, +\infty)$: pro $a > 0$ je

$$\sup_{x \in (a, +\infty)} |f(x) - f_n(x)| = f_n(a) = \frac{1}{1+na} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Poznámka. Pro řady uvažujeme konvergenci posloupnosti částečných součtů.

Věta (Weierstrassovo kritérium). *Nechť pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $|f_k(x)| \leq a_k$ na množině A a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje. Pak $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje stejnoměrně a absolutně na množině A .*

Důkaz. absolutní (bodová) konvergence plyne z vlastností číselných řad; označme součet f

$$|f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$ (geom. řada); pro $|x| \leq q < 1$ je $|x^{k-1}| \leq q^{k-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ konverguje, tedy řada konverguje stejnoměrně na $\langle -q, q \rangle$ pro každé $q < 1$, tedy lokálně stejnoměrně na $(-1, 1)$;

nekonverguje stejnoměrně:

$$\sup_{x \in (-1, 1)} |\sum_{k=n+1}^{\infty} x^{k-1}| = \sup_{x \in (-1, 1)} \frac{x^n}{1-x} = +\infty$$

Věta. *Nechť funkce f_n ($n \in \mathbb{N}$) jsou spojité a konvergují stejnoměrně k funkci f na intervalu I . Pak platí:*

- 1) f je spojitá.
- 2) $\int_a^b f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ pro $a, b \in I$.
- 3) Jsou-li navíc f'_n spojité a konvergují-li stejnoměrně, pak $f'_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'(x)$ na I .

Důkaz. 1) $a \in I$, $\varepsilon > 0$:

$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ a $|f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pro dostatečně velké n ze stejnoměrné konvergence,

$|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pro x blízko a ze spojitosti funkce f_n ;

pak $|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

$$2) |\int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx| \leq |b-a| \cdot \sup_{x \in (a,b)} |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = (\int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(t) dt)' \stackrel{2)}{=} (\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt)' = (\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(a)))' = (f(x) - f(a))' = f'(x)$$

Příklady. 1) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ konvergují k nespojitě funkci na $(0, +\infty)$, tedy nekonvergují stejnoměrně.

2)

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2x, & x \in \langle 0, 1/2n \rangle, \\ 4n - 4n^2x, & x \in \langle 1/2n, 1/n \rangle, \\ 0, & x \in \langle 1/n, +\infty \rangle, \end{cases}$$

konvergují k nulové funkci $f(x)$ na intervalu $(0, +\infty)$, ale ne stejnoměrně: $\int_0^1 f_n(x) dx = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \neq \int_0^1 f(x) dx$.

Mocninné řady

Definice. *Mocninná řada je řada ve tvaru*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots,$$

kde $a_k \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) jsou její *koefficienty* a $x_0 \in \mathbb{R}$ je její *střed*.

Věta. *Pro každou mocninnou řadu se středem x_0 existuje číslo $r \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ nazývané poloměr konvergence této řady, pro které platí:*

- 1) *Mocninná řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na množině $\{x: |x - x_0| < r\}$.*
- 2) *Mocninná řada nekonverguje na $\{x: |x - x_0| > r\}$.*

Důkaz. Nechť mocninná řada konverguje v bodě $x_1 \neq x_0$:

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x_1 - x_0)^k$ konverguje ...

$$a_k (x_1 - x_0)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \dots$$

existuje $M \in \mathbb{R}$ tak, že $|a_k (x_1 - x_0)^k| \leq M$;

pro $q < 1$, $|x - x_0| \leq q |x_1 - x_0|$ je

$$|a_k (x - x_0)^k| = |a_k (x_1 - x_0)^k| \cdot \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^k \leq M \cdot q^k;$$

podle Weierstrassova kritéria řada konverguje absolutně a stejnoměrně na množině $\{x: |x - x_0| \leq q |x_1 - x_0|\}$, tedy lokálně stejnoměrně na množině $\{x: |x - x_0| < |x_1 - x_0|\}$

Poznámka. Na hranici oboru konvergence $\{x: |x - x_0| = r\}$ mohou nastat jen tyto případy:

- 1) nikde nekonverguje,
- 2) v některých bodech konverguje (ne absolutně), v některých ne,
- 3) všude konverguje absolutně (jakmile abs. v jednom bodě).

Věta. *Jestliže pro mocninnou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ existuje $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = A$ nebo $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = A$, pak její poloměr konvergence je $\frac{1}{A}$ (včetně $\frac{1}{+\infty} = 0$, $\frac{1}{0^+} = +\infty$).*

Důkaz (pro první případ).

$$\sqrt[k]{|a_k (x - x_0)^k|} = \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |x - x_0| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A |x - x_0|;$$

podle odmocninového kritéria konvergence řad mocninná řada konverguje pro $A |x - x_0| < 1$ (tedy $|x - x_0| < \frac{1}{A}$) a nekonverguje pro $A |x - x_0| > 1$ (tedy $|x - x_0| > \frac{1}{A}$)

Příklady.

- 1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ má poloměr konvergence $+\infty$.
- 2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} x^k$ má poloměr konvergence 1, na hranici konverguje absolutně.
- 3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$ má poloměr konvergence 1, v bodě 1 nekonverguje, v bodě -1 konverguje (neabsolutně).
- 4) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ má poloměr konvergence 1, na hranici nekonverguje.
- 5) $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$ má poloměr konvergence 0 (ve svém středu řada vždy konverguje).

Poznámka. Poloměr konvergence je $1/\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

Věta. Necht' $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = f(x)$ pro $|x - x_0| < r_1$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k = g(x)$ pro $|x - x_0| < r_2$. Pak

$$(f + g)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) (x - x_0)^k,$$

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i},$$

pro $|x - x_0| < \min\{r_1, r_2\}$.

Tvrzení. Řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ a $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$ mají stejný poloměr konvergence.

Důkaz. $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|(k+1)a_{k+1}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k+1} \cdot \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{k+1}|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{k+1}|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$

Věta. Součet mocninné řady je spojitá funkce, řadu lze derivovat a integrovat člen po členu.

Příklad. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$, $x \in (-1, 1)$ (geom. řada).

Integrováním dostaneme $\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$, $x \in (-1, 1)$ (integrační konstantu dostaneme dosazením středu řady).

Poznámka. Protože v předcházejícím příkladu v hraničním bodě 1 je funkce $\ln(1+x)$ spojitá a řada v něm konverguje, platí uvedená rovnost i pro tento bod. Je tedy $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$.

Taylorovy řady

Definice. Necht' funkce f má v bodě x_0 derivace v všech řádech. Taylorova řada funkce f v bodě x_0 je řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Poznámka. Mocninná řada je Taylorovou řadou svého součtu ve svém středu. Taylorova řada funkce ale může mít za součet jinou funkci. Konvergence Taylorovy řady funkce f v bodě x_0 k funkci f v bodě x je zaručena, pokud zbytky Taylorova polynomu konvergují k 0, tedy pokud

$$\sup_{c \text{ mezi } x, x_0} \left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Příklady.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Příklad. Taylorova řada funkce $x e^{2x}$ v bodě 1:

$$\begin{aligned} x e^{2x} &= [(x-1) + 1] e^{2[(x-1)+1]} = [(x-1) + 1] e^2 e^{2(x-1)} = \\ &= [(x-1) + 1] e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} (x-1)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^2 2^k}{k!} (x-1)^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^2 2^k}{k!} (x-1)^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^2 2^{k-1}}{k-1!} (x-1)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^2 2^k}{k!} (x-1)^k = \\ &= e^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^2 2^{k-1} (k+2)}{k!} (x-1)^k \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Věta. Taylorova řada racionální funkce konverguje k této funkci, poloměr konvergence je vzdálenost středu řady od nejbližšího kořene jmenovatele v komplexním oboru.

Důkaz. Rozklad na součet polynomu a parciálních zlomků (v komplexním oboru), stačí vyšetřit Taylorovy řady funkcí $f(x) = \frac{1}{x-a}$ v bodě $x_0 \neq a$. Využijeme větu o součtu geometrické řady:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \frac{(-1)^k k!}{(x-a)^{k+1}}, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = \frac{(-1)^k}{(x_0-a)^{k+1}} \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x_0-a} \left(\frac{x-x_0}{a-x_0} \right)^k = \frac{1}{x-a} \end{aligned}$$

pro $|\frac{x-x_0}{a-x_0}| < 1$, tedy $|x-x_0| < |a-x_0|$.

Příklad. Taylorova řada v bodě 1:

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x+1} &= 1 - \frac{3}{x+1} = 1 - \frac{3}{(x-1)+2} = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} = \\ &= 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-1}{-2}} = 1 - \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{-2} \right)^k = \\ &= -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{(-2)^k} (x-1)^k, \quad |x-1| < 2. \end{aligned}$$

Příklad. Taylorova řada v bodě 1:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+1)^2} &= \left(\frac{-1}{x+1} \right)' = \dots = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-2)^{k+1}} (x-1)^k \right)' = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(-2)^{k+1}} (x-1)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{(-2)^{k+2}} (x-1)^k \\ &|x-1| < 2. \end{aligned}$$

Příklad. Taylorova řada funkce $\arctg x$ v bodě 0:

$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$; integrací dostaneme $\arctg x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$ (integrační konstantu určíme dosazením středu řady); kořeny polynomu $x^2 + 1$ jsou $\pm j$, tedy $|x| < 1$

Poznámka. Integrováním se může obor konvergence zvětšit (o hraniční body), ve výše uvedeném příkladu dostaneme rozvoj do Taylorovy řady na intervalu $(-1, 1)$. Dosazením $x = 1$ dostaneme $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$.

Fourierovy řady

skalární součin funkcí f, g s periodou $T > 0$:

$$(f, g) = \int_0^T f(t)g(t) dt$$

Tvrzení. Necht' $T = 2\pi/\omega > 0, k, m \in \mathbb{N}$. Pak

$$(\sin k\omega t, \cos m\omega t) = 0,$$

$$(f(k\omega t), f(m\omega t)) = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ T/2, & k = m, \end{cases} \quad f \in \{\sin, \cos\}.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin k\omega t \cdot \cos m\omega t dt &= \int_0^T \frac{\sin(k+m)\omega t + \sin(k-m)\omega t}{2} dt \\ \int_0^T \sin k\omega t \cdot \sin m\omega t dt &= \int_0^T \frac{\cos(k-m)\omega t - \cos(k+m)\omega t}{2} dt \\ \int_0^T \cos k\omega t \cdot \cos m\omega t dt &= \int_0^T \frac{\cos(k-m)\omega t + \cos(k+m)\omega t}{2} dt \end{aligned}$$

Poznámka. Je-li $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ ortogonální báze v prostoru \mathbb{R}^n , pak pro souřadnice vektoru $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ platí $x_k = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_k}{\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k}$. Podobně pro periodické funkce s periodou $T = 2\pi/\omega > 0$ máme ortogonální množinu funkcí $\{\cos k\omega t, \sin k\omega t : k \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$. Není to báze, ale můžeme vyjadřovat periodické funkce jako nekonečnou lineární kombinaci těchto funkcí s podobně spočtenými koeficienty.

Definice. Fourierova řada je řada ve tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t),$$

$a_0, a_k, b_k, \omega \in \mathbb{R} (k \in \mathbb{N}), \omega > 0$.

Věta. Jestliže řada $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$ konverguje stejnoměrně k funkci $f, T = 2\pi/\omega$, pak

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Poznámky.

1) Ve výše uvedené větě můžeme integrovat na intervalu $(\alpha, \alpha + T)$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$, speciálně na $(-T/2, T/2)$.

2) $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ je střední hodnota funkce f .

Definice. Fourierova řada funkce f s periodou $T = 2\pi/\omega$ je Fourierova řada s koeficienty spočtenými podle předcházející věty. Píšeme $f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$.

Věta. Necht' funkce f je periodická s periodou T, f a f' jsou po částech spojitě. Pak Fourierova řada funkce f konverguje v bodě t k hodnotě $\frac{1}{2}(f(t-) + f(t+))$. Je-li navíc f spojitá, pak k ní její Fourierova řada konverguje stejnoměrně.

Poznámka. V bodech nespojitosti f dochází k tzv. *Gibbovu jevu* – konečné součty Fourierovy řady „překmitnou“, délky rozkmitu se limitně blíží hodnotě $G \cdot |f(x+) - f(x-)|$, kde $G = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1,18$ je tzv. *Gibbsova konstanta*.

Poznámka. Fourierova řada sudé funkce je sudá funkce, skládá se pouze z kosinových členů, říkáme jí *kosinová Fourierova řada*. Fourierova řada liché funkce je lichá funkce, skládá se pouze ze sinových členů, říkáme jí *sinová Fourierova řada*.

Příklad. Funkce f s periodou $T = 2\pi$ je definována

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle 0, \pi \rangle, \\ -1, & t \in \langle \pi, 2\pi \rangle. \end{cases}$$

Funkce f je lichá, dostaneme tedy sinovou řadu s $b_k = \frac{2}{k\pi} (1 - (-1)^k)$, pro k sudé tedy 0, pro k liché $\frac{4}{k\pi}$: $f(t) \sim \frac{4}{\pi} \sin t + \frac{4}{3\pi} \sin 3t + \frac{4}{5\pi} \sin 5t + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)t$.

Příklad. Určíme kosinovou řadu funkce $f(t) = 1 - t, t \in \langle 0, 1 \rangle$. Funkci nejprve dodefinujeme tak, abychom dostali sudou funkci: $f(t) = t - 1$ pro $t \in \langle -1, 0 \rangle$ a uvažujeme periodické prodloužení s periodou 2. Pak $a_0 = 1$ a integrací per-partes spočteme $a_k = \frac{2}{k^2\pi^2} (1 - (-1)^k)$ pro $k \in \mathbb{N}$. Dostáváme $f(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cos \pi t + \frac{4}{9\pi^2} \cos 3\pi t + \dots = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2} \cos(2k-1)\pi t$. Dosazením $t = 0$ dostaneme $1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} (1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots)$, tedy $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$.

Věta. Necht' f je periodická funkce s periodou $T > 0, f, f'$ jsou po částech spojitě, $f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$. Pak platí:

1) Je-li funkce f spojitá, pak $f'(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)'$.

2) Je-li F primitivní funkce $k f$ a $a_0 = 0$, pak $F(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-\frac{b_k}{k\omega} \cos k\omega t + \frac{a_k}{k\omega} \sin k\omega t)$.

Amplitudově-fázový tvar Fourierovy řady:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k), \quad A_k \geq 0.$$

Převody:

$$a_k = A_k \sin \varphi_k,$$

$$b_k = A_k \cos \varphi_k,$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2},$$

$$\varphi_k : \sin \varphi_k = \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}, \cos \varphi_k = \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \text{ pro } A > 0.$$

Komplexní tvar Fourierovy řady:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t}.$$

Převody:

$$c_0 = \frac{a_0}{2},$$

$$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2}, \quad a_k = c_{-k} + c_k = 2 \operatorname{Re} c_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$c_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2}, \quad b_k = c_{-k} - c_k = -2 \operatorname{Im} c_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Přímý výpočet

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$