

## Reálná čísla

1. Určete maximum, minimum, supremum a infimum následujících množin:

a)  $\mathbb{Z}$ ;

b)  $M = (-1, 1) \cup \langle 3, 5 \rangle$ ;

c)  $M = \langle 0, \sqrt{2} \rangle \cap \mathbb{Q}$ ;

d)  $M = \{1 + 2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ ;

e)  $M = \langle 0, \frac{1}{3} \rangle \cap \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ ;

f)  $M = \{(-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1} : n \in \mathbb{N}\}$ .

## Výsledky

1. a)  $\max \mathbb{Z}$  ani  $\min \mathbb{Z}$  neexistují,  $\sup \mathbb{Z} = +\infty$ ,  $\inf \mathbb{Z} = -\infty$ ;
- b)  $\max M = 5 = \sup M$ ,  $\min M$  neexistuje,  $\inf M = -1$ ;
- c)  $\max M$  neexistuje,  $\sup M = \sqrt{2}$ ,  $\min M = 0 = \inf M$ ;
- d)  $\max M = \frac{3}{2} = \sup M$ ,  $\min M$  neexistuje,  $\inf M = 1$ ;
- e)  $\max M = \frac{1}{4} = \sup M$ ,  $\min M$  neexistuje,  $\inf M = 0$ ;
- f)  $\max M$  ani  $\min M$  neexistují,  $\sup M = 1$ ,  $\inf M = -1$ .

## Funkce

1. Určete definiční obor funkce:

- a)  $\frac{x^2}{x+1}$ ;      b)  $\frac{x+2}{x^2-x-6}$ ;      c)  $\sqrt{2+x-x^2}$ ;  
d)  $\sqrt{3x-x^3}$ ;      e)  $\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ ;      f)  $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x}$ ;  
g)  $\sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ;      h)  $\sqrt{1-|x|}$ ;      i)  $\log_2 \log_3 \log_4 x$ ;  
j)  $\frac{\ln(x+1)}{2x-1}$ ;      k)  $\ln |\sin x|$ ;      l)  $\arcsin \sqrt{\frac{2x+1}{2}}$ ;  
m)  $(\operatorname{arctg}(x-1))^{1/(x-3)}$ ;      n)  $\log(1 - \log(x^2 - 4x + 13))$ .

2. Vyšetřete omezenost funkce:

- a)  $\frac{3}{x-2}$ ;      b)  $x^2 + 6x - 4$ ;      c)  $-2x^2 + x + 5$ ;      d)  $\frac{1}{x^2+1}$ .

3. Určete, zda je funkce sudá nebo lichá:

- a)  $5x - x^3$ ;      b)  $x^4 + 3x^2 - 1$ ;      c)  $x^2 + 3x - 2$ ;  
d)  $2^x - 2^{-x}$ ;      e)  $\ln \frac{1-x}{1+x}$ ;      f)  $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ ;  
g)  $\log(\sqrt{x^2+1} + x)$ ;      h)  $\frac{\sin x}{x}$ ;      i)  $2^{-x^2}$ ;  
j)  $\sin x - \cos x$ ;      k)  $\sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$ .

4. Vyšetřete, zda je funkce periodická, a pokud ano, určete její periodu:

- a)  $\sin 3x$ ;      b)  $5 \cos 2x$ ;      c)  $4 \sin \pi x$ ;  
d)  $-3 \cos(4x+5)$ ;      e)  $\sqrt{\operatorname{tg} x}$ ;      f)  $\operatorname{tg} \sqrt{x}$ ;  
g)  $2 \sin 3x + 3 \sin 2x$ ;      h)  $\sin(5\pi x + \frac{\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{6} - 3\pi x)$ .

5. Dokažte:

- a)  $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ ;  
b)  $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ .

## Výsledky

- a)  $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ;      b)  $(-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, +\infty)$ ;      c)  $\langle -1, 2 \rangle$ ;  
d)  $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup \langle 0, \sqrt{3} \rangle$ ;      e)  $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ ;      f)  $(-\infty, -1) \cup \{1\}$ ;      g)  $\emptyset$ ;  
h)  $\langle -1, 1 \rangle$ ;      i)  $(4, +\infty)$ ;      j)  $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$ ;      k)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$ ;      l)  $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ ;  
m)  $(1, 3) \cup (3, +\infty)$ ;      n)  $(1, 3)$ .
- a) není omezená ani zdola, ani shora;      b) omezená zdola;      c) omezená shora;  
d) omezená.
- a) lichá;      b) sudá;      c) ani sudá ani lichá;      d) lichá;      e) lichá;      f) lichá;      g) lichá;  
h) sudá;      i) sudá;      j) ani sudá ani lichá;      k) sudá.
- a)  $\frac{2}{3}\pi$ ;      b)  $\pi$ ;      c) 2;      d)  $\frac{1}{2}\pi$ ;      e)  $\pi$ ;      f) není periodická;      g)  $2\pi$ ;      h) 2.

## Limity funkcí

1. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 + 3}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 1}{x^4 + 1}; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 2x + 1}{2x^2 + 3x - 1}; \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - 2x + 5}{x^3 + x^2 + 1}; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}; & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 + x + 3}; \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + x^3 + 2}{2x^3 - 1}; & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^5}{1 + x^2}. \end{array}$$

2. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x - 2}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}; \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 4}{x^2 - 4x + 3}; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 1}; & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right). \end{array}$$

3. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x - 1} + 2}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2}{\sqrt{x^2 - 4} - 2}; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{4x^2 - 2} + 1}; \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x - 2} - 2}{x - 6}; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt{x + 2} - 1}; & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1}}{x}; \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x); & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2} + x); & \text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x). \end{array}$$

4. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\pi/2} \frac{\cos 2x}{1 - \sin x}; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + \cos x); & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x \sin x}{x + 1}; \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (4e^x - \sin x); & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \cos x; & \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} \cos(3x + 1). \end{array}$$

5. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{2x^2 + 3x - 5}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}; \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x}; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow \pi} \ln^2(1 + \cos x); & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1/x}; \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^{2x}}{e^{2x} + 1}; & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin \frac{1 - x}{1 + x}; & \text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} x^{-2} \sqrt{x}. \end{array}$$

6. Spočtěte limity funkce v hraničních bodech definičního oboru:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{\cos x}{2x - 1}; & \text{b) } \operatorname{arctg} \frac{1 + x}{1 - x}; & \text{c) } (\operatorname{tgh} x)^{1/(x-1)}. \end{array}$$

## Výsledky

1. a) 0; b) 0; c) 2; d) 3; e)  $+\infty$ ; f)  $-\infty$ ; g)  $+\infty$ ; h)  $+\infty$ .
2. a)  $\frac{2}{3}$ ; b) 0; c) 3; d) neexistuje,  $\mp\infty$  v  $3\pm$ ; e)  $+\infty$ ; f)  $-\frac{1}{2}$ .
3. a)  $+\infty$ ; b) 3; c) -1; d)  $\frac{1}{4}$ ; e) 2; f) 0; g) 1; h) 0; i)  $+\infty$ ;
4. a) 1; b)  $-\infty$ ; c) nelze počítat,  $+\infty$  v  $1-$ ; d) 0; e)  $+\infty$ ; f)  $-\infty$ ;  
g) neexistuje; h) neexistuje; i) 0.
5. a)  $+\infty$ ; b) nelze počítat,  $+\infty$  v  $1+$ ; c) neexistuje; d) 1; e)  $+\infty$ ; f)  $+\infty$ ;  
g) 3; h)  $-\frac{1}{2}\pi$ ; i) neexistuje, 0 v  $2-$ ,  $+\infty$  v  $2+$ .
6. a) neexistuje v  $-\infty$ ,  $\pm\infty$  v  $0\pm$ , 0 v  $+\infty$ ;  
b)  $-\frac{1}{4}\pi$  v  $\pm\infty$ ,  $\mp\frac{1}{2}\pi$  v  $1\pm$ ;  
c)  $+\infty$  v  $0+$  a v  $1-$ , 0 v  $1+$ , 1 v  $+\infty$ .

## Derivace funkce

1. Spočtěte derivaci funkce:

a)  $3x^2 - 5x + 1$ ;

b)  $2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$ ;

c)  $\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} + \frac{2}{x^3}$ ;

d)  $\frac{x}{x^3 + 1}$ ;

e)  $(x^2 + 1)^4$ ;

f)  $\sqrt{x^3 + 1}$ .

2. Spočtěte derivaci funkce:

a)  $\sqrt[4]{x} \cos x$ ;

b)  $e^x \sin x$ ;

c)  $x^2 e^x \cos x$ ;

d)  $x \cdot \sin x \cdot \operatorname{arctg} x$ ;

e)  $\frac{e^x}{\sin x}$ ;

f)  $\operatorname{cotg} x$ .

3. Spočtěte derivaci funkce

a)  $\sin(2x + 5)$ ;

b)  $e^{-3x+1}$ ;

c)  $10^x$ ;

d)  $\ln^2 x$ ;

e)  $\ln \operatorname{tg} x$ ;

f)  $\arccos \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}$ ;

g)  $\sqrt{\ln^2 x + 1}$ ;

h)  $\ln \cosh x$ ;

i)  $\ln \ln \sin x$ .

4. Spočtěte derivaci funkce:

a)  $x^x$ ;

b)  $x^{\sin x}$ ;

c)  $x^{x^2}$ ;

d)  $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ ;

e)  $(x^2 + 1)^{\cos \pi x}$ .

5. Spočtěte derivaci druhého řádu:

a)  $x e^{x^2}$ ;

b)  $(x^2 + 1) \operatorname{arctg} x$ ;

c)  $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

6. Vyjádřete derivaci řádu  $n$ ;

a)  $e^{ax}$ ;

b)  $x e^x$ ;

c)  $x \ln x$ .

## Výsledky

1. a)  $6x - 5$ ; b)  $x^{-1/2} + x^{-2}$ ; c)  $-\frac{3}{5}x^{-8/5} - 6x^{-4}$ ,  $x \neq 0$ ; d)  $\frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}$ ; e)  $8x(x^2+1)^3$ ;  
f)  $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$ ,  $x \neq -1$ .
2. a)  $\frac{1}{4}x^{-3/4}\cos x - \sqrt[4]{x}\sin x$ ; b)  $e^x \sin x + e^x \cos x$ ; c)  $2xe^x \cos x + x^2 e^x \cos x - x^2 e^x \sin x$ ;  
d)  $\sin x \operatorname{arctg} x + x \cos x \operatorname{arctg} x + \frac{x \sin x}{x^2+1}$ ; e)  $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$ ; f)  $-\frac{1}{\sin^2 x}$ .
3. a)  $2 \cos(2x + 5)$ ; b)  $-3e^{-3x+1}$ ; c)  $10^x \ln 10$ ; d)  $\frac{2}{x} \ln x$ ; e)  $\frac{1}{\sin x \cos x}$ ;  
f)  $\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{1+2x-2x^2}}$ ; g)  $\frac{\ln x}{x\sqrt{\ln^2 x+1}}$ ; h)  $\operatorname{tgh} x$ ; i) funkce není definována pro žádné  $x$ .
4. a)  $x^x(\ln x+1)$ ; b)  $x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$ ; c)  $x^{x^2+1}(2 \ln x+1)$ ; d)  $(\frac{x}{x+1})^x(\frac{1}{x+1} + \ln \frac{x}{x+1})$ ;  
e)  $(x^2+1)^{\cos \pi x}(-\sin \pi x \cdot \pi \cdot \ln(x^2+1) + \cos \pi x \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x)$ .
5. a)  $2e^{x^2}(2x^3+3x)$ ; b)  $\frac{2x}{x^2+1} + 2 \operatorname{arctg} x$ ; c)  $\frac{-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$ .
6. a)  $a^n e^{ax}$ ; b)  $e^x(x+n)$ ; c)  $(-1)^n(n-2)!x^{1-n}$ .



## Aplikace derivací

1. Spočtěte

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\ln x}; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}; & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x}{x-1}; \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{(x-1)^2}; & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh 2x}{3x}; & \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+2}; & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{5x+3}; \\ \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1}; & \text{j) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}; & \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}; & \text{l) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}. \end{array}$$

2. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{e^x}; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}; \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 8)}{x^2 - 3x}; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 8)}{x^2 - 3x}; & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin 3x}. \end{array}$$

3. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} x^3 e^{-x}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} x \cotg x; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\pi - 2 \operatorname{arctg} x); \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0+} x^a \ln x \quad (a > 0); & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^{-x} \quad (n \in \mathbb{N}). \end{array}$$

4. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0+} x^x; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}; \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^x; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^{x^2}; & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0+} (\cotg x)^{\sin x}. \end{array}$$

5. Určete rovnice tečny a normály grafu funkce  $f$  v bodě  $A$ :

$$\text{a) } f(x) = \ln x, \quad A = [1, ?]; \quad \text{b) } f(x) = 2x^2 - 1, \quad A = \left[\frac{1}{2}, ?\right].$$

6. Určete Taylorův polynom řádu  $n$  funkce  $f$  v bodě  $a$ :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad a = 0, \quad n = 3; & \text{b) } f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad a = 0, \quad n = 3; \\ \text{c) } f(x) = \ln(1+x), \quad a = 0, \quad n = 4; & \text{d) } f(x) = \sqrt[k]{1+x} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad a = 0, \quad n = 1; \\ \text{e) } f(x) = \sin x, \quad a = \frac{\pi}{4}, \quad n = 3; & \text{f) } f(x) = x^2 e^{x+1}, \quad a = -1, \quad n = 3. \end{array}$$

## Výsledky

1. a)  $\frac{3}{4}$ ; b)  $-\pi$ ; c) 2; d) 0; e) neexistuje,  $\pm\infty$  v  $1\pm$ ; f)  $\frac{2}{3}$ ; g) 0; h)  $+\infty$ ;  
i) 0; j) 1; k)  $\frac{1}{3}$ ; l) 0.
2. a)  $\frac{1}{2}$ ; b) 0; c) 1; d) 2; e) 0; f) nelze počítat, 1 v  $0+$ .
3. a) 0; b) 1; c) 2; d)  $\frac{2}{\pi}$ ; e) 0; f)  $\infty$  pro  $n$  sudé,  $-\infty$  pro  $n$  liché.
4. a) 1; b)  $\frac{1}{e}$ ; c) 1; d)  $+\infty$ ; e)  $e^{-1/2}$ ; f) 1.
5. a) tečna:  $y = x - 1$ , normála:  $y = -x + 1$ ; b) tečna:  $y = 2x - \frac{3}{2}$ , normála:  $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ .
6. a)  $1 + x + x^2 + x^3$ ; b)  $x - \frac{1}{3}x^3$ ; c)  $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$ ; d)  $1 + \frac{1}{k}x$ ;  
e)  $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}(x - \frac{\pi}{4})^3$ ; f)  $1 - (x + 1) - \frac{1}{2}(x + 1)^2 + \frac{1}{6}(x + 1)^3$ .

## Průběh funkce

1. Určete maximální intervaly monotonie a lokální extrémů funkce:

a) $f(x) = \frac{2x+1}{x+5}$ ;	b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ;	c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ;
d) $f(x) = x^2 e^x$ ;	e) $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ ;	f) $f(x) = x \ln x$ ;
g) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ ;	h) $f(x) = x - \sin x$ ;	i) $f(x) = e^{- x }$ ;
j) $f(x) = x^3 e^{- x }$ ;	k) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$ ;	l) $f(x) = (x-1) x+3 $ .

2. Určete maximum a minimum funkce:

a) $f(x) = x^3 - 12x + 4, \quad x \in \langle -3, 3 \rangle$ ;	b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1, \quad x \in \langle -2, 1 \rangle$ ;
c) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3, \quad x \in \langle -1, 3 \rangle$ ;	d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2, \quad x \in \langle -2, 3 \rangle$ ;
e) $f(x) = \arccos \frac{1}{x}, \quad x \in \langle 1, +\infty \rangle$ ;	f) $f(x) = x \ln^2 x, \quad x \in (0, 1)$ ;
g) $f(x) = x + e^{-x}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$ ;	h) $f(x) = x e^{-x}, \quad x \in (0, +\infty)$ ;
i) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}, \quad x \in (-1, 1)$ ;	j) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$ .

3. a) Určete rozměry obdélníku s největším obsahem vepsaného do půlkruhu o poloměru  $r$ .  
b) Určete rozměry kvádra se čtvercovou podstavou, který má při objemu  $V$  nejmenší povrch.  
c) Určete rozměry válce s největším objemem vepsaného do koule o poloměru  $r$ .  
d) Určete rozměry válce s největším obsahem pláště vepsaného do koule o poloměru  $r$ .

4. Určete intervaly konvexity a konkavity a body inflexe funkce:

a) $2x^4 - 3x^2 + 2x + 2$ ;	b) $x^5 - 10x^2 + x + 3$ ;	c) $x^4 + x^2 + e^x$ ;
d) $x e^x$ ;	e) $(x^2 + 1) e^x$ ;	f) $x + \sin x$ ;
g) $\frac{x}{x^2+1}$ ;	h) $\frac{ x-1 }{x^2}$ ;	i) $\sqrt[3]{x+3}$ .

5. Určete asymptoty grafu funkce:

a) $\frac{2x+1}{3x-1}$ ;	b) $\frac{x+1}{x^2+3x+2}$ ;	c) $\frac{x^2-2x}{x+1}$ ;	d) $\frac{x^3+1}{x-1}$ ;
e) $x + e^{-x}$ ;	f) $x \ln x$ ;	g) $\operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$ ;	h) $\ln \frac{1-x}{1+x}$ ;
i) $e^x \cos x$ ;	j) $\ln(3e^{2x} - 1)$ .		

## Výsledky

- a) na  $(-\infty, -5)$  a  $(-5, +\infty)$  rostoucí, lokální extrémů nemá; b) na  $(-\infty, -1)$  a  $(1, +\infty)$  rostoucí, na  $(-1, 0)$  a  $(0, 1)$  klesající,  $f(-1) = -2$  ostré lokální maximum,  $f(1) = 2$  ostré lokální minimum; c) na  $(-\infty, -1)$  a  $(1, +\infty)$  klesající, na  $(-1, 1)$  rostoucí,  $f(-1) = -\frac{1}{2}$  ostré lokální minimum,  $f(1) = \frac{1}{2}$  ostré lokální maximum; d) na  $(-\infty, -2)$  a  $(0, +\infty)$  rostoucí, na  $(-2, 0)$  klesající,  $f(-2) = 4e^{-2}$  ostré lokální maximum,  $f(0) = 0$  ostré lokální minimum; e) na  $(0, 1)$  klesající, na  $(1, +\infty)$  rostoucí,  $f(1) = 1$  ostré lokální minimum; f) na  $(0, e^{-1})$  klesající, na  $(e^{-1}, +\infty)$  rostoucí,  $f(e^{-1}) = -e^{-1}$  ostré lokální minimum; g) na  $(-1, 1)$  rostoucí, lokální extrémů nemá; h) na  $\mathbb{R}$  rostoucí, lokální extrémů nemá; i) na  $(-\infty, 0)$  rostoucí, na  $(0, +\infty)$  klesající,  $f(0) = 1$  ostré lokální maximum; j) na  $(-\infty, -3)$  a  $(3, +\infty)$  klesající, na  $(-3, 3)$  rostoucí,  $f(-3) = -27e^{-3}$  ostré lokální minimum,  $f(3) = 27e^{-3}$  ostré lokální maximum; k) na  $(-\infty, 0)$  rostoucí, na  $(0, +\infty)$  klesající,  $f(0) = 1$  ostré lokální maximum; l) na  $(-\infty, -3)$  a  $(-1, +\infty)$  rostoucí, na  $(-3, -1)$  klesající,  $f(-3) = 0$  ostré lokální maximum,  $f(-1) = -4$  ostré lokální minimum.
- a)  $\max f = f(-2) = 20$ ,  $\min f = f(2) = -12$ ; b)  $\max f = f(1) = 6$ ,  $\min f = f(-2) = -3$ ; c)  $\max f = f(3) = 12$ ,  $\min f = f(2) = -13$ ; d)  $\max f = f(0) = f(3) = 2$ ,  $\min f = f(-2) = -18$ ; e)  $\max f$  neexistuje,  $\min f = f(1) = 0$ ; f)  $\max f = f(e^{-2}) = 4e^{-2}$ ,  $\min f = f(1) = 0$ ; g)  $\max f$  neexistuje,  $\min f = f(0) = 1$ ; h)  $\max f = f(1) = e^{-1}$ ,  $\min f$  neexistuje; i)  $\max f$  neexistuje,  $\min f$  neexistuje; j)  $\max f = f(1) = \frac{1}{2}$ ,  $\min f = f(-1) = -\frac{1}{2}$ .
- a) strany  $\sqrt{2}r$  a  $\frac{\sqrt{2}}{2}r$ , obsah  $r^2$ ; b) krychle s hranami  $\sqrt[3]{V}$ , obsah povrchu  $6\sqrt[3]{V^2}$ ; c) poloměr podstavy  $\sqrt{2/3}r$ , výška  $\frac{2}{\sqrt{3}}r$ , objem  $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}r^3$ ; d) poloměr podstavy  $\frac{\sqrt{2}}{2}r$ , výška  $\sqrt{2}r$ , obsah pláště  $2\pi r^2$ ;
- a) na  $(-\infty, -\frac{1}{2})$  a  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  konvexní, na  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  konkávní, inflexe v  $-\frac{1}{2}$  a  $\frac{1}{2}$ ; b) na  $(-\infty, 1)$  konkávní, na  $(1, +\infty)$  konvexní, inflexe v 1; c) na  $\mathbb{R}$  konvexní, body inflexe nemá; d) na  $(-\infty, -2)$  konkávní, na  $(-2, +\infty)$  konvexní, inflexe v  $-2$ ; e) na  $(-\infty, -3)$  a  $(-1, +\infty)$  konvexní, na  $(-3, -1)$  konkávní, inflexe v  $-3$  a  $-1$ ; f) na  $(0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) konkávní, na  $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) konvexní, inflexe v  $k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ); g) na  $(-\infty, -\sqrt{3})$  a  $(0, \sqrt{3})$  konkávní, na  $(-\sqrt{3}, 0)$  a  $(\sqrt{3}, +\infty)$  konvexní, inflexe v  $\pm\sqrt{3}$  a 0; h) na  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 1)$  a  $(3, +\infty)$  konvexní, na  $(1, 3)$  konkávní, inflexe v 3; i) na  $(-\infty, -3)$  konvexní, na  $(-3, +\infty)$  konkávní, inflexe v  $-3$ .
- a)  $x = \frac{1}{3}$ ,  $y = \frac{2}{3}$  v  $\pm\infty$ ; b)  $x = -2$ ,  $y = 0$  v  $\pm\infty$ ; c)  $x = -1$ ,  $y = x - 3$  v  $\pm\infty$ ; d)  $x = 1$ ; e)  $y = x$  v  $+\infty$ ; f) nemá; g)  $y = \frac{\pi}{4}$  v  $\pm\infty$ ; h)  $x = \pm 1$ ; i)  $y = 0$  v  $-\infty$ ; j)  $x = -\frac{1}{2} \ln 3$ ,  $y = 2x + \ln 3$  v  $+\infty$ .

## Neurčitý integrál

1. Spočtěte (využijte linearitu a tabulkové integrály):

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int (x^3 - 2x^2 - 3) dx; & \text{b) } \int \frac{x^3 - x + 4}{x^2} dx; & \text{c) } \int \frac{2x - 5}{x^5} dx; \\ \text{d) } \int \sqrt[4]{x} dx; & \text{e) } \int \sqrt[5]{x^3} dx; & \text{f) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}; \\ \text{g) } \int (3e^x + 4 \sin x) dx; & \text{h) } \int 2 \cos x dx; & \text{i) } \int \frac{2x^2 + 5}{x^2 + 1} dx. \end{array}$$

2. Spočtěte (využijte lineární substitute):

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int (3x - 4)^6 dx; & \text{b) } \int \frac{dx}{3x - 1}; & \text{c) } \int \frac{dx}{(2x + 1)^5}; \\ \text{d) } \int \sqrt[4]{2 - x} dx; & \text{e) } \int 2 \cos 3x dx; & \text{f) } \int (3 \sin \frac{x}{3} - \cos \frac{x}{2}) dx; \\ \text{g) } \int (5e^{2x} + 3e^{-x}) dx; & \text{h) } \int (3^x + 3 \cdot 2^{-2x}) dx. \end{array}$$

3. Spočtěte (využijte vyjádření pomocí dvojnásobného argumentu):

$$\text{a) } \int \sin^2 x dx; \quad \text{b) } \int \cos^2 x dx.$$

4. Spočtěte (využijte metodu per partes):

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int (x - 2) \sin 2x dx; & \text{b) } \int (x + 1) \cos \frac{x}{3} dx; & \text{c) } \int (3x - 1) e^{3x} dx; \\ \text{d) } \int (x + \sqrt{x}) \ln x dx; & \text{e) } \int \frac{\ln x}{x^2} dx; & \text{f) } \int (x^2 - x) \sin \frac{x}{2} dx; \\ \text{g) } \int (x^2 + x + 1) e^{-x} dx; & \text{h) } \int \ln^2 x dx; & \text{i) } \int x \ln^3 x dx. \end{array}$$

5. Spočtěte (využijte metodu per partes a řešte rovnici):

$$\text{a) } \int e^{2x} \cos \frac{x}{3} dx; \quad \text{b) } \int e^{-x} \sin 2x dx; \quad \text{c) } \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

6. Spočtěte pomocí vhodné substitute:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 4} dx; & \text{b) } \int \frac{2x^2}{x^3 - 1} dx; & \text{c) } \int \cotg 2x dx; \\ \text{d) } \int 2x (x^2 - 1)^4 dx; & \text{e) } \int x e^{x^2+1} dx; & \text{f) } \int x \sqrt{1 - x^2} dx; \\ \text{g) } \int 6x^2 \sqrt{1 + x^3} dx; & \text{h) } \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 8}} dx; & \text{i) } \int \frac{4x + 4}{\sqrt[3]{x^2 + 2x + 2}} dx; \\ \text{j) } \int \sin^7 x \cdot \cos x dx; & \text{k) } \int \sin x \cdot \cos^4 x dx; & \text{l) } \int \frac{\ln^3 x}{x} dx. \end{array}$$

## Výsledky

1. a)  $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 3x + c, x \in \mathbb{R}$ ;    b)  $\frac{1}{2}x^2 - \ln|x| - \frac{4}{x} + c, x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty)$ ;  
c)  $-\frac{2}{3x^3} + \frac{5}{4x^4} + c, x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty)$ ;    d)  $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + c, x \in (0, +\infty)$ ;    e)  $\frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c, x \in \mathbb{R}$ ;  
f)  $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c, x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty)$ ;    g)  $3e^x - 4\cos x + c, x \in \mathbb{R}$ ;  
h)  $2\sin x + c, x \in \mathbb{R}$ ;    i)  $2x + 3\operatorname{arctg} x + c, x \in \mathbb{R}$ .
2. a)  $\frac{1}{21}(3x - 4)^7 + c, x \in \mathbb{R}$ ;    b)  $\frac{1}{3}\ln|3x - 1| + c, x \in (-\infty, \frac{1}{3}), x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$ ;  
c)  $\frac{-1}{8(2x+1)^4} + c, x \in (-\infty, -\frac{1}{2}), x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ ;    d)  $-\frac{4}{5}\sqrt[4]{(2-x)^5} + c, x \in (-\infty, 2)$ ;  
e)  $\frac{2}{3}\sin 3x + c, x \in \mathbb{R}$ ;    f)  $-9\cos \frac{x}{3} - 2\sin \frac{x}{2} + c, x \in \mathbb{R}$ ;    g)  $\frac{5}{2}e^{2x} - 3e^{-x} + c, x \in \mathbb{R}$ ;  
h)  $\frac{1}{\ln 3}3^x - \frac{3}{2\ln 2}2^{-2x} + c, x \in \mathbb{R}$ .
3. a)  $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin 2x) + c, x \in \mathbb{R}$ ;    b)  $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin 2x) + c, x \in \mathbb{R}$ .
4. a)  $-\frac{1}{2}(x - 2)\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + c, x \in \mathbb{R}$ ;    b)  $3(x + 1)\sin \frac{x}{3} + 9\cos \frac{x}{3} + c, x \in \mathbb{R}$ ;  
c)  $\frac{1}{3}(3x - 2)e^{3x} + c, x \in \mathbb{R}$ ;    d)  $(\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3})\ln x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + c, x \in (0, +\infty)$ ;  
e)  $-\frac{1}{x}(\ln x + 1) + c, x \in (0, +\infty)$ ;    f)  $-2(x^2 - x - 8)\cos \frac{x}{2} + 4(2x - 1)\sin \frac{x}{2} + c, x \in \mathbb{R}$ ;  
g)  $-(x^2 + 3x + 4)e^{-x} + c, x \in \mathbb{R}$ ;    h)  $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + c, x \in (0, +\infty)$ ;  
i)  $x^2(\frac{1}{2}\ln^3 x - \frac{3}{4}\ln^2 x + \frac{3}{4}\ln x - \frac{3}{8}) + c, x \in (0, +\infty)$ .
5. a)  $\frac{3}{37}(\sin \frac{x}{3} + 6\cos \frac{x}{3})e^{2x} + c, x \in \mathbb{R}$ ;    b)  $-\frac{1}{5}(\sin 2x + 2\cos 2x)e^{-x} + c, x \in \mathbb{R}$ ;  
c)  $\frac{1}{2}\ln^2 x + c, x \in (0, +\infty)$ .
6. a)  $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 4) + c, x \in \mathbb{R}$ ;    b)  $\frac{2}{3}\ln|x^3 - 1| + c, x \in (-\infty, 1), x \in (1, +\infty)$ ;  
c)  $\frac{1}{2}\ln|\sin 2x| + c, x \in (0 + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}$ ;    d)  $\frac{1}{5}(x^2 - 1)^5 + c, x \in \mathbb{R}$ ;  
e)  $\frac{1}{2}e^{x^2+1} + c, x \in \mathbb{R}$ ;    f)  $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + c, x \in (-1, 1)$ ;    g)  $\frac{4}{3}\sqrt{(x^3+1)^3} + c, x \in (-1, +\infty)$ ;  
h)  $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+8} + c, x \in (-2, +\infty)$ ;    i)  $3\sqrt[3]{(x^2+2x+2)^2} + c, x \in \mathbb{R}$ ;  
j)  $\frac{1}{8}\sin^8 x + c, x \in \mathbb{R}$ ;    k)  $-\frac{1}{5}\cos^5 x + c, x \in \mathbb{R}$ ;    l)  $\frac{1}{4}\ln^4 x + c, x \in (0, +\infty)$ .

## Integrace racionálních funkcí a dalších typů funkcí

1. Spočtěte:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int \frac{x^3 - 2x + 5}{x^2 - x - 2} dx; & \text{b) } \int \frac{2x + 1}{(x - 1)(x^2 + 3x + 2)} dx; \\ \text{c) } \int \frac{x^2 + 7x + 1}{(x - 1)(x^2 + x - 2)} dx; & \text{d) } \int \frac{dx}{(x + 2)(x^2 + 4x + 4)}; \\ \text{e) } \int \frac{3x - 2}{x^4 - x^3} dx; & \text{f) } \int \frac{x^4 + x^3 + 11x^2 - 7x}{(x + 1)^3(x^2 - 4x + 4)} dx; \\ \text{g) } \int \frac{-5}{(x + 4)^4} dx; & \text{h) } \int \frac{3}{(2x - 1)^3} dx. \end{array}$$

2. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 10} dx; & \text{b) } \int \frac{5x - 2}{x^2 - 2x + 5} dx; & \text{c) } \int \frac{3x + 4}{x^2 + 4x + 13} dx; \\ \text{d) } \int \frac{x}{x^2 - 6x + 13} dx; & \text{e) } \int \frac{dx}{4x^2 - 12x + 13}; & \text{f) } \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}. \end{array}$$

3. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{3e^{2x}}{e^{4x} + e^{2x} - 2} dx; & \text{b) } \int \frac{2}{e^{3x} + 2} dx; & \text{c) } \int \frac{e^{2x}}{e^{4x} - 2e^{2x} + 2} dx; \\ \text{d) } \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}; & \text{e) } \int \frac{\ln x}{x(\ln^2 x - 4)} dx; & \text{f) } \int \frac{dx}{x \ln x}. \end{array}$$

4. Spočtěte:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int \sin^6 x \cdot \cos^3 x dx; & \text{b) } \int \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx; \\ \text{c) } \int \frac{\cos x}{\cos^2 x - \sin x + 1} dx; & \text{d) } \int \frac{1 - \cos x}{(1 + \cos x) \sin x} dx; \\ \text{e) } \int \operatorname{tg}^4 x dx; & \text{f) } \int \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x} dx; \\ \text{g) } \int \operatorname{cotg}^2 x dx; & \text{h) } \int \frac{dx}{1 - \cos x}. \end{array}$$

5. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int x \sqrt[3]{x - 1} dx; & \text{b) } \int \frac{x - 1}{\sqrt{2x + 1}} dx; & \text{c) } \int \frac{dx}{2 + \sqrt{x + 1}}; \\ \text{d) } \int \frac{dx}{x\sqrt{x + 1}}; & \text{e) } \int \frac{\sqrt{x - 4}}{x} dx; & \text{f) } \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}. \end{array}$$

6. Spočtěte:

$$\text{a) } \int \sqrt{-x^2 + 6x - 8} dx; \quad \text{b) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x}}; \quad \text{c) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}.$$

## Výsledky

1. a)  $\frac{1}{2}x^2 + x + \ln \frac{|x-2|^3}{(x+1)^2} + c, x \in (-\infty, -1), x \in (-1, 2), x \in (2, +\infty);$   
 b)  $\frac{1}{2} \ln \frac{|x^2-1|}{(x+2)^2} + c, x \in (-\infty, -2), x \in (-2, -1), x \in (-1, 1), x \in (1, +\infty);$   
 c)  $-\frac{3}{(x-1)} + \ln \frac{(x-1)^2}{|x+2|} + c, x \in (-\infty, -2), x \in (-2, 1), x \in (1, +\infty);$   
 d)  $-\frac{1}{2(x+2)^2} + c, x \in (-\infty, -2), x \in (-2, +\infty);$   
 e)  $-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + c, x \in (-\infty, 0), x \in (0, 1), x \in (1, +\infty);$   
 f)  $-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)} - \frac{2}{x-2} + \ln |x-2| + c, x \in (-\infty, -1), x \in (-1, 2), x \in (2, +\infty);$   
 g)  $\frac{5}{3(x+4)^3} + c, x \in (-\infty, -4), x \in (-4, +\infty);$   
 h)  $\frac{-3}{4(2x-1)^2} + c, x \in (-\infty, \frac{1}{2}), x \in (\frac{1}{2}, +\infty).$
2. a)  $\frac{1}{2} \ln(x^2+2x+10) + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + c, x \in \mathbb{R};$     b)  $\frac{5}{2} \ln(x^2-2x+5) + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + c, x \in \mathbb{R};$   
 c)  $\frac{3}{2} \ln(x^2+4x+13) - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} + c, x \in \mathbb{R};$     d)  $\frac{1}{2} \ln(x^2-6x+13) + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2} + c, x \in \mathbb{R};$   
 e)  $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{2x-3}{2} + c, x \in \mathbb{R};$     f)  $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{x^2+1} + c, x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty).$
3. a)  $\frac{1}{2} \ln \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+2} + c, x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty);$   
 b)  $x - \frac{1}{3} \ln(e^{3x}+2) + c, x \in \mathbb{R};$   
 c)  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(e^{2x}-1) + c, x \in \mathbb{R};$   
 d)  $\operatorname{arctg} e^x + c, x \in \mathbb{R};$   
 e)  $\frac{1}{2} \ln |\ln^2 x - 4| + c, x \in (0, e^{-2}), x \in (e^{-2}, e^2), x \in (e^2, +\infty);$   
 f)  $\ln |\ln x| + c, x \in (0, 1), x \in (1, +\infty).$
4. a)  $\frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{1}{9} \sin^9 x + c, x \in \mathbb{R};$   
 b)  $\frac{1}{8} \cos^8 x - \frac{1}{6} \cos^6 x + c, x \in \mathbb{R};$   
 c)  $\frac{1}{3} \ln \frac{2+\sin x}{1-\sin x} + c, x \in (-\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z};$   
 d)  $\frac{1}{1+\cos x} + c, x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z};$   
 e)  $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + c, x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z};$   
 f)  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \ln(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}) + c, x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z};$   
 g)  $-\cotg x - x + c, x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z};$   
 h)  $-\cotg \frac{x}{2} + c, x \in (0 + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$
5. a)  $\frac{3}{7} \sqrt[3]{(x-1)^7} + \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x-1)^4} + c, x \in \mathbb{R};$     b)  $\frac{1}{6} \sqrt{(2x+1)^3} - \frac{3}{2} \sqrt{(2x+1)} + c,$   
 $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty);$     c)  $2\sqrt{x+1} - 4 \ln(2 + \sqrt{x+1}) + c, x \in (-1, +\infty);$     d)  $\ln \frac{|\sqrt{x+1}-1|}{\sqrt{x+1}+1} + c,$   
 $x \in (-1, 0), x \in (0, +\infty);$     e)  $2\sqrt{x-4} - 4 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x-4}}{2} + c, x \in (4, +\infty);$   
 f)  $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + c, x \in (0, +\infty).$
6. a)  $\frac{1}{2} \arcsin(x-3) + \frac{1}{2} (x-3)\sqrt{-x^2+6x-8} + c, x \in (2, 4);$     b)  $\ln |\sqrt{x^2+4x} + x + 2| + c,$   
 $x \in (-\infty, -4), x \in (0, +\infty);$     c)  $\ln(\sqrt{x^2-2x+10} + x - 1) + c, x \in \mathbb{R}.$



## Určitý integrál

1. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_0^2 (3x^2 - 2x) \, dx; & \text{b) } \int_1^2 \frac{dx}{x^2}; & \text{c) } \int_1^e \frac{dx}{x}; \\ \text{d) } \int_2^6 \frac{dx}{x}; & \text{e) } \int_1^4 \sqrt{x} \, dx; & \text{f) } \int_{-7}^0 \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}} \, dx; \\ \text{g) } \int_0^\pi \sin 6x \, dx; & \text{h) } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \frac{x}{2} \, dx; & \text{i) } \int_0^1 3^x \, dx. \end{array}$$

2. Spočtěte:

$$\text{a) } \int_0^2 |x-1| \, dx; \quad \text{b) } \int_{-2}^3 |x^2-1| \, dx; \quad \text{c) } \int_2^4 e^{|2x-6|} \, dx.$$

3. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_0^\pi (2x+1) \sin \frac{x}{2} \, dx; & \text{b) } \int_0^\pi (4x-1) \cos 2x \, dx; & \text{c) } \int_{-1}^0 (3x+2) e^{3x} \, dx; \\ \text{d) } \int_0^\pi x^2 \cos x \, dx; & \text{e) } \int_{-1}^0 x^3 e^{-x} \, dx; & \text{f) } \int_0^1 x \arctg x \, dx. \end{array}$$

4. Spočtěte:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^2(x-1)} \, dx; & \text{b) } \int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)} \, dx; \\ \text{c) } \int_{-2}^3 \frac{2x^3-3x^2-20x-14}{x^2-x-12} \, dx; & \text{d) } \int_3^4 \frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x} \, dx; \\ \text{e) } \int_3^5 \frac{x-2}{x^2-6x+13} \, dx; & \text{f) } \int_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}. \end{array}$$

5. Spočtěte:

$$\text{a) } \int_1^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} \, dx; \quad \text{b) } \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} \, dx; \quad \text{c) } \int_0^\pi \operatorname{tg} \frac{x}{3} \, dx.$$

6. Spočtěte:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_0^{\ln 2} \frac{e^x-1}{e^x+1} \, dx; & \text{b) } \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos x \, dx; \\ \text{c) } \int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 2 \cos x + 2} \, dx; & \text{d) } \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \, dx; \\ \text{e) } \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}. \end{array}$$

## Výsledky

1. a) 4; b)  $\frac{1}{2}$ ; c) 1; d)  $\ln 3$ ; e)  $\frac{14}{3}$ ; f)  $-9$ ; g) 0; h)  $2\sqrt{2}$ ; i)  $\frac{2}{\ln 3}$ .
2. a) 1; b)  $\frac{28}{3}$ ; c)  $e^2 - 1$ .
3. a) 10; b) 0; c)  $(1 + 2e^{-3})/3$ ; d)  $-2\pi$ ; e)  $2e - 6$ ; f)  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ .
4. a)  $2 \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{2}$ ; b)  $\frac{\pi}{4}$ ; c)  $7 \ln 6$ ; d)  $\ln 3 - 1$ ; e)  $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{8}$ ; f)  $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ .
5. a) 3; b)  $\frac{4}{3}$ ; c)  $3 \ln 2$ .
6. a)  $\ln \frac{9}{8}$ ; b)  $\frac{1}{3}$ ; c)  $-\frac{1}{4} \pi$ ; d)  $2 \ln 2 - 1$ ; e)  $2 - \ln 2$ .

## Nevlastní integrál

1. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3}; & \text{b) } \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x-1)^4}; & \text{c) } \int_{-8}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}; \\ \text{d) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}; & \text{e) } \int_0^{+\infty} \sin x \, dx; & \text{f) } \int_{-\infty}^0 e^x \, dx; \\ \text{g) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2-4x+5} \, dx. & & \end{array}$$

2. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_{1/2}^{+\infty} x e^{-2x} \, dx; & \text{b) } \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \, dx; & \text{c) } \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} \, dx; \\ \text{d) } \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2} \, dx; & \text{e) } \int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos 3x \, dx; & \text{f) } \int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin 3x \, dx. \end{array}$$

3. Spočtěte:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x+3}; & \text{b) } \int_1^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+2x+5} \, dx; \\ \text{c) } \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2-2x-3}; & \text{d) } \int_0^{+\infty} \frac{x+4}{(x+1)(x^2+3x+2)} \, dx. \end{array}$$

4. Spočtěte:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{2x}+4e^x+3}; & \text{b) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}; \\ \text{c) } \int_0^e \frac{dx}{x(\ln^2 x+2\ln x+5)}; & \text{d) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln^2 x+3\ln x+2)}; \\ \text{e) } \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}; & \text{f) } \int_6^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+3}}. \end{array}$$

## Výsledky

1. a)  $\frac{1}{8}$ ; b)  $\frac{1}{3}$ ; c)  $-6$ ; d)  $+\infty$ ; e) neexistuje; f)  $1$ ; g) neexistuje.

2. a)  $\frac{1}{2e}$ ; b)  $1$ ; c)  $24$ ; d)  $2$ ; e)  $\frac{2}{13}$ ; f)  $\frac{3}{13}$ .

3. a)  $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ ; b)  $+\infty$ ; c)  $\frac{1}{4}\ln 5$ ; d)  $3 - 2\ln 2$ .

4. a)  $\frac{1}{6}\ln 2$ ; b)  $\frac{1}{4}\pi$ ; c)  $\frac{3}{8}\pi$ ; d)  $\ln 2$ ; e)  $\frac{1}{3}\pi$ ; f)  $\frac{1}{2}\ln 5$ .

## Aplikace určitého integrálu

- Spočtete střední hodnotu funkce  $f$  na daném intervalu:
  - $f(x) = 3x, x \in \langle -1, 1 \rangle$ ;
  - $f(x) = x^2, x \in \langle 0, 1 \rangle$ ;
  - $f(x) = e^x, x \in \langle 0, 2 \rangle$ ;
  - $f(x) = \sin x, x \in \langle 0, \pi \rangle$ .
- Spočtete obsahy následujících množin:
  - $\{[x, y] : x \in \langle 0, \pi \rangle, 0 \leq y \leq \sin x\}$  (plocha pod obloukem sinusoidy);
  - $\{[x, y] : x \in \langle 1, e \rangle, 0 \leq y \leq 1/x\}$ ;
  - $\{[x, y] : x \in \langle a, b \rangle, 0 \leq y \leq x^2\}$ ;
  - $\{[x, y] : x \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq e^{-|x|}\}$ ;
  - $\{[x, y] : x \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq 1/(x^2 + 1)\}$ .
- Spočtete obsah omezené plochy ohraničené grafy funkcí  $f, g$ :
  - $f(x) = 0, g(x) = x^2 - 2x$ ;
  - $f(x) = x, g(x) = x^4$ ;
  - $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$ .
- Spočtete obsah elipsy s poloosami  $a, b$ . (Nápověda: rovnice elipsy je  $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ .)
- Spočtete délku grafu funkce  $f$  na daném intervalu:
  - $f(x) = a \cosh \frac{x}{a}$  ( $a > 0$ ),  $x \in \langle 0, b \rangle$  ( $b > 0$ );
  - $f(x) = \ln(x^2 - 1), x \in \langle 2, 5 \rangle$ ;
  - $f(x) = \ln \sin x, x \in \langle \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi \rangle$ ;
  - $f(x) = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}, x \in \langle -1, 1 \rangle$ .
- Spočtete objem rotačního elipsoidu, vzniklého rotací elipsy s poloosami  $a, b$  kolem její osy délky  $2a$ . (Nápověda: použijte rovnici elipsy  $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ .)
- Spočtete objem rotačního paraboloidu, který má výšku  $v$  a poloměr podstavy  $r$ .
- Spočtete povrch pláště kulového pásu s výškou  $v$  v kouli o poloměru  $r$ .
- Spočtete povrch anuloidu, který vznikne rotací kružnice o poloměru  $r$  se středem  $[0, R]$  ( $R > r$ ) kolem osy  $x$ .
- Určete těžiště půlkružnice.
- Určete těžiště plochy pod jedním obloukem sinusoidy.

## Výsledky

1. a) 0;    b)  $\frac{1}{3}$ ;    c)  $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$ ;    d)  $\frac{2}{\pi}$ .
2. a) 2;    b) 1;    c)  $(b^3 - a^3)/3$ ;    d) 2;    e)  $\pi$ .
3. a)  $\frac{4}{3}$  (interval  $\langle 0, 2 \rangle$ );    b)  $\frac{3}{10}$  (interval  $\langle 0, 1 \rangle$ );    c)  $\frac{1}{3}$  (interval  $\langle 0, 1 \rangle$ ).
4.  $\pi ab$  (čtyřikrát obsah pod grafem funkce  $b\sqrt{1 - (x/a)^2}$ , použije se například substituce  $x = a \sin t$ ).
5. a)  $a \sinh \frac{b}{a}$ ;    b)  $3 + \ln 2$ ;    c)  $\ln 3$ ;    d) 4.
6.  $\frac{4}{3} \pi ab^2$ .
7.  $\frac{1}{2} \pi r^2 v$  (funkce  $f(x) = r\sqrt{x/v}$  na intervalu  $\langle 0, v \rangle$ ).
8.  $2\pi r v$  (nezávisí na jeho poloze v kouli).
9.  $4\pi^2 R r$  (sečtením integrálů funkcí  $R \pm \sqrt{r^2 - x^2}$  na  $\langle -r, r \rangle$  dostaneme  $4\pi r \int_{-r}^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4\pi r R [\arcsin \frac{x}{r}]_{-r}^r$ ).
10.  $[0, \frac{2}{\pi} r]$  pro  $\sqrt{r^2 - x^2}$  na intervalu  $\langle -r, r \rangle$ .
11.  $[\frac{1}{2} \pi, \frac{1}{8} \pi]$  pro  $\sin x$  na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ .

## Číselné řady

1. Určete součet geometrické řady:

a)  $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots$ ;

b)  $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \dots$ ;

c)  $3 + 4 + \frac{16}{3} + \frac{64}{9} + \dots$ ;

d)  $1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8} + \dots$ .

2. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady:

a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ ;

b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+3}$ ;

c)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$ ;

d)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$ ;

e)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$ ;

f)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-k)^7}{2^k}$ ;

g)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k!}$ ;

h)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{8^k}$ ;

i)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ ;

j)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3-k}{k}\right)^{k^2}$ ;

k)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2-4k-5}$ ;

l)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{3k-7}$ ;

m)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-k}{k+2}\right)^k$ ;

n)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^{3k+1}}{(k-1)!}$ ;

o)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-k)^k}{(k+1)!}$ .

## Výsledky

1. a) 3 (kvocient  $\frac{2}{3}$ );    b)  $\frac{1}{4}$  (kvocient  $-\frac{1}{3}$ );    c)  $+\infty$  (kvocient  $\frac{4}{3} \geq 1$ ).    d) osciluje (kvocient  $-\frac{3}{2} \leq -1$ ).
  
2. a) konverguje (Leibnizovo kr.), ne absolutně (integrální kr.);    b) konverguje (Leibnizovo kr.), ne absolutně (integrální kr.);    c) nekonverguje (integrální kr.);    d) absolutně (integrální kr.);    e) absolutně (podílové/odmocninové kr.);    f) absolutně (podílové/odmocninové kr.);    g) absolutně (podílové/odmocninové kr.);    h) nekonverguje (nutná podmínka konvergence nebo odmocninové/podílové kr.);    i) absolutně (podílové kr.:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \frac{\ln \frac{x}{x+1}}{1/x} \stackrel{I'H}{=} e^{-1} < 1$ );    j) absolutně (odmocninové kr.:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left|\frac{3-k}{k}\right|^k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \frac{\ln \frac{x-3}{x}}{1/x} \stackrel{I'H}{=} e^{-3} < 1$ );    k) absolutně (integrální kr. od  $k = 2$ );    l) konverguje (Leibnizovo kr. od  $k = 3$ ), ne absolutně (integrální kr. od  $k = 3$ );    m) nekonverguje (neplatí nutná podmínka konvergence:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left|\frac{-k}{k+2}\right|^k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \frac{\ln \frac{x}{x+2}}{1/x} \stackrel{I'H}{=} e^{-2} \neq 0$ ).    n) absolutně (podílové kr.)    o) nekonverguje (neplatí nutná podmínka konvergence:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|(-k)^k|}{(k+1)!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{2} \cdot \frac{k}{3} \cdots \frac{k}{k} \cdot \frac{k}{k+1}\right) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{2} \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{k}{k+1}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{2+2/k} = +\infty$ ).



## Separovatelné diferenciální rovnice

1. Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$x' = \frac{e^{-x}}{t}, \quad x(1) = 0.$$

2. Řešte diferenciální rovnici  $x' = x^{-2}$  s počáteční podmínkou:

a)  $x(1) = 1$ ;                      b)  $x(-2) = 1$ ;                      c)  $x(-2) = -2$ .

3. Řešte diferenciální rovnici  $x' = -t/x$  s počáteční podmínkou:

a)  $x(1) = 1$ ;                      b)  $x(4) = -3$ .

4. Řešte diferenciální rovnici  $x' = -x^2$  s počáteční podmínkou:

a)  $x(-1) = 0$ ;                      b)  $x(1) = 3$ ;                      c)  $x(-2) = -1$ .

5. Řešte diferenciální rovnici  $x' = (x^2 - x)/t$  s počáteční podmínkou:

a)  $x(1) = 2$ ;    b)  $x(-2) = 1$ ;    c)  $x(1) = \frac{3}{4}$ ;    d)  $x(3) = 0$ ;    e)  $x(1) = -1$ .

6. Řešte diferenciální rovnici  $x' = (1 - x^2)/(2tx)$  s počáteční podmínkou:

a)  $x(1) = \frac{1}{2}$ ;    b)  $x(-2) = 1$ ;    c)  $x(2) = 2$ ;    d)  $x(3) = -2$ ;    e)  $x(-3) = -\frac{2}{3}$ .

7. Řešte diferenciální rovnici  $x' = 2\sqrt{x}$  s počáteční podmínkou:

a)  $x(0) = 1$ ;                      b)  $x(0) = 0$ .

## Výsledky

1.  $x(t) = \ln(1 + \ln t)$ ,  $t \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ ; obecné řešení je  $x(t) = \ln \ln ct$  pro  $c \neq 0$  na intervalu  $(-\infty, \frac{1}{c})$  pro  $c < 0$ ,  $(\frac{1}{c}, +\infty)$  pro  $c > 0$ .
2. Obecné řešení  $x(t) = \sqrt[3]{3(t-c)}$  na intervalech  $(-\infty, c)$  a  $(c, +\infty)$ ; a)  $x(t) = \sqrt[3]{3t-2}$ ,  $t \in (\frac{2}{3}, +\infty)$ ; b)  $x(t) = \sqrt[3]{3t+7}$ ,  $t \in (-\frac{7}{3}, +\infty)$ ; c)  $x(t) = \sqrt[3]{3t-2}$ ,  $t \in (-\infty, \frac{2}{3})$ .
3. Obecné řešení  $x(t) = \sqrt{c^2 - t^2}$ ,  $x(t) = -\sqrt{c^2 - t^2}$ ,  $t \in (-c, c)$  pro  $c > 0$ ; a)  $x(t) = \sqrt{2-t^2}$ ,  $t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ; b)  $x(t) = -\sqrt{25-t^2}$ ,  $t \in (-5, 5)$ .
4. Stacionární řešení  $x(t) = 0$  na intervalu  $\mathbb{R}$ , nestacionární řešení  $x(t) = \frac{1}{t-c}$  na intervalech  $(-\infty, c)$  a  $(c, +\infty)$ ; a)  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ; b)  $x(t) = \frac{3}{3t-2}$ ,  $t \in (\frac{2}{3}, +\infty)$ ; c)  $x(t) = \frac{1}{t+1}$ ,  $t \in (-\infty, -1)$ .
5. Stacionární řešení  $x(t) = 0$ ,  $x(t) = 1$  na intervalech  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, +\infty)$ ; nestacionární řešení  $x(t) = \frac{1}{1-ct}$  pro  $c \neq 0$  na maximálních intervalech neobsahujících  $0, \frac{1}{c}$ ; a)  $x(t) = \frac{2}{2-t}$ ,  $t \in (0, 2)$ ; b)  $x(t) = 1$ ,  $t \in (-\infty, 0)$ ; c)  $x(t) = \frac{3}{3+t}$ ,  $t \in (0, +\infty)$ ; d)  $x(t) = 0$ ,  $t \in (0, +\infty)$ ; e)  $x(t) = \frac{1}{1-2t}$ ,  $t \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ .
6. Stacionární řešení  $x(t) = 1$ ,  $x(t) = -1$  na intervalech  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, +\infty)$ ; nestacionární řešení  $x(t) = \sqrt{1-c/t}$  a  $x(t) = -\sqrt{1-c/t}$  na maximálních intervalech disjunktních s intervalem obsahujícím  $0, c$ ; a)  $x(t) = \sqrt{1-3/(4t)}$ ,  $t \in (\frac{3}{4}, +\infty)$ ; b)  $x(t) = 1$ ,  $t \in (-\infty, 0)$ ; c)  $x(t) = \sqrt{1+6/t}$ ,  $t \in (0, +\infty)$ ; d)  $x(t) = -\sqrt{1+9/t}$ ,  $t \in (0, +\infty)$ ; e)  $x(t) = -\sqrt{1+5/(3t)}$ ,  $t \in (-\infty, -\frac{5}{3})$ .
7. Stacionární řešení  $x(t) = 0$  na intervalu  $\mathbb{R}$ , nestacionární řešení  $x(t) = (t-c)^2$  na intervalech  $(c, +\infty)$ , dají se prodloužit stacionárním řešením na  $\mathbb{R}$ ;

$$\text{a) } x(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, -1), \\ (t+1)^2, & t \in \langle -1, +\infty \rangle; \end{cases}$$

$$\text{b) } x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{nebo} \quad x(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, c), \\ (t-c)^2, & t \in \langle c, +\infty \rangle, \end{cases} \quad (c \geq 0).$$