

## 1. Reálná čísla

1. Určete maximum, minimum, supremum a infimum následujících množin:

a)  $\mathbb{Z}$ ;

b)  $M = (-1, 1) \cup \langle 3, 5 \rangle$ ;

c)  $M = \langle 0, \sqrt{2} \rangle \cap \mathbb{Q}$ ;

d)  $M = \{1 + 2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ ;

e)  $M = \langle 0, \frac{1}{3} \rangle \cap \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ ;

f)  $M = \{(-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1} : n \in \mathbb{N}\}$ .

## Výsledky

1. a)  $\max \mathbb{Z}$  ani  $\min \mathbb{Z}$  neexistují,  $\sup \mathbb{Z} = +\infty$ ,  $\inf \mathbb{Z} = -\infty$ ;
- b)  $\max M = 5 = \sup M$ ,  $\min M$  neexistuje,  $\inf M = -1$ ;
- c)  $\max M$  neexistuje,  $\sup M = \sqrt{2}$ ,  $\min M = 0 = \inf M$ ;
- d)  $\max M = \frac{3}{2} = \sup M$ ,  $\min M$  neexistuje,  $\inf M = 1$ ;
- e)  $\max M = \frac{1}{4} = \sup M$ ,  $\min M$  neexistuje,  $\inf M = 0$ ;
- f)  $\max M$  ani  $\min M$  neexistují,  $\sup M = 1$ ,  $\inf M = -1$ .

## 2. Funkce

1. Určete definiční obor funkce:

- a)  $\frac{x^2}{x+1}$ ;      b)  $\frac{x+2}{x^2-x-6}$ ;      c)  $\sqrt{2+x-x^2}$ ;  
d)  $\sqrt{3x-x^3}$ ;      e)  $\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ ;      f)  $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x}$ ;  
g)  $\sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ;      h)  $\sqrt{1-|x|}$ ;      i)  $\log_2 \log_3 \log_4 x$ ;  
j)  $\frac{\ln(x+1)}{2x-1}$ ;      k)  $\ln|\sin x|$ ;      l)  $\arcsin \sqrt{\frac{2x+1}{2}}$ ;  
m)  $(\operatorname{arctg}(x-1))^{1/(x-3)}$ ;      n)  $\log(1 - \log(x^2 - 4x + 13))$ .

2. Vyšetřete omezenost funkce:

- a)  $\frac{3}{x-2}$ ;      b)  $x^2 + 6x - 4$ ;      c)  $-2x^2 + x + 5$ ;      d)  $\frac{1}{x^2+1}$ .

3. Určete, zda je funkce sudá nebo lichá:

- a)  $5x - x^3$ ;      b)  $x^4 + 3x^2 - 1$ ;      c)  $x^2 + 3x - 2$ ;  
d)  $2^x - 2^{-x}$ ;      e)  $\ln \frac{1-x}{1+x}$ ;      f)  $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ ;  
g)  $\log(\sqrt{x^2+1} + x)$ ;      h)  $\frac{\sin x}{x}$ ;      i)  $2^{-x^2}$ ;  
j)  $\sin x - \cos x$ ;      k)  $\sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$ .

4. Vyšetřete, zda je funkce periodická, a pokud ano, určete její periodu:

- a)  $\sin 3x$ ;      b)  $5 \cos 2x$ ;      c)  $4 \sin \pi x$ ;  
d)  $-3 \cos(4x + 5)$ ;      e)  $\sqrt{\operatorname{tg} x}$ ;      f)  $\operatorname{tg} \sqrt{x}$ ;  
g)  $2 \sin 3x + 3 \sin 2x$ ;      h)  $\sin(5\pi x + \frac{\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{6} - 3\pi x)$ .

5. Dokažte (rozšiřující):

- a)  $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ ;  
b)  $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ .

## Výsledky

- a)  $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ ;      b)  $(-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, +\infty)$ ;      c)  $\langle -1, 2 \rangle$ ;  
d)  $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup \langle 0, \sqrt{3} \rangle$ ;      e)  $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ ;      f)  $(-\infty, -1) \cup \{1\}$ ;      g)  $\emptyset$ ;  
h)  $\langle -1, 1 \rangle$ ;      i)  $(4, +\infty)$ ;      j)  $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$ ;      k)  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$ ;      l)  $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ ;  
m)  $(1, 3) \cup (3, +\infty)$  (přepis funkce na  $\exp(-\frac{1}{x} \ln \operatorname{arctg}(x+1))$ );      n)  $(1, 3)$ .
- a) není omezená ani zdola, ani shora;      b) omezená zdola;      c) omezená shora;  
d) omezená.
- (Řešení rovnic  $f(-x) = f(x)$  a  $f(-x) = -f(x)$ .)      a) lichá;      b) sudá;      c) ani sudá ani lichá;  
d) lichá;      e) lichá;      f) lichá;      g) lichá;      h) sudá;      i) sudá;      j) ani sudá ani lichá;      k) sudá.
- a)  $\frac{2}{3}\pi$ ;      b)  $\pi$ ;      c) 2;      d)  $\frac{1}{2}\pi$ ;      e)  $\pi$ ;      f) není periodická;      g)  $2\pi$  (společný násobek period sčítanců:  $\frac{2\pi}{3}$  a  $\pi$ );      h) 2 (společný násobek period sčítanců:  $\frac{2}{5}$  a  $\frac{2}{3}$ ).

### 3. Limity funkcí

1. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 + 3}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 1}{x^4 + 1}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 2x + 1}{2x^2 + 3x - 1}; \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - 2x + 5}{x^3 + x^2 + 1}; & \text{e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 + x + 3}; \\ \text{g)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 + x^3 + 2}{2x^3 - 1}; & \text{h)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^5}{1 + x^2}. \end{array}$$

2. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x - 2}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}; \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 4}{x^2 - 4x + 3}; & \text{e)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 1}; & \text{f)} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right). \end{array}$$

3. Spočtěte (rozšiřující):

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x - 1} + 2}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2}{\sqrt{x^2 - 4} - 2}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{4x^2 - 2} + 1}. \end{array}$$

4. Spočtěte (rozšiřující):

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x - 2} - 2}{x - 6}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt{x + 2} - 1}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x). \end{array}$$

5. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos 2x}{1 - \sin x}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}; & \text{e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + \cos x); & \text{f)} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} \cos(3x + 1). \end{array}$$

6. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{2x^2 + 3x - 5}; & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}; & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}; \\ \text{d)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x}; & \text{e)} \lim_{x \rightarrow \pi} \ln^2(1 + \cos x); & \text{f)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1/x}; \\ \text{g)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin \frac{1 - x}{1 + x}; & \text{h)} \lim_{x \rightarrow 2} x^{-2} \sqrt{x}. \end{array}$$

7. Spočtěte limity funkce v hraničních bodech definičního oboru:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{\cos x}{2^x - 1}; & \text{b)} \operatorname{arctg} \frac{1 + x}{1 - x}; & \text{c)} \left( \frac{x + 1}{x - 1} \right)^{1/(x-3)}. \end{array}$$

## Výsledky

1. (Vytýkání největších mocnin v čitateli a jmenovateli a jejich krácení.) a) 0; b) 0;  
c) 2; d) 3; e)  $+\infty$ ; f)  $-\infty$ ; g)  $+\infty$ ; h)  $+\infty$ .
2. (Vytýkání kořenových činitelů v čitateli a jmenovateli a jejich krácení.) a)  $\frac{2}{3}$ ; b) 0;  
c) 3 ( $\sqrt{x^2} = |x| = -x$  v okolí  $-\infty$ ); d) neexistuje,  $\mp\infty$  v  $3\pm$ ; e)  $+\infty$ ; f)  $-\frac{1}{2}$  (po sečtení zlomků).
3. (Vytýkání vhodných mocnin  $x$  v čitatele a jmenovateli a jejich krácení.) a)  $+\infty$ ;  
b) 3; c)  $-1$ .
4. a)  $\frac{1}{4}$  (rozšířit  $\sqrt{x-2} + 2$ ); b) 2 (rozšířit  $\sqrt{x+2} + 1$ ); c) 1 (rozšířit  $\sqrt{x^2 + 2x + x}$ ).
5. a) 1 (zkrátit  $x$ ,  $|\frac{\text{omez.}}{\infty}| = 0$ ); b)  $-\infty$  ( $|\frac{-1}{0+}| = -\infty$ ); c) nelze počítat (def. obor je  $(-1, 1)$ ),  $+\infty$  v  $1-$  ( $|\frac{1}{0+}| = +\infty$ ); d) 0 ( $|\frac{\text{omez.}}{\infty}| = 0$ ); e)  $+\infty$  ( $|+\infty + \text{omez.}| = +\infty$ );  
f) 0 ( $|0 \cdot \text{omez.}| = 0$ ).
6. a)  $+\infty$ ; b) nelze počítat,  $+\infty$  v  $1+$ ; c) neexistuje; d) 1; e)  $+\infty$ ; f)  $+\infty$ ;  
g)  $-\frac{1}{2}\pi$ ; h) neexistuje, 0 v  $2-$ ,  $+\infty$  v  $2+$  (přepis funkce na  $\exp(\frac{1}{x-2} \cdot \ln x)$ ).
7. a) neexistuje v  $-\infty$ ,  $\pm\infty$  v  $0\pm$ , 0 v  $+\infty$ ;  
b)  $-\frac{1}{4}\pi$  v  $\pm\infty$ ,  $\mp\frac{1}{2}\pi$  v  $1\pm$ ;  
c) 1 v  $\pm\infty$ ,  $+\infty$  v  $-1-$  a v  $3+$ , 0 v  $1+$  a v  $3-$  (přepis funkce na  $\exp(\frac{1}{x-3} \cdot \ln \frac{x+1}{x-1})$ ).

## 4. Derivace funkce

1. Spočtěte derivaci funkce:

a)  $3x^2 - 5x + 1$ ;

b)  $2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$ ;

c)  $\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} + \frac{2}{x^3}$ ;

d)  $2e^{3x} + 4e^{-2x}$ ;

e)  $3 \sin 2x - 5 \cos 3x$ ;

f)  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

2. Spočtěte derivaci funkce:

a)  $(3x^2 - 5x + 1)e^{2x}$ ;

b)  $\sqrt[4]{x} \cos x$ ;

c)  $e^x \sin 3x$ ;

d)  $x^2 e^x \cos x$ ;

e)  $x \cdot \sin x \cdot \operatorname{arctg} x$ ;

f)  $\frac{x}{x^3 + 1}$ ;

g)  $\frac{e^x}{\sin x}$ ;

h)  $\operatorname{tg} x$ ;

i)  $\operatorname{cotg} x$ .

3. Spočtěte derivaci funkce

a)  $\sin(2x + 5)$ ;

b)  $e^{-3x+1}$ ;

c)  $(x^2 + 1)^4$ ;

d)  $\sqrt{x^3 + 1}$ ;

e)  $\ln^2 x$ ;

f)  $\ln \operatorname{tg} x$ ;

g)  $\sin \ln(x^3 + 1)$ ;

h)  $\sqrt{\ln^2 x + 1}$ ;

i)  $\ln \ln \sin x$ .

4. Spočtěte derivaci funkce:

a)  $10^x$ ;

b)  $x^x$ ;

c)  $x^{\sin x}$ ;

d)  $x^{x^2}$ ;

e)  $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ ;

f)  $(x^2 + 1)^{\cos \pi x}$ .

5. Spočtěte derivaci druhého řádu:

a)  $x e^{x^2}$ ;

b)  $(x^2 + 1) \operatorname{arctg} x$ ;

c)  $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

6. Vyjádřete derivaci řádu  $n$  (teorie):

a)  $e^{ax}$ ;

b)  $x e^x$ ;

c)  $x \ln x$ .

7. Podle definice spočtěte derivaci funkce  $\frac{1}{x}$  (teorie).

## Výsledky

(Na definičním oboru kromě uvedených výjimek.)

- (tabulkové derivace, linearita) a)  $6x - 5$ ; b)  $x^{-1/2} + x^{-2}$ ; c)  $-\frac{3}{5}x^{-8/5} - 6x^{-4}$ ;  
d)  $6e^{3x} - 8e^{-2x}$ ; e)  $6\cos 2x + 15\sin 3x$ ; f)  $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$ .
- (derivace součinu, podílu) a)  $(6x^2 - 4x - 3)e^{2x}$ ; b)  $\frac{1}{4}x^{-3/4}\cos x - \sqrt[4]{x}\sin x$ ,  
 $x \neq 0$ ; c)  $e^x(\sin 3x + 3\cos 3x)$ ; d)  $e^x((2x + x^2)\cos x - x^2\sin x)$ ;  
e)  $\sin x \arctg x + x \cos x \arctg x + \frac{x \sin x}{x^2 + 1}$ ; f)  $\frac{1 - 2x^3}{(x^3 + 1)^2}$ ; g)  $\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$ ;  
h)  $\frac{1}{\cos^2 x}$ ; i)  $-\frac{1}{\sin^2 x}$ .
- (derivace složené funkce) a)  $2\cos(2x + 5)$ ; b)  $-3e^{-3x+1}$ ; c)  $8x(x^2 + 1)^3$ ;  
d)  $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$ ,  $x \neq -1$ ; e)  $\frac{2}{x}\ln x$ ; f)  $\frac{1}{\sin x \cos x}$ ; g)  $\cos \ln(x^3 + 1) \cdot \frac{3x^2}{x^3 + 1}$ ; h)  $\frac{\ln x}{x\sqrt{\ln^2 x + 1}}$ ;  
i) funkce není definována pro žádné  $x$ .
- ( $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$ ) a)  $10^x \ln 10$ ; b)  $x^x(\ln x + 1)$ ; c)  $x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$ ;  
d)  $x^{x^2+1}(2\ln x + 1)$ ; e)  $(\frac{x}{x+1})^x(\frac{1}{x+1} + \ln \frac{x}{x+1})$ ; f)  $(x^2+1)^{\cos \pi x}(-\sin \pi x \cdot \pi \cdot \ln(x^2+1) + \frac{2x \cos \pi x}{x^2+1})$ .
- a)  $2e^{x^2}(2x^3 + 3x)$ ; b)  $\frac{2x}{x^2+1} + 2\arctg x$ ; c)  $\frac{-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$ .
- a)  $a^n e^{ax}$ ; b)  $e^x(x + n)$ ; c)  $\ln x + 1$  pro  $n = 1$ ,  $(-1)^n (n - 2)! x^{1-n}$  pro  $n \geq 2$ .
- $(\frac{1}{x})' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$ ,  $x \neq 0$ .



## 5. Aplikace derivací

1. Spočtěte

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\ln x}; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}; & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x}{x-1}; \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{(x-1)^2}; & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}; & \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+2}; & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{5x+3}; \\ \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1}; & \text{j) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}; & \text{k) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}. \end{array}$$

2. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{e^x}; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 8)}{x^2 - 3x}; \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 8)}{x^2 - 3x}; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin 3x}. \end{array}$$

3. Spočtěte:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} x \cot x; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\pi - 2 \operatorname{arctg} x); \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x \quad (a > 0).$$

4. Spočtěte:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x}.$$

5. Spočtěte (rozšiřující):

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \cos \frac{1}{x} \right)^{x^2}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\sin x}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sqrt{\frac{\sin x}{x}}.$$

6. Určete rovnice tečny a normály grafu funkce  $f$  v bodě  $[a, f(a)]$ :

$$\text{a) } f(x) = \ln x, \quad a = 1; \quad \text{b) } f(x) = 2x^2 - 1, \quad a = \frac{1}{2}.$$

7. Určete rovnice tečny a normály grafu  $x^2$  se směrnici 2 (aplikace teorie).

8. Určete rovnici tečny grafu  $x^2$  bodem  $[2, 3]$  (aplikace teorie).

9. Určete Taylorův polynom řádu  $n$  funkce  $f$  v bodě  $a$ :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = x^2 - 1, \quad a = 2, \quad n = 3; & \text{b) } f(x) = x e^{-2x}, \quad a = 0, \quad n = 3; \\ \text{c) } f(x) = e^{2x} \cos x, \quad a = 0, \quad n = 3; & \text{d) } f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad a = 0, \quad n = 3; \\ \text{e) } f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad a = 0, \quad n = 3; & \text{f) } f(x) = \ln(1+x), \quad a = 0, \quad n = 4. \end{array}$$

## Výsledky

- (l'Hospitalovo pravidlo) a)  $\frac{3}{4}$ ; b)  $-\pi$ ; c) 2; d) 0; e) neexistuje,  $\pm\infty$  v  $1\pm$ ;  
f)  $\frac{2}{3}$ ; g) 0; h)  $+\infty$ ; i) 0; j)  $\frac{1}{3}$ ; k) 0.
- (l'Hospitalovo pravidlo opakovaně) a)  $\frac{1}{2}$ ; b) 0; c) 2; d) 0; e) nelze počítat,  
1 v  $0+$  (před druhým použitím vytknout limitu podílu kosinů).
- (upravit na podíl a použít l'Hospitalovo pravidlo) a)  $1 \left(\frac{x}{\operatorname{tg} x}\right)$ ; b)  $2 \left(\frac{\pi - 2 \arctan x}{1/x}\right)$ ;  
c)  $0 \left(\frac{\ln x}{x-a}\right)$ .
- $(f(x))^{g(x)} = \exp(g(x) \cdot \ln f(x))$ , v exponentu upravit na podíl a l'Hospitalovo pravidlo  
a)  $1 \left(\frac{\ln x}{1/x}\right)$ ; b)  $\frac{1}{e} \left(\frac{\ln x}{1-x}\right)$ ; c)  $1 \left(\frac{\ln x}{x}\right)$ .
- a)  $e^{-1/2}$ ; b) 1. c)  $e^{-1/6}$ .
- a) tečna:  $y = x - 1$ , normála:  $y = -x + 1$ ;  
b) tečna:  $y = 2x - \frac{3}{2}$ , normála:  $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ .
- tečna:  $y = 2x - 1$ , normála:  $y = 2x + \frac{9}{16}$  (určí se bod  $[a, f(a)]$  grafu  $f$  vyřešením rovnice:  
směrnice tečny  $f'(a) = 2$ , směrnice normály  $-\frac{1}{f'(a)} = 2$ )
- $y = 2x - 1$ ,  $y = 6x - 9$  (určí se bod  $[a, f(a)]$  grafu  $f$  z rovnice tečny  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$   
po dosažení bodu  $[x, y] = [2, 3]$ )
- a)  $3 + 4(x - 2) + (x - 2)^2$ ;  
b)  $x - 2x^2 + 2x^3$ ;  
c)  $1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ ;  
d)  $1 + x + x^2 + x^3$ ;  
e)  $x - \frac{1}{3}x^3$ ;  
f)  $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$ ;

## 6. Průběh funkce

1. Vyšetřete monotonii a lokální extrémů funkce:

a) $f(x) = \frac{2x+1}{x+5}$ ;	b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ;	c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ;
d) $f(x) = x^2 e^x$ ;	e) $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ ;	f) $f(x) = x \ln x$ ;
g) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ ;	h) $f(x) = x - \sin x$ ;	i) $f(x) = e^{- x }$ ;
j) $f(x) = x^3 e^{- x }$ ;	k) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$ ;	l) $f(x) = (x-1) x+3 $ .

2. Určete maximum a minimum funkce:

a) $f(x) = x^3 - 12x + 4$ , $x \in \langle -3, 3 \rangle$ ;	b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$ , $x \in \langle -2, 1 \rangle$ ;
c) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$ , $x \in \langle -1, 3 \rangle$ ;	d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ , $x \in \langle -2, 3 \rangle$ ;
e) $f(x) = \arccos \frac{1}{x}$ , $x \in \langle 1, +\infty \rangle$ ;	f) $f(x) = x \ln^2 x$ , $x \in (0, 1)$ ;
g) $f(x) = x + e^{-x}$ , $x \in (-\infty, +\infty)$ ;	h) $f(x) = x e^{-x}$ , $x \in (0, +\infty)$ ;
i) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ , $x \in (-1, 1)$ ;	j) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ , $x \in (-\infty, +\infty)$ .

3. Určete intervaly konvexity a konkavity a body inflexe funkce:

a) $2x^4 - 3x^2 + 2x + 2$ ;	b) $x^5 - 10x^2 + x + 3$ ;	c) $x^4 + x^2 + e^x$ ;
d) $x e^x$ ;	e) $(x^2 + 1)e^x$ ;	f) $x + \sin x$ ;
g) $\frac{x}{x^2+1}$ ;	h) $\frac{ x-1 }{x^2}$ ;	i) $\sqrt[3]{x+3}$ .

4. Určete asymptoty grafu funkce:

a) $\frac{2x+1}{3x-1}$ ;	b) $\frac{x+1}{x^2+3x+2}$ ;	c) $\frac{x^2-2x}{x+1}$ ;	d) $\frac{x^3+1}{x-1}$ ;
e) $x + e^{-x}$ ;	f) $x \ln x$ ;	g) $\operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$ ;	h) $\ln \frac{1-x}{1+x}$ ;
i) $e^x \cos x$ ;	j) $\ln(3e^{2x} - 1)$ (rozšiřující).		

5. (aplikace teorie)

- Určete rozměry pravoúhelníku s největším obsahem vepsaného do půlkruhu o poloměru  $r$ .
- Určete rozměry kvádrů se čtvercovou podstavou, který má při objemu  $V$  nejmenší povrch.
- Určete rozměry válce s největším objemem vepsaného do koule o poloměru  $r$ .
- Určete rozměry válce s největším obsahem pláště vepsaného do koule o poloměru  $r$ .

## Výsledky

- a) na  $(-\infty, -5)$  a  $(-5, +\infty)$  rostoucí, lokální extrémů nemá; b) na  $(-\infty, -1)$  a  $(1, +\infty)$  rostoucí, na  $(-1, 0)$  a  $(0, 1)$  klesající,  $f(-1) = -2$  ostré lokální maximum,  $f(1) = 2$  ostré lokální minimum; c) na  $(-\infty, -1)$  a  $(1, +\infty)$  klesající, na  $(-1, 1)$  rostoucí,  $f(-1) = -\frac{1}{2}$  ostré lokální minimum,  $f(1) = \frac{1}{2}$  ostré lokální maximum; d) na  $(-\infty, -2)$  a  $(0, +\infty)$  rostoucí, na  $(-2, 0)$  klesající,  $f(-2) = 4e^{-2}$  ostré lokální maximum,  $f(0) = 0$  ostré lokální minimum; e) na  $(0, 1)$  klesající, na  $(1, +\infty)$  rostoucí,  $f(1) = 1$  ostré lokální minimum; f) na  $(0, e^{-1})$  klesající, na  $(e^{-1}, +\infty)$  rostoucí,  $f(e^{-1}) = -e^{-1}$  ostré lokální minimum; g) na  $(-1, 1)$  rostoucí, lokální extrémů nemá; h) na  $\mathbb{R}$  rostoucí, lokální extrémů nemá; i) na  $(-\infty, 0)$  rostoucí, na  $(0, +\infty)$  klesající,  $f(0) = 1$  ostré lokální maximum; j) na  $(-\infty, -3)$  a  $(3, +\infty)$  klesající, na  $(-3, 3)$  rostoucí,  $f(-3) = -27e^{-3}$  ostré lokální minimum,  $f(3) = 27e^{-3}$  ostré lokální maximum; k) na  $(-\infty, 0)$  rostoucí, na  $(0, +\infty)$  klesající,  $f(0) = 1$  ostré lokální maximum; l) na  $(-\infty, -3)$  a  $(-1, +\infty)$  rostoucí, na  $(-3, -1)$  klesající,  $f(-3) = 0$  ostré lokální maximum,  $f(-1) = -4$  ostré lokální minimum.
- a)  $\max f = f(-2) = 20$ ,  $\min f = f(2) = -12$ ; b)  $\max f = f(1) = 6$ ,  $\min f = f(-2) = -3$ ; c)  $\max f = f(3) = 12$ ,  $\min f = f(2) = -13$ ; d)  $\max f = f(0) = f(3) = 2$ ,  $\min f = f(-2) = -18$ ; e)  $\max f$  neexistuje,  $\min f = f(1) = 0$ ; f)  $\max f = f(e^{-2}) = 4e^{-2}$ ,  $\min f = f(1) = 0$ ; g)  $\max f$  neexistuje,  $\min f = f(0) = 1$ ; h)  $\max f = f(1) = e^{-1}$ ,  $\min f$  neexistuje; i)  $\max f$  neexistuje,  $\min f$  neexistuje; j)  $\max f = f(1) = \frac{1}{2}$ ,  $\min f = f(-1) = -\frac{1}{2}$ .
- a) na  $(-\infty, -\frac{1}{2})$  a  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  konvexní, na  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  konkávní, inflexe v  $-\frac{1}{2}$  a  $\frac{1}{2}$ ; b) na  $(-\infty, 1)$  konkávní, na  $(1, +\infty)$  konvexní, inflexe v 1; c) na  $\mathbb{R}$  konvexní, body inflexe nemá; d) na  $(-\infty, -2)$  konkávní, na  $(-2, +\infty)$  konvexní, inflexe v  $-2$ ; e) na  $(-\infty, -3)$  a  $(-1, +\infty)$  konvexní, na  $(-3, -1)$  konkávní, inflexe v  $-3$  a  $-1$ ; f) na  $(0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) konkávní, na  $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) konvexní, inflexe v  $k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ); g) na  $(-\infty, -\sqrt{3})$  a  $(0, \sqrt{3})$  konkávní, na  $(-\sqrt{3}, 0)$  a  $(\sqrt{3}, +\infty)$  konvexní, inflexe v  $\pm\sqrt{3}$  a 0; h) na  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 1)$  a  $(3, +\infty)$  konvexní, na  $(1, 3)$  konkávní, inflexe v 3; i) na  $(-\infty, -3)$  konvexní, na  $(-3, +\infty)$  konkávní, inflexe v  $-3$ .
- a)  $x = \frac{1}{3}$ ,  $y = \frac{2}{3}$  v  $\pm\infty$ ; b)  $x = -2$ ,  $y = 0$  v  $\pm\infty$ ; c)  $x = -1$ ,  $y = x - 3$  v  $\pm\infty$ ; d)  $x = 1$ ; e)  $y = x$  v  $+\infty$ ; f) nemá; g)  $y = \frac{\pi}{4}$  v  $\pm\infty$ ; h)  $x = \pm 1$ ; i)  $y = 0$  v  $-\infty$ ; j)  $x = -\frac{1}{2} \ln 3$ ,  $y = 2x + \ln 3$  v  $+\infty$  (ve druhé limitě se rozdíl logaritmů vyjádří jako logaritmus podílu).
- a) strany  $\sqrt{2}r$  a  $\frac{\sqrt{2}}{2}r$ , obsah  $r^2$  (strany délek  $a$  [na průměru],  $b$ , z Pythagorovy věty  $(a/2)^2 + b^2 = r^2$ , maximum obsahu  $P(a) = ab = a\sqrt{r^2 - (a/2)^2}$  na  $(0, 2r)$ );  
b) krychle s hranami  $\sqrt[3]{V}$ , obsah povrchu  $6\sqrt[3]{V^2}$  (hrany délek  $a$  [podstava],  $b$ , objem  $V = a^2b$ , tj.  $b = V/a^2$ , obsah povrchu  $S(a) = 2a^2 + 4ab = 2a^2 + 4V/a$  na  $(0, +\infty)$ );  
c) poloměr podstavy  $\sqrt{2/3}r$ , výška  $\sqrt{4/3}r$ , objem  $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}r^3$  (osa válce středem koule, poloměr podstavy  $\rho$ , výška  $v$ , z Pythagorovy v rovině osou válce  $\rho^2 + (v/2)^2 = r^2$ , objem  $V(v) = \pi\rho^2v = \pi(r^2 - (v/2)^2)$  na  $(0, 2r)$ );  
d) poloměr podstavy  $\frac{\sqrt{2}}{2}r$ , výška  $\sqrt{2}r$ , obsah pláště  $2\pi r^2$  (osa válce středem koule, poloměr podstavy  $\rho$ , výška  $v$ , z Pythagorovy v rovině osou válce  $\rho^2 + (v/2)^2 = r^2$ , obsah  $S(\rho) = 2\pi\rho v = 4\pi\rho\sqrt{r^2 - \rho^2}$  na  $(0, r)$ );

## 7. Neurčitý integrál

1. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int (x^3 - 2x^2 - 3) \, dx; & \text{b) } \int \frac{x^3 - x + 4}{x^2} \, dx; & \text{c) } \int \frac{2x - 5}{x^5} \, dx; \\ \text{d) } \int \sqrt[4]{x} \, dx; & \text{e) } \int \sqrt[5]{x^3} \, dx; & \text{f) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}; \\ \text{g) } \int (3e^{2x} + 4 \sin 3x) \, dx; & \text{h) } \int 2 \cos \frac{x}{3} \, dx; & \text{i) } \int 5^x \, dx; \\ \text{j) } \int \frac{2x^2 + 5}{x^2 + 1} \, dx; & \text{k) } \int \sin^2 x \, dx; & \text{l) } \int \cos^2 x \, dx. \end{array}$$

2. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int (x - 2) \sin 2x \, dx; & \text{b) } \int (x + 1) \cos \frac{x}{3} \, dx; & \text{c) } \int (3x - 1) e^{3x} \, dx; \\ \text{d) } \int (x + \sqrt{x}) \ln x \, dx; & \text{e) } \int \frac{\ln x}{x^2} \, dx; & \text{f) } \int (x^2 - x) \sin \frac{x}{2} \, dx; \\ \text{g) } \int (x^2 + x + 1) e^{-x} \, dx; & \text{h) } \int \sqrt[3]{x} \ln x \, dx. \end{array}$$

3. Spočtěte (teorie):

$$\text{a) } \int e^{2x} \cos \frac{x}{3} \, dx; \quad \text{b) } \int e^{-x} \sin 2x \, dx; \quad \text{c) } \int \frac{\ln x}{x} \, dx.$$

4. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int (3x - 4)^6 \, dx; & \text{b) } \int \frac{dx}{3x - 1}; & \text{c) } \int \frac{dx}{(2x + 1)^5}; \\ \text{d) } \int \sqrt[4]{2 - x} \, dx. \end{array}$$

5. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 4} \, dx; & \text{b) } \int \sin^7 x \cdot \cos x \, dx; & \text{c) } \int \sin x \cdot \cos^4 x \, dx; \\ \text{d) } \int \frac{\ln^3 x}{x} \, dx. \end{array}$$

6. Spočtěte (rozšiřující):

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{2x^2}{x^3 - 1} \, dx; & \text{b) } \int \cotg 2x \, dx; & \text{c) } \int 2x(x^2 - 1)^4 \, dx; \\ \text{d) } \int x e^{x^2 + 1} \, dx; & \text{e) } \int x \sqrt{1 - x^2} \, dx; & \text{f) } \int 6x^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx; \\ \text{g) } \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 8}} \, dx; & \text{h) } \int \frac{4x + 4}{\sqrt[3]{x^2 + 2x + 2}} \, dx. \end{array}$$

## Výsledky

- (tabulkové integrály a linearita) a)  $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 3x + c, x \in \mathbb{R}$ ; b)  $\frac{1}{2}x^2 - \ln|x| - \frac{4}{x} + c, x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty)$  (vydělit); c)  $-\frac{2}{3x^3} + \frac{5}{4x^4} + c, x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty)$  (vydělit); d)  $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + c, x \in (0, +\infty)$ ; e)  $\frac{5}{8}\sqrt[5]{x^8} + c, x \in \mathbb{R}$ ; f)  $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c, x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty)$ ; g)  $\frac{3}{2}e^{2x} - \frac{4}{3}\cos x + c, x \in \mathbb{R}$ ; h)  $6\sin\frac{x}{3} + c, x \in \mathbb{R}$ ; i)  $2x + 3\operatorname{arctg} x + c, x \in \mathbb{R}$  (vydělit); j)  $\frac{5^x}{\ln 5} + c, x \in \mathbb{R}$  (přepis funkce na  $e^{x \ln 5}$ ); k)  $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin 2x) + c, x \in \mathbb{R}$  (přepis funkce na  $\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ ); l)  $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin 2x) + c, x \in \mathbb{R}$  (přepis funkce na  $\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ ).
- (per partes) a)  $-\frac{1}{2}(x-2)\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + c, x \in \mathbb{R}$ ; b)  $3(x+1)\sin\frac{x}{3} + 9\cos\frac{x}{3} + c, x \in \mathbb{R}$ ; c)  $\frac{1}{3}(3x-2)e^{3x} + c, x \in \mathbb{R}$ ; d)  $(\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3})\ln x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + c, x \in (0, +\infty)$ ; e)  $-\frac{1}{x}(\ln x + 1) + c, x \in (0, +\infty)$ ; f)  $-2(x^2 - x - 8)\cos\frac{x}{2} + 4(2x-1)\sin\frac{x}{2} + c, x \in \mathbb{R}$ ; g)  $-(x^2 + 3x + 4)e^{-x} + c, x \in \mathbb{R}$ ; h)  $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\ln 2x - \frac{9}{16}x\sqrt[3]{x} + c, x \in (0, +\infty)$ .
- (per partes a rovnice) a)  $\frac{3}{37}(\sin\frac{x}{3} + 6\cos\frac{x}{3})e^{2x} + c, x \in \mathbb{R}$  (per partes  $2\times$ ); b)  $-\frac{1}{5}(\sin 2x + 2\cos 2x)e^{-x} + c, x \in \mathbb{R}$  (per partes  $2\times$ ); c)  $\frac{1}{2}\ln^2 x + c, x \in (0, +\infty)$ .
- (lineární substituce) a)  $\frac{1}{21}(3x-4)^7 + c, x \in \mathbb{R}$  ( $3x-4=t$ ); b)  $\frac{1}{3}\ln|3x-1| + c, x \in (-\infty, \frac{1}{3}), x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$  ( $3x-1=t$ ); c)  $\frac{-1}{8(2x+1)^4} + c, x \in (-\infty, -\frac{1}{2}), x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$  ( $2x+1=t$ ); d)  $-\frac{4}{5}\sqrt[4]{(2-x)^5} + c, x \in (-\infty, 2)$  ( $2-x=t$ ).
- (vhodná substituce, bude později) a)  $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 4) + c, x \in \mathbb{R}$  ( $x^2 + 2x + 4=t$ ); b)  $\frac{1}{8}\sin^8 x + c, x \in \mathbb{R}$  ( $\sin x=t$ ); c)  $-\frac{1}{5}\cos^5 x + c, x \in \mathbb{R}$  ( $\cos x=t$ ); d)  $\frac{1}{4}\ln^4 x + c, x \in (0, +\infty)$  ( $\ln x=3$ ).
- (vhodná substituce) a)  $\frac{2}{3}\ln|x^3-1| + c, x \in (-\infty, 1), x \in (1, +\infty)$  ( $x^3-1=t$ ); b)  $\frac{1}{2}\ln|\sin 2x| + c, x \in (0 + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}$  (přepis funkce na  $\frac{\cos 2x}{\sin 2x}, \sin 2x=t$ ); c)  $\frac{1}{5}(x^2-1)^5 + c, x \in \mathbb{R}$  ( $x^2-1=t$ ); d)  $\frac{1}{2}e^{x^2+1} + c, x \in \mathbb{R}$  ( $e^{x^2+1}=t$ ); e)  $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + c, x \in (-1, 1)$  ( $1-x^2=t$ ); f)  $\frac{4}{3}\sqrt{(x^3+1)^3} + c, x \in (-1, +\infty)$  ( $x^3+1=t$ ); g)  $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+8} + c, x \in (-2, +\infty)$  ( $x^3+8=t$ ); h)  $3\sqrt[3]{(x^2+2x+2)^2} + c, x \in \mathbb{R}$  ( $x^2+2x+2=t$ ).

## 8. Integrace racionálních funkcí a dalších typů funkcí

1. Spočtěte:

a)  $\int \frac{x^3 - 2x + 5}{x^2 - x - 2} dx;$

b)  $\int \frac{2x + 1}{(x - 1)(x^2 + 3x + 2)} dx;$

c)  $\int \frac{x^2 + 7x + 1}{(x - 1)(x^2 + x - 2)} dx;$

d)  $\int \frac{dx}{(x + 2)(x^2 + 4x + 4)};$

e)  $\int \frac{3x - 2}{x^4 - x^3} dx;$

f)  $\int \frac{x^4 + x^3 + 11x^2 - 7x}{(x + 1)^3(x^2 - 4x + 4)} dx;$

g)  $\int \frac{-5}{(x + 4)^4} dx;$

h)  $\int \frac{3}{(2x - 1)^3} dx.$

2. Spočtěte:

a)  $\int \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 10} dx;$

b)  $\int \frac{5x - 2}{x^2 - 2x + 5} dx;$

c)  $\int \frac{3x + 4}{x^2 + 4x + 13} dx;$

d)  $\int \frac{x}{x^2 - 6x + 13} dx;$

e)  $\int \frac{dx}{4x^2 - 12x + 13};$

f)  $\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}.$

3. Spočtěte:

a)  $\int \frac{3e^{2x}}{e^{4x} + e^{2x} - 2} dx;$

b)  $\int \frac{2}{e^{3x} + 2} dx;$

c)  $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x} - 2e^{2x} + 2} dx;$

d)  $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}};$

e)  $\int \frac{\ln x}{x(\ln^2 x - 4)} dx;$

f)  $\int \frac{dx}{x \ln 3x}.$

4. Spočtěte:

a)  $\int \sin^6 x \cdot \cos^3 x dx;$

b)  $\int \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx;$

c)  $\int \frac{\cos x}{\cos^2 x - \sin x + 1} dx;$

d)  $\int \frac{1 - \cos x}{(1 + \cos x) \sin x} dx.$

## Výsledky

1. a)  $\frac{1}{2}x^2 + x + \ln \frac{|x-2|^3}{(x+1)^2} + c, x \in (-\infty, -1), x \in (-1, 2), x \in (2, +\infty)$ ;  
b)  $\frac{1}{2} \ln \frac{|x^2-1|}{(x+2)^2} + c, x \in (-\infty, -2), x \in (-2, -1), x \in (-1, 1), x \in (1, +\infty)$ ;  
c)  $-\frac{3}{(x-1)} + \ln \frac{(x-1)^2}{|x+2|} + c, x \in (-\infty, -2), x \in (-2, 1), x \in (1, +\infty)$ ;  
d)  $-\frac{1}{2(x+2)^2} + c, x \in (-\infty, -2), x \in (-2, +\infty)$ ;  
e)  $-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + c, x \in (-\infty, 0), x \in (0, 1), x \in (1, +\infty)$ ;  
f)  $-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)} - \frac{2}{x-2} + \ln |x-2| + c, x \in (-\infty, -1), x \in (-1, 2), x \in (2, +\infty)$ ;  
g)  $\frac{5}{3(x+4)^3} + c, x \in (-\infty, -4), x \in (-4, +\infty)$ ;  
h)  $\frac{-3}{4(2x-1)^2} + c, x \in (-\infty, \frac{1}{2}), x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ .
2. a)  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 10) + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + c, x \in \mathbb{R}$ ;  
b)  $\frac{5}{2} \ln(x^2 - 2x + 5) + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + c, x \in \mathbb{R}$ ;  
c)  $\frac{3}{2} \ln(x^2 + 4x + 13) - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} + c, x \in \mathbb{R}$ ;  
d)  $\frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 13) + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2} + c, x \in \mathbb{R}$ ;  
e)  $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{2x-3}{2} + c, x \in \mathbb{R}$ ;  
f)  $\frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{x^2+1} + c, x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty)$ .
3. (vhodná substituce)  
a)  $\frac{1}{2} \ln \frac{|e^{2x}-1|}{e^{2x}+2} + c, x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty) (e^{2x} = t)$ ;  
b)  $x - \frac{1}{3} \ln(e^{3x} + 2) + c, x \in \mathbb{R} (e^{3x} = t)$ ;  
c)  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(e^{2x} - 1) + c, x \in \mathbb{R} (e^{2x} = t)$ ;  
d)  $\operatorname{arctg} e^x + c, x \in \mathbb{R} (e^x = t)$ ;  
e)  $\frac{1}{2} \ln |\ln^2 x - 4| + c, x \in (0, e^{-2}), x \in (e^{-2}, e^2), x \in (e^2, +\infty) (\ln x = t)$ ;  
f)  $\ln |\ln 3x| + c, x \in (0, \frac{1}{3}), x \in (\frac{1}{3}, +\infty) (\ln 3x = t)$ .
4. (vhodná substituce)  
a)  $\frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{1}{9} \sin^9 x + c, x \in \mathbb{R} (\sin x = t)$ ;  
b)  $\frac{1}{8} \cos^8 x - \frac{1}{6} \cos^6 x + c, x \in \mathbb{R} (\cos x = t \text{ nebo } \sin x = t)$ ;  
c)  $\frac{1}{3} \ln \frac{2+\sin x}{1-\sin x} + c, x \in (-\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z} (\sin x = t)$ ;  
d)  $\frac{1}{1+\cos x} + c, x \in (0 + k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z} (\cos x = t)$ .



## 9. Určitý integrál

1. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_0^2 (3x^2 - 2x) \, dx; & \text{b) } \int_1^2 \frac{dx}{x^2}; & \text{c) } \int_1^e \frac{dx}{x}; \\ \text{d) } \int_2^6 \frac{dx}{x}; & \text{e) } \int_1^4 \sqrt{x} \, dx; & \text{f) } \int_{-7}^0 \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}} \, dx; \\ \text{g) } \int_0^\pi \sin 6x \, dx; & \text{h) } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \frac{x}{2} \, dx; & \text{i) } \int_0^1 3^x \, dx. \end{array}$$

2. Spočtěte (rozšiřující):

$$\text{a) } \int_0^2 |x-1| \, dx; \quad \text{b) } \int_{-2}^3 |x^2-1| \, dx; \quad \text{c) } \int_2^4 e^{|2x-6|} \, dx.$$

3. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_0^\pi (2x+1) \sin \frac{x}{2} \, dx; & \text{b) } \int_0^\pi (4x-1) \cos 2x \, dx; & \text{c) } \int_{-1}^0 (3x+2) e^{3x} \, dx; \\ \text{d) } \int_0^\pi x^2 \cos x \, dx; & \text{e) } \int_{-1}^0 x^3 e^{-x} \, dx. \end{array}$$

4. Spočtěte:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^2(x-1)} \, dx; & \text{b) } \int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)} \, dx; \\ \text{c) } \int_{-2}^3 \frac{2x^3-3x^2-20x-14}{x^2-x-12} \, dx; & \text{d) } \int_3^4 \frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x} \, dx; \\ \text{e) } \int_3^5 \frac{x-2}{x^2-6x+13} \, dx; & \text{f) } \int_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}. \end{array}$$

5. Spočtěte:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_0^{\ln 2} \frac{e^x-1}{e^x+1} \, dx; & \text{b) } \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos x \, dx; \\ \text{c) } \int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 2 \cos x + 2} \, dx; & \text{d) } \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln^2 x + 1)} \, dx. \end{array}$$

6. Spočtěte (rozšiřující):

$$\text{a) } \int_1^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} \, dx; \quad \text{b) } \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} \, dx; \quad \text{c) } \int_0^\pi \operatorname{tg} \frac{x}{3} \, dx.$$

## Výsledky

1. a) 4; b)  $\frac{1}{2}$ ; c) 1; d)  $\ln 3$ ; e)  $\frac{14}{3}$ ; f)  $-9$ ; g) 0; h)  $2\sqrt{2}$ ; i)  $\frac{2}{\ln 3}$  (přepis funkce na  $e^{x \ln 3}$ ).
2. a) 1; b)  $\frac{28}{3}$ ; c)  $e^2 - 1$ .
3. (per partes) a) 10; b) 0; c)  $(1 + 2e^{-3})/3$ ; d)  $-2\pi$ ; e)  $2e - 6$ .
4. a)  $2 \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{2}$ ; b)  $\frac{\pi}{4}$ ; c)  $7 \ln 6$ ; d)  $\ln 3 - 1$ ; e)  $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{8}$ ; f)  $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ .
5. (substitute) a)  $\ln \frac{9}{8}$  ( $e^x = t$ ); b)  $\frac{1}{3}$  ( $\sin x = t$ ); c)  $-\frac{1}{4} \pi$  ( $\cos x = t$ ); d)  $\frac{1}{2} \ln 2$  ( $\ln x = t$ ).
6. (substitute) a)  $3$  ( $x^2 - 1 = t$ ); b)  $\frac{4}{3}$  ( $x^3 + 1 = t$ ); c)  $3 \ln 2$  (přepis funkce na  $\frac{\sin x/3}{\cos x/3}$ , substitute  $\cos \frac{x}{3} = t$ ).

## 10. Nevlastní integrál

1. Spočtěte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3}; & \text{b) } \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x-1)^4}; & \text{c) } \int_{-8}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}; \\ \text{d) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}; & \text{e) } \int_0^{+\infty} \sin x \, dx; & \text{f) } \int_{-\infty}^0 e^x \, dx; \\ \text{g) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2-4x+5} \, dx. & & \end{array}$$

2. Spočtěte:

$$\text{a) } \int_{1/2}^{+\infty} x e^{-2x} \, dx; \quad \text{b) } \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \, dx; \quad \text{c) } \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} \, dx.$$

3. Spočtěte:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x+3}; & \text{b) } \int_1^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2+2x+5} \, dx; \\ \text{c) } \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2-2x-3}; & \text{d) } \int_0^{+\infty} \frac{x+4}{(x+1)(x^2+3x+2)} \, dx. \end{array}$$

4. Spočtěte:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{2x}+4e^x+3}; & \text{b) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{2x}+e^{-2x}}; \\ \text{c) } \int_0^e \frac{dx}{x(\ln^2 x+2\ln x+5)}; & \text{d) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln^2 x+3\ln x+2)}. \end{array}$$

## Výsledky

1. a)  $\frac{1}{8}$ ; b)  $\frac{1}{3}$ ; c)  $-6$ ; d)  $+\infty$ ; e) neexistuje; f)  $1$ ; g) neexistuje.
2. (per partes) a)  $\frac{1}{2e}$ ; b)  $1$ ; c)  $24$ .
3. a)  $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ ; b)  $+\infty$ ; c)  $\frac{1}{4}\ln 5$ ; d)  $3 - 2\ln 2$ .
4. (substituce) a)  $\frac{1}{6}\ln 2$  ( $e^x = t$ ); b)  $\frac{1}{8}\pi$  ( $e^{2x} = t$ ); c)  $\frac{3}{8}\pi$  ( $\ln x = t$ ); d)  $\ln 2$  ( $\ln x = t$ ).

## 11. Aplikace určitého integrálu

(aplikace teorie)

- Spočtěte střední hodnotu funkce  $f$  na daném intervalu:
  - $f(x) = 3x, x \in \langle -1, 1 \rangle$ ;
  - $f(x) = x^2, x \in \langle 0, 1 \rangle$ ;
  - $f(x) = e^x, x \in \langle 0, 2 \rangle$ ;
  - $f(x) = \sin x, x \in \langle 0, \pi \rangle$ .
- Spočtěte obsahy následujících množin:
  - $\{[x, y] : x \in \langle 0, \pi \rangle, 0 \leq y \leq \sin x\}$  (plocha pod obloukem sinusoidy);
  - $\{[x, y] : x \in \langle 1, e \rangle, 0 \leq y \leq 1/x\}$ ;
  - $\{[x, y] : x \in \langle a, b \rangle, 0 \leq y \leq x^2\}$ ;
  - $\{[x, y] : x \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq e^{-|x|}\}$ ;
  - $\{[x, y] : x \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq 1/(x^2 + 1)\}$ .
- Spočtěte obsah omezené plochy ohraničené grafy funkcí  $f, g$ :
  - $f(x) = 0, g(x) = x^2 - 2x$ ;
  - $f(x) = x, g(x) = x^4$ ;
  - $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$ .
- Spočtěte délku grafu funkce  $f$  na daném intervalu:
  - $f(x) = \ln(x^2 - 1), x \in \langle 2, 5 \rangle$ ;
  - $f(x) = \ln \sin x, x \in \langle \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi \rangle$ ;
- Spočtěte objem rotačního elipsoidu, vzniklého rotací elipsy s poloosami  $a, b$  kolem její osy délky  $2a$ . (Nápověda: použijte rovnici elipsy  $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ .)
- Spočtěte objem rotačního paraboloidu, který má výšku  $v$  a poloměr podstavy  $r$ .
- Spočtěte obsah povrchu pláště kulového pásu s výškou  $v$  v kouli o poloměru  $r$ . (Nápověda: použijte rovnici kružnice  $x^2 + y^2 = r^2$ .)

## Výsledky

1. a) 0;    b)  $\frac{1}{3}$ ;    c)  $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$ ;    d)  $\frac{2}{\pi}$ .
2. a) 2;    b) 1;    c)  $(b^3 - a^3)/3$ ;    d) 2;    e)  $\pi$ .
3. a)  $\frac{4}{3}$  (interval  $\langle 0, 2 \rangle$ );    b)  $\frac{3}{10}$  (interval  $\langle 0, 1 \rangle$ );    c)  $\frac{1}{3}$  (interval  $\langle 0, 1 \rangle$ ).
4. a)  $3 + \ln 2$ ;    b)  $\ln 3$ .
5.  $\frac{4}{3}\pi ab^2$  ( $a$  na ose  $x$ ,  $b$  na ose  $y$ ,  $f(x) = b\sqrt{1 - (x/a)^2}$  na  $\langle -a, a \rangle$ ).
6.  $\frac{1}{2}\pi r^2 v$  (parabola s osou  $x$  a vrcholem v počátku má rovnici  $x = cy^2$ , pro výšku  $v$  a poloměr podstavy  $r$  prochází bodem  $[v, r]$ , dosazením do rovnice  $c = r/\sqrt{v}$ , funkce  $f(x) = r\sqrt{x/v}$  na  $\langle 0, v \rangle$ ).
7.  $2\pi r(b-a) = 2\pi r v$  (koule se středem v počátku, pás rovinami  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $-r \leq a < b \leq r$ , funkce  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  na  $\langle a, b \rangle$ ; nezávisí na poloze v kouli).

## 12. Číselné řady

1. Určete součet geometrické řady:

a)  $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots$ ;

b)  $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \dots$ ;

c)  $3 + 4 + \frac{16}{3} + \frac{64}{9} + \dots$ ;

d)  $1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8} + \dots$ .

2. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady:

a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ ;

b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+3}$ ;

c)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$ ;

d)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$ ;

e)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$ ;

f)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-k)^7}{2^k}$ ;

g)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k!}$ ;

h)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{8^k}$ ;

i)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ ;

j)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3-k}{k}\right)^{k^2}$ ;

k)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2-4k-5}$ ;

l)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{3k-7}$ ;

m)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-k}{k+2}\right)^k$ ;

n)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^{3k+1}}{(k-1)!}$ ;

o)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-k)^k}{(k+1)!}$  (rozšiřující).

## Výsledky

1. a) 3 (kvocient  $\frac{2}{3}$ );  
b)  $\frac{1}{4}$  (kvocient  $-\frac{1}{3}$ );  
c)  $+\infty$  (kvocient  $\frac{4}{3} \geq 1$ ).  
d) osciluje (kvocient  $-\frac{3}{2} \leq -1$ ).
2. a) konverguje (Leibnizovo kr.), ne absolutně (integrální kr.);  
b) konverguje (Leibnizovo kr.), ne absolutně (integrální kr.);  
c) nekonverguje (integrální kr.);  
d) absolutně (integrální kr.);  
e) absolutně (podílové/odmocninové kr.);  
f) absolutně (podílové/odmocninové kr.);  
g) absolutně (podílové/odmocninové kr.);  
h) nekonverguje (nutná podmínka konvergence nebo odmocninové/podílové kr.);  
i) absolutně (podílové kr.:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \frac{\ln \frac{x}{x+1}}{1/x} \stackrel{l'H}{=} e^{-1} < 1$ );  
j) absolutně (odmocninové kr.:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left|\frac{3-k}{k}\right|^k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \frac{\ln \frac{x-3}{x}}{1/x} \stackrel{l'H}{=} e^{-3} < 1$ );  
k) absolutně (integrální kr. od  $k = 2$ );  
l) konverguje (Leibnizovo kr. od  $k = 3$ ), ne absolutně (integrální kr. od  $k = 3$ );  
m) nekonverguje (neplatí nutná podmínka konvergence:  
 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left|\frac{-k}{k+2}\right|^k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \frac{\ln \frac{x}{x+2}}{1/x} \stackrel{l'H}{=} e^{-2} \neq 0$ ).  
n) absolutně (podílové kr.)  
o) nekonverguje (neplatí nutná podmínka konvergence:  
 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|(-k)^k|}{(k+1)!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{2} \cdot \frac{k}{3} \cdot \dots \cdot \frac{k}{k} \cdot \frac{k}{k+1}\right) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{2} \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot \frac{k}{k+1}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{2+2/k} = +\infty$ ).