v. 2018-03-28

Reálná čísla

$\mathbb{N}$ ... *přirozená* čísla: $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$ ... *celá* čísla: $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$
$\mathbb{Q}$ ... *racionální* čísla: $\left\{\frac{a}{b}\colon a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}\right\}$
$\mathbb{R}$ ... *reálná* č.: délky, doplnění limit, suprem/infim, řezy
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ... *iracionální* čísla ($\sqrt{2}$, π, e, ...)
$\mathbb{C}$ ... *komplexní* čísla: $\{x + \mathrm{j}y\colon x, y \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{j}^2 = -1$

Tvrzení. *Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.*

Důkaz: Sporem, předpokládejme $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$ nesoudělná. Pak $2b^2 = a^2$; a je dělitelné 2; existuje $c \in \mathbb{N}$ tak, že $a = 2c$; $b^2 = 2c^2$; b je dělitelné 2; a, b soudělná – spor.

Tvrzení. *Racionální čísla jsou právě ta, která mají konečný nebo periodický dekadický rozvoj.*

Důkaz: $\Rightarrow$: Při použití algoritmu dělení celých čísel a/b jsou možné zbytky jen $0, 1, \dots, b-1$, po přechodu přes desetinnou čárku se připisují jen 0, takže se po nejvýše $(b-1)$ krocích vše opakuje.
$\Leftarrow$: Přenásobením číslem $10^{\text{délka periody}}$ a odečtením dostaneme, že celočíselný násobek má konečný dekadický rozvoj.

Tvrzení. *Nenulová čísla s konečným dekadickým rozvojem mají dva dekadické rozvoje.*

Příklady. $1/7 = 0{,}\overline{142857}$, $1/3 = 0{,}\overline{3}$, $1/6 = 0{,}1\overline{6}$; $2{,}7 = = \frac{27}{10}$; $2{,}7\overline{31} = \frac{2704}{990}$; $2{,}3 = 2{,}2\overline{9}$.

(lineární) uspořádání $\mathbb{R}$, *reálná osa*

Definice. Reálné číslo x se nazývá:
kladné, pokud $x > 0$;
záporné, pokud $x < 0$;
nezáporné, pokud $x \geq 0$;
nekladné, pokud $x \leq 0$.

Definice. Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, rozeznáváme tyto typy *intervalů* s *krajními body* a, b:
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}\colon a < x < b\}$ (*otevřený*);
$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}\colon a \leq x \leq b\}$ pro $a, b \in \mathbb{R}$ (*uzavřený*);
$(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}\colon a < x \leq b\}$ pro $b \in \mathbb{R}$ (*zleva otevřený, zprava uzavřený*);
$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R}\colon a \leq x < b\}$ pro $a \in \mathbb{R}$ (*zleva uzavřený, zprava otevřený*).
Body intervalu, které nejsou krajní, nazýváme *vnitřní*.

Tvrzení. *V každém intervalu existuje nekonečně mnoho racionálních i iracionálních čísel* (hustota $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$).

Definice. *Rozšířená množina reálných čísel* je $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \cup \{-\infty, +\infty\}$, kde $-\infty$ a $+\infty$ se nazývají *nevlastní* čísla.
Pro každé $x \in \mathbb{R}$ pokládáme:
1) $-\infty < x < +\infty$
2) $|-\infty| = |+\infty| = +\infty$
3)
$$x + \infty = \infty\,, \qquad \infty + \infty = \infty\,,$$
$$x - \infty = -\infty\,, \qquad -\infty - \infty = -\infty\,,$$
$$x \cdot \infty = \begin{cases} +\infty\,, & x > 0\,, \\ -\infty\,, & x < 0\,, \end{cases} \qquad \infty \cdot \infty = \infty\,,$$
$$\frac{x}{\infty} = 0\,.$$
Nedefinujeme: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Poznámka. Využití: věty o limitách, popisy intervalů: $(-\infty, 0) = \{x \in \mathbb{R}\colon -\infty < x < 0\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x < 0\}$, $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ (otevřené i s $\pm\infty$).

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $z \in \overline{\mathbb{R}}$ se nazývá:
horní závora M, pokud $M \leq z$ ($x \leq z$ pro každé $x \in M$);
dolní závora M, pokud $z \leq M$ ($z \leq x$ pro každé $x \in M$).
Množina M se nazývá:
shora omezená, pokud má reálnou horní závoru;
zdola omezená, pokud má reálnou dolní zvoru;
omezená, pokud je shora i zdola omezená.

Příklady.
1) $\mathbb{N}$ je zdola omezená, není shora omezená.
2) $\mathbb{Z}$ není omezená ani zdola, ani shora.
3) $(0, 1\rangle$ je omezená.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$.
Maximum M ($\max M$) je největší prvek M.
Minimum M ($\min M$) je nejmenší prvek M.
Supremum M ($\sup M$) je nejmenší horní závora M.
Infimum M ($\inf M$) je největší dolní závora M.

Příklady.
$\max \mathbb{N}$ neexistuje, $\sup \mathbb{N} = +\infty$,
$\max (0, 1\rangle = 1$, $\sup (0, 1\rangle = \min \langle 1, +\infty) = 1$,
$\max (0, 1)$ neexistuje, $\sup (0, 1) = \min \langle 1, +\infty) = 1$
$\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$

Poznámky.
1) Jestliže existuje maximum (minimum) množiny, pak je zároveň supremem (infimem) této množiny.
2) $\max M$ ($\min M$) existuje právě tehdy, když $\sup M \in M$ ($\inf M \in M$).

Věta. *Každá množina reálných čísel má supremum i infimum (jediné).*

Řez $(A|B)$: $A, B \subset \mathbb{Q}$ neprázdné, $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A < B$.
Řezy s $\max A$ nebo $\min B$ odpovídají racionálním číslům (uvažujeme např. druhý typ), ostatní iracionálním. Rozšiřujeme relace a operace z $\mathbb{Q}$:
$(A_1|B_1) \leq (A_2|B_2)$ pro $A_1 \subset A_2$;
$(A_1|B_1) + (A_2|B_2) = (\dots|B_1 + B_2)$;
$(A_1|B_1) \cdot (A_2|B_2) = (\dots|B_1 \cdot B_2)$ pro $0 \in A_1 \cap A_2$.
Platí $\sup_{x \in M}(A_x|B_x) = (\bigcup_{x \in M} A_x|\dots)$, pokud přidáme $(\mathbb{Q}, \emptyset) \sim +\infty$.
Korespondence řezů a dekadických rozvojů.

Věta (princip vnořených intervalů). *Jsou-li I_n ($n \in \mathbb{N}$) uzavřené intervaly a $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, pak $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. Jestliže navíc délky intervalů I_n klesají k nule, pak je tento průnik jednobodový.*

Důkaz: Označme $I_n = \langle a_n, b_n\rangle$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z předpokladů vyplývá, že $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$. Množina $\{a_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ je neprázdná, shora omezená každým číslem b_n, má tedy v $\mathbb{R}$ supremum, označme ho a. Protože $a \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, má množina $\{b_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ v $\mathbb{R}$ infimum, označme ho b. Protože $a \leq b$, je $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x \in \mathbb{R}\colon a \leq x \leq b\} \neq \emptyset$. Jestliže délky intervalů I_n klesají k nule, pak $a = b$.

Poznámka. Podmínka uzavřenosti intervalů ve výše uvedené větě je podstatná: je-li $I_n = (0, \frac{1}{n}\rangle$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \emptyset$.

$\boxed{\textbf{Funkce}}$

Definice. (*Reálná*) *funkce* (*reálné proměnné*) f je zobrazení $A \to \mathbb{R}$, kde $A \subset \mathbb{R}$ je neprázdná.
Množina A je *definiční obor* funkce f ($D(f)$), množina $f(A) = \{f(x)\colon x \in A\}$ je *obor hodnot* funkce f ($R(f)$).
Graf funkce f je množina $\{[x, f(x)]\colon x \in D(f)\}$.

Poznámka. Pokud není zadán definiční obor, bereme maximální možný.

Definice. Funkce $f\colon A \to B$ je:
prostá, pokud různým vzorům odpovídají různé obrazy;
na B, pokud její obor hodnot je B ($f\colon A \xrightarrow{\text{na}} B$);
vzájemně jednoznačná (*bijekce*), pokud je prostá na B.

Příklady.
1) x^2 není prostá ($f(1) = f(-1)$), je na $\langle 0, +\infty)$.
2) x^3 je prostá na $\mathbb{R}$.

Poznámka. Neostré uspořádání $f \le g$ a operace sčítání, odčítání, násobení a dělení funkcí definujeme „bodově“.

Definice. *Složení* funkcí $f\colon A \to B$ a $g\colon B \to C$ je funkce $g \circ f\colon A \to C$ definovaná předpisem $(g \circ f)(x) = g\bigl(f(x)\bigr)$.

Příklad. $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$:
$(g \circ f)(x) = g\bigl(f(x)\bigr) = \bigl(f(x)\bigr)^2 = (2x)^2 = 4x^2$,
$(f \circ g)(x) = f\bigl(g(x)\bigr) = 2g(x) = 2x^2$.

Definice. Funkce $g\colon R(f) \to A$ je *inverzní* k funkci $f\colon A \to B$, pokud $(g \circ f)(x) = x$ pro každé $x \in A$. Značíme $g = f_{-1}$.

Věta. *Funkce f má inverzní funkci právě tehdy, když je prostá. Pak $D(f_{-1}) = R(f)$, $R(f_{-1}) = D(f)$, f je inverzní funkce k f_{-1} a graf f_{-1} je symetrický s grafem f podle osy prvního a třetího kvadrantu (přímky o rovnici $y = x$).*

Příklad. $f(x) = \mathrm{e}^x\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} (0, +\infty)$ je prostá, má inverzní $f_{-1}(x) = \ln x\colon (0, +\infty) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}$; $f_{-1} \circ f \ne f \circ f_{-1}$.

Definice. Funkce f je (*zdola*, *shora*) *omezená na* $A \subset \subset D(f)$, pokud je (zdola, shora) omezená množina $f(A)$.

Poznámka. Pokud neurčujeme A, myslíme $D(f)$.

Příklady.
1) x^2 je zdola omezená ($x^2 \ge 0$), není shora omezená.
2) $\operatorname{arctg} x$ je omezená.
3) x^3 není omezená zdola ani shora.

Definice. Funkce f je *rostoucí* (*klesající*, *neklesající*, *nerostoucí*) na množině $A \subset D(f)$, pokud $f(x) < f(y)$ ($f(x) > f(y)$, $f(x) \le f(y)$, $f(x) \ge f(y)$) pro všechna $x, y \in A$ taková, že $x < y$. Takové funkce se nazývají *monotonní*, rostoucí a klesající funkce se nazývají *ryze monotonní*.

Příklady.
1) x^2 je klesající na $(-\infty, 0\rangle$, rostoucí na $\langle 0, +\infty)$.
2) $\operatorname{sign} x$ je neklesající.
3) $\frac{1}{x}$ je klesající na $(-\infty, 0)$ a na $(0, +\infty)$, není monotonní.

Věta. *Rostoucí (klesající) funkce je prostá a má inverzní funkci, která je rovněž rostoucí (klesající).*

Definice. Funkce f je:
sudá, pokud $f(-x) = f(x)$ pro každé $x \in D(f)$;
lichá, pokud $f(-x) = -f(x)$ pro každé $x \in D(f)$.

Příklady. 1) x^2 je sudá. 2) x^3 je lichá.

Poznámka. Graf sudé funkce je symetrický podle osy y, graf liché funkce je symetrický podle počátku.

Definice. Funkce f je *periodická* s *periodou* $p > 0$, pokud $f(x + p) = f(x - p) = f(x)$ pro každé $x \in D(f)$.

Poznámka. Pro periodu p, jsou i np ($n \in \mathbb{N}$) periody. Nejmenší perioda (pokud existuje) se nazývá *základní*.

Příklad. Funkce $\sin x$ má základní periodu 2π.

Lineární transformace a graf funkce:
1) Graf $f(x) + c$ je posunutý o c ve směru osy y.
2) Graf $f(x + c)$ je posunutý o $-c$ ve směru osy x.
3) Graf $c\,f(x)$ je c-krát roztažený od osy x.
4) Graf $f(cx)$ ($c \ne 0$) je c-krát stažený k ose y.
(Pro $c < 0$ opačná orientace nebo překlopení.)

Definice. Množiny A, B mají stejnou *mohutnost* (*kardinalitu*), pokud existuje bijekce $A \xrightarrow{\text{na}} B$. Množiny které mají mohutnost $\mathbb{N}$, se nazývají *spočetné*.

Tvrzení. *$\mathbb{Q}$ je spočetná, $\mathbb{R}$ je nespočetná.*

Důkaz: 1) $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ v základním tvaru přiřadíme přirozeným číslům primárně vzestupně podle $|a| + b$, pak libovolně.
2) Pro $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ najdeme dekadický rozvoj čísla, které není v $f(\mathbb{N})$: jako n-tou cifru dekadického rozvoje vybereme cifru různou od n-té cifry dekadického rozvoje $f(n)$ a od 9.

Elementární funkce

Mocniny x^a
$a \in \mathbb{N}$: $x^a = x \cdot \ldots \cdot x$ ($a\times$); inverzní $\sqrt[a]{x}$ ($\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$);
$x^0 = 1$ i pro $x = 0$; $x^{-a} = 1/x^a$;
$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p, q nesoudělná:

$D(x^{p/q})$	q liché	q sudé ($x \ge 0$)
$p \ge 0$	$\mathbb{R}$	$\langle 0, +\infty)$
$p < 0$ ($x \ne 0$)	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(0, +\infty)$

pro $a \notin \mathbb{Q}$ pokládáme $x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}$, tedy $D(f) = (0, +\infty)$.

Exponenciální o základu $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$: a^x (impl. e^x);
inverzní: *logaritmus o základu* a: $\log_a x$;
($\log x = \log_{10} x$ *dekadický*, $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$ *přirozený*).
Pro $x \in \mathbb{Q}$ je a^x definováno (viz mocniny),
pro $x \notin \mathbb{Q}$ dodefinujeme monotónně, tj. např. pro $a > 1$:
$a^x = \sup\{a^q\colon q \in \mathbb{Q},\ q < x\} = \inf\{a^q\colon q \in \mathbb{Q},\ q > x\}$.
Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ a každé $a > 0$ platí

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y\,, \qquad (a^x)^y = a^{xy}\,.$$

Pro každé $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ platí

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y\,, \qquad x, y > 0\,,$$
$$\log_a x^y = y \log_a x\,, \qquad x > 0\,.$$

Exponenciální funkce i logaritmy lze převést na základ e:

$$a^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln a}\,, \qquad \log_a x = \tfrac{\ln x}{\ln a}\,.$$

goniometrické: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$;
inverzní: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sin(x+y) = \sin x \, \cos y + \cos x \, \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \, \cos y - \sin x \, \sin y$$
$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}\,(1 - \cos 2x)$$
$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}\,(1 + \cos 2x)$$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

hyperbolické:

$$\sinh x = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right), \qquad \operatorname{tgh} x = \tfrac{\sinh x}{\cosh x},$$
$$\cosh x = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right), \qquad \operatorname{cotgh} x = \tfrac{\cosh x}{\sinh x};$$

inverzní: $\operatorname{argsinh} x$, $\operatorname{argcosh} x$, $\operatorname{argtgh} x$, $\operatorname{argcotgh} x$.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Poznámka. V $\mathbb{C}$:
$\cos x = \frac{1}{2}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x})$, $\sin x = \frac{1}{2\mathrm{j}}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x})$.

Limity a spojitost funkcí

Definice. *Okolí bodu* $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $r > 0$ je
$U(a,r) = \{x \in \mathbb{R}\colon |x-a| < r\} = (a-r, a+r)$.
Prstencové okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $r > 0$ je
$P(a,r) = U(a,r) \setminus \{a\} = (a-r,a) \cup (a, a+r)$.
Okolí bodů $\pm\infty$ jsou (r je reálné číslo):
$U(-\infty,r) = P(-\infty,r) = \{x \in \mathbb{R}\colon x < r\} = (-\infty, r)$,
$U(+\infty,r) = P(+\infty,r) = \{x \in \mathbb{R}\colon x > r\} = (r, +\infty)$.

Definice. Funkce f definovaná v prstencovém okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ má v bodě a *limitu* $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\lim_{x\to a} f(x) = b$, $f(x) \xrightarrow{x\to a} b$), jestliže platí: Ke každému okolí U bodu b existuje prstencové okolí P bodu a tak, že $f(P) \subset U$.

Poznámka. Obecněji limita v hromadném bodě definičního oboru (v každém prstencovém okolí leží bod $D(f)$) je dána podmínkou $f(P \cap D(f)) \subset U$.

Tvrzení. *Pro každé* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *platí:*
1) $\lim_{x\to a} c = c$ *pro každé* $c \in \mathbb{R}$.
2) $\lim_{x\to a} x = a$.

Důkaz: 1) $f^{-1}(U) = \mathbb{R}$ pro každé U, např. $P = P(a,1)$.
2) $f^{-1}(U) = U$ pro každé U, např. $P = U \setminus \{a\}$.

Příklad. $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ neexistuje: pro $b \in \overline{\mathbb{R}}$ existuje $U_b \not\supset \langle -1, 1\rangle$, $f^{-1}(U_b)$ neobsahuje prstencové okolí $+\infty$.

Jednostranné limity zleva/zprava pro levá/pravá prstencová okolí a (body prstencového okolí nalevo/napravo od a).

Příklad. $\lim_{x\to 0-} \operatorname{sign} x = -1$, $\lim_{x\to 0+} \operatorname{sign} x = +1$.

Věta. *Pro funkci f definovanou v prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ je $\lim_{x\to a} f(x) = b$ právě tehdy, když $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = b$.*

Důkaz: $\Rightarrow$: pro $P(a,\delta)$ bereme jednostranná prstencová okolí $(a-\delta, a)$, $(a, a+\delta)$
$\Leftarrow$: pro $(a-\delta_-, a)$, $(a, a+\delta_+)$, $\delta = \min\{\delta_-, \delta_+\}$ bereme $P(a,\delta)$

Poznámka. Věty lze formulovat i pro jednostranné limity.

Věta (o jednoznačnosti)**.** *Každá funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.*

Důkaz: Pokud má v a limitu b, tak jiné číslo $c \in \overline{\mathbb{R}}$ není limitou: existují disjunktní okolí U_b, U_c bodů b, c, $f^{-1}(U_c)$ je disjunktní s $f^{-1}(U_b)$ a neobsahuje tedy prstencové okolí a.

Věta (o monotonii)**.** *Je-li $f \le g$ na prstencovém okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$, pak $b \le c$.*

Důkaz (sporem): Pro $b > c$ existují disjunktní okolí U_b, U_c bodů b, c a prstencová okolí $P_f \subset f^{-1}(U_b)$, $P_g \subset g^{-1}(U_c)$ bodu a, pro $x \in P_f \cap P_g$ je $f(x) > g(x)$ – spor.

Příklad. Ne pro $<$: $0 < \frac{1}{x}$ na $(0, +\infty)$, v $+\infty$ stejná limita.

Věta. *Funkce s vlastní limitou v $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je omezená na prstencovém okolí a.*

Důkaz: Existuje omezené okolí U limity, k němu P.

Věta. *Funkce s kladnou (zápornou) limitou v $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je na prstencovém okolí a kladná (záporná).*

Důkaz: Existuje okolí U limity neobsahující 0, k němu P.

Věta. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *právě tehdy, když* $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$.

Důkaz: $f(x) \in U(0,\varepsilon)$ právě tehdy, když $|f(x)| \in U(0,\varepsilon)$.

Věta. *Monotonní funkce na intervalu má v jeho krajních bodech příslušné jednostranné limity (supremum a infimum funkčních hodnot).*

Důkaz (pro f nekles. na $I = (a,b)$, $\to b-$): $c = \sup f(I)$, pro $U(c,\varepsilon)$ existuje $d \in I$ s $f(d) > c - \varepsilon$, (d,b) je levé prstencové okolí b s $f\big((d,b)\big) \subset U(c,\varepsilon)$.

Příklad. $\mathrm{e}^x\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} (0,+\infty)$ je rostoucí, tedy
$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \inf(0,+\infty) = 0$,
$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = \sup(0,+\infty) = +\infty$.

Příklad.

$$\lim_{x\to+\infty} x^a = \begin{cases} +\infty\,, & a > 0\,,\\ 1\,, & a = 0\,,\\ 0\,, & a < 0\,,\end{cases} \qquad \lim_{x\to 0+} x^a = \begin{cases} 0\,, & a > 0\,,\\ 1\,, & a = 0\,,\\ +\infty\,, & a < 0\,.\end{cases}$$

Věta (limita součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí)**.** *Limita součtu (rozdílu, součinu, podílu) funkcí je součet (rozdíl, součin, podíl) limit, pokud je definován (včetně operací s nevlastními čísly).*

Důkaz (pro součet vlastních limit): Pro $U(b+c,\varepsilon)$ uvažujme $f(P_f) \subset U(b, \frac{\varepsilon}{2})$ a $f(P_g) \subset U(c, \frac{\varepsilon}{2})$, pak $(f+g)(P_f \cap P_g) \subset$ $\subset U(b+c, \varepsilon)$.

Příklady.

1) $\lim_{x\to+\infty}(2x^2-3x+1) = |\infty-\infty+1|$ nedefinováno

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2(2-3x^{-1}+x^{-2}) = (+\infty)\cdot 2 = +\infty\,,$$

2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x^2+1} = \left|\frac{-\infty}{+\infty}\right|$ nedefinováno

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^{-1}-x^{-2}}{1+x^{-2}} = \frac{0-0}{1+0} = 0\,,$$

3) $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1} = \left|\frac{0}{0}\right|$ nedefinováno

$$= \lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}\,.$$

Věta. *Je-li* $\lim_{x\to a} f(x) > 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ *a* $g(x) > 0$ *na prstencovém okolí* $a \in \overline{\mathbb{R}}$, *pak* $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = +\infty$.

Poznámka. $\left|\frac{1}{0\pm}\right| = \pm\infty$.

Příklady.

1) $$\lim_{x\to1\pm}\frac{2}{x-1} = \left|\frac{2}{0\pm}\right| = \pm\infty\,.$$

2) $$\lim_{x\to1}\frac{-2}{(x-1)^2} = \left|\frac{-2}{0+}\right| = -\infty\,.$$

3) $$\lim_{x\to2-}\frac{\ln(2-x)}{x^2-4} = \left|\frac{-\infty}{0-}\right| = +\infty\,.$$

Věta (o sevření)**.** *Je-li* $f \le h \le g$ *na prst. okolí* $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$, *pak* $\lim_{x\to a} h(x) = b$.

Příklad.

$$\lim_{x\to0}\tfrac{\sin x}{x} = 1\,.$$

stačí $x\to0+$ (sudá) a $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, věta o sevření:

$$\begin{aligned} \tfrac12\sin x <{}& \tfrac{x}{2} < \tfrac12\tfrac{\sin x}{\cos x}\\ 1 <{}& \tfrac{x}{\sin x} < \tfrac{1}{\cos x}\\ 1 >{}& \tfrac{\sin x}{x} > \cos x \end{aligned}$$

Věta. *Je-li* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, *g je omezená na prstencovém okolí* $a \in \overline{\mathbb{R}}$, *pak* $\lim_{x\to a} f(x)\,g(x) = 0$.

Důkaz: $|g| \le M$, $0 \le |f(x)\,g(x)| \le M\,|f(x)|$, věta o sevření.

Poznámka. $|0\cdot\text{om.}| = \left|\frac{\text{om.}}{\pm\infty}\right| = 0$.

Příklad. $\lim_{x\to0} x\sin\frac{1}{x} = |0\cdot\text{om.}| = 0$.

Věta. *Je-li* $f \le g$ *na prst. okolí* $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, ($\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$), *pak* $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ ($\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$).

Věta. *Je-li* $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \{\pm\infty\}$ *a g je omezená na prstencovém okolí* $a \in \overline{\mathbb{R}}$, *pak* $\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = b$.

Důkaz: Pro $+\infty$: $g \ge M$, $f(x)+g(x) \ge f(x)+M \xrightarrow{x\to a} +\infty$.

Poznámka. $|\pm\infty + \text{om.}| = \pm\infty\,.$

Příklad. $\lim_{x\to\infty}(x+\cos x) = |{+\infty}+\text{om.}| = +\infty$.

Tvrzení. *Jestliže* $\lim_{x\to a} f(x)$ *neexistuje, pak platí:*
1) *Je-li* $\lim_{x\to a} g(x)$ *vlastní, pak* $\lim_{x\to a}\big(f(x)\pm g(x)\big)$ *neexistuje.*
2) *Je-li* $\lim_{x\to a} g(x)$ *vlastní a nenulová, pak neexistují* $\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)$ *a* $\lim_{x\to a}\big(f(x)/g(x)\big)$.

Důkaz: Sporem, existovala by $\lim_{x\to a} f(x)$ podle věty o limitě součtu, součinu, podílu.

Příklad. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{1-2^{-x}} = \left|\frac{\text{neex.}}{1}\right|$ neexistuje.

Věta (limita složené funkce)**.** *Nechť pro* $a,b,c \in \overline{\mathbb{R}}$ *platí:*
(1) $\lim_{x\to a} f(x) = b$,
(2) $\lim_{y\to b} g(y) = c$,
(3) $g(b) = c$ *nebo* $f(x) \ne b$ *na prstencovém okolí a.*
Pak $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = c$.

Důkaz: U_c
(2): existuje P_b: $P_b \xrightarrow{g} U_c$
(1): existuje P_a: $P_a \xrightarrow{f} P_b \cup \{b\}$
(3): pro $g(b) = c$ je $P_b \cup \{b\} \xrightarrow{g} U_c$, $P_a \xrightarrow{g\circ f} U_c$,
jinak existuje P'_a: $P'_a \xrightarrow{f} P_b$, $P'_a \xrightarrow{g\circ f} U_c$

Příklad. $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{1/x} = \lim_{y\to0}\mathrm{e}^y = 1$ ($\frac{1}{x} \ne 0$).

Příklad. $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$: $\lim_{x\to0} f(x) = 0$;
$g(y) = 0$ pro $y \ne 0$, $g(0) = 1$: $\lim_{y\to0} g(y) = 0$;
$(g\circ f)(x) = 1$ pro $x \in \{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$, jinak 0;
$\lim_{x\to0}(g\circ f)(x)$ neexistuje.

Definice. Funkce f je *spojitá v bodě* $a \in D(f)$, pokud ke každému okolí U bodu $f(a)$ existuje okolí V bodu a tak, že $f\big(V\cap D(f)\big) \subset U$. Funkce je *spojitá*, pokud je spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Věta. *Funkce f definovaná v okolí bodu a je v bodě a spojitá právě tehdy, když* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Poznámka. Funkce f je spojitá v izolovaných bodech $D(f)$ (pro které je $D(f)$ disjunktní s některým prst. okolím).

Poznámka. Podobně spojitosti zleva/zprava.

Příklady. 1) x je spojitá.
2) $\operatorname{sign} x$ je spojitá v bodech $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, není spojitá v bodě 0.
3) Charakteristická funkce $\langle 0,+\infty)$ je spojitá v bodech $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, zprava spojitá v 0.
4) *Dirichletova funkce* není spojitá v žádném bodě (v žádném nemá limitu):

$$d(x) = \begin{cases} 1\,, & x\in\mathbb{Q}\,,\\ 0\,, & x\notin\mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Poznámka. *Po částech spojitá funkce*: v každém omezeném intervalu jen konečně mnoho bodů nespojitosti, v nich konečné jednostranné limity.

Věta. 1) *Jsou-li* f, g *spojité v a, pak* $f\pm g$, $f\cdot g$, f/g *(pokud je definována),* $|f|$ *jsou spojité v a.*
2) *Je-li f spojitá v a, pak je omezená na okolí a.*
3) *Je-li f spojitá v a,* $f(a) > 0$, *pak* $f(x) > 0$ *na okolí a.*
4) *Je-li f spojitá v a, g v* $f(a)$, *pak* $g\circ f$ *je spojitá v a.*

Věta. *Racionální funkce jsou spojité.*

Důkaz: Spojitost konstant, x, součtu, součinu a podílu.

Věta. *Mocniny, exponenciální, goniometrické a hyperbolické funkce a funkce k nim inverzní jsou spojité.*

Posloupnosti

Definice. (Nekonečná) *posloupnost* (reálných čísel) je zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Značíme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, a_n je *n-tý člen*.

nekonečněrozměrný aritmetický vektor
obecněji $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$, $n_0 \in \mathbb{Z}$

Příklady.
1) $(2^n)_{n=1}^{\infty} = (2, 4, 8, \dots)$
$a_n = a_1 q^{n-1}$ ... *geometrická* s *kvocientem* q.
2) $(1, 3, 5, 7, \dots)$
$a_n = a_1 + (n-1)d$ ... *aritmetická* s *diferencí* d.
3) rekurentně $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ pro $n \in \mathbb{N}$:
$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 11, \dots)$ (Fibonacciho)

Pojmy a věty jako pro funkce: omezená, monotonní (stačí vztahy mezi a_n, a_{n+1}), limita. Posloupnost s vlastní limitou je omezená (nejen lokálně).

Věta. *Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$), pokud pro každé okolí U bodu a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n \in U$.*

Definice. Posloupnost s vlastní limitou je *konvergentní.*

Věta. $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *právě tehdy, když* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$ *pro každou posloupnost* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *čísel z* $D(f) \setminus \{a\}$ *s* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Příklad. $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ neexistuje:
$\lim_{n\to\infty} \pi n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \sin \pi n = 0$,
$\lim_{n\to\infty}(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1$.

Definice. *Vybraná posloupnost* (podposloupnost) z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$, kde $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

Poznámka. $a_n = f(n)$, $k_n = g(n)$: $a_{k_n} = (f \circ g)(n)$.

Definice. Číslo $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je *hromadná hodnota posloupnosti*, pokud v každém okolí a leží nekonečně mnoho jejích členů.

Věta. *Limita posloupnosti je její hromadnou hodnotou. Hromadná hodnota posloupnosti je limitou některé její vybrané posloupnosti.*

Důkaz: 1. Zřemé. 2. Okolí U_n hromadné hodnoty smršťující se k ní, $a_{k_n} \in U_n$ tak, aby $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ byla rostoucí.

Příklad. Posl. $\big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty}$ má hromadné hodnoty ± 1.

Věta. *Každá posloupnost má alespoň jednu hromadnou hodnotu (omezená posloupnost vlastní).*

Důkaz: $-\infty$ nebo $+\infty$, pokud není omezená. Pro omezenou sestrojíme posloupnost vnořených (poloviční délky) uzavřených intervalů obsahujících nekonečně mnoho členů posloupnosti, jejich průnik obsahuje hromadnou hodnotu.

Věta. *Supremum a infimum množiny hromadných hodnot posloupnosti jsou hromadné hodnoty této posloupnosti.*

Důkaz: Okolí U obsahuje hrom. hodnotu a její okolí $U' \subset U$.

limes superior ($\limsup_{n\to\infty} a_n$)
limes inferior ($\liminf_{n\to\infty} a_n$)

Věta. *Pro posloupnost je ekvivalentní:*
1) *Má limitu.*
2) *Má jedinou hromadnou hodnotu.*
3) *Limes inferior a limes superior posloupnosti jsou stejné.*
4) *Každá vybraná posloupnost má stejnou limitu.*

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta (Weierstrass). *Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá největší a nejmenší hodnoty.*

Důkaz: Pro $m = \sup f(I)$ existuje posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taková, že $f(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} m$, ta má v I hromadnou hodnotu a, k ní konverguje vybraná posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$, ze spojitosti f vyplývá $f(a_{k_n}) \xrightarrow{n\to\infty} f(a)$, tedy $m = f(a)$.

Příklady.
1) $f(x) = \frac{1}{x}$ na $(0, 1)$ (ryze monotonní funkce na otevřeném intervalu) nenabývá maxima ani minima.
2) $f(x) = -x - 1$ na $\langle -1, 0)$, $f(0) = 0$, $f(x) = 1 - x$ na $(0, 1\rangle$ nenabývá extrémů.

Věta (o mezihodnotě). *Je-li funkce f spojitá na intervalu I a nabývá-li v něm hodnot m a M, $m < M$, pak v tomto intervalu nabývá všech hodnot z intervalu $\langle m, M\rangle$.*

Důkaz: $c \in (m, M)$, m, M se nabývají v krajních bodech intervalu I_1, sestrojíme posloupnost vnořených (poloviční délky) intervalů s hodnotami v krajních bodech kolem c, jejich průnik obsahuje a, pro které $f(a) = c$.

Důsledky.
1) *Pro spojitou nekonstantní funkci je obrazem intervalu interval (uzavřeného uzavřený).*
2) *Spojitá funkce na intervalu je prostá (má inverzní funkci) právě tehdy, když je ryze monotonní.*

Důkaz: 2) Např. pro $x_1 < x_1 < x_3$, $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$, $f(x_1), f(x_3) < c < f(x_2)$ ex. vzory c v (x_1, x_2) i v (x_2, x_3).

Poznámka. Metoda bisekce pro hledání nulového bodu spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, $f(a)\,f(b) < 0$, používá metodu důkazu věty o mezihodnotě.

Věta. *Inverzní funkce k ryze monotonní funkci na intervalu je spojitá.*

Důkaz: f na I, $a \in D(f_{-1})$, $a = f(b)$, např. b vnitřní bod I, $U = (c, d) \subset I$ okolí b, existuje okolí V bodu a neobsahující $f(c), f(d)$, $f_{-1}\big(V \cap D(f_{-1})\big) \subset U$.

Příklad. $f(x) = x$ na $\langle 0,1\rangle$, $f(x) = x-1$ na $(2,3\rangle$ je rostoucí (i spojitá), inverzní není spojitá v 1.

Derivace funkce

„Okamžitá“ změna funkce jako limita průměrných změn.

Definice. *Derivace funkce f v bodě a* je
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Poznámky.
1)
$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$
2) Podobně jednostranné derivace.
3) *Derivace funkce v bodě*: $f'(a)$ (číslo, i nevlastní).
Derivace funkce: $f' : a \mapsto f'(a)$ (funkce, jen vlastní hod.).
Derivace: $' : f \mapsto f'$ (operátor).
4) Funkce f má *derivaci na intervalu I*, pokud f' existuje na I (v případných krajních bodech I příslušná jednostranná).

Příklad. Pro funkci $f(x) = \sqrt[3]{x}$ je
$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}-\sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \left|\frac{1}{0+}\right| = +\infty.$$

Věta.

0) $(c)' = 0 \qquad x\in\mathbb{R}$ ($c\in\mathbb{R}$ je konstanta).

1) $(x^a)' = ax^{a-1} \qquad x\in D(x^a)$ pro $a\notin(0,1)$,
$\qquad x\in D(x^a)\setminus\{0\}$ pro $a\in(0,1)$.

2) $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \qquad x\in\mathbb{R}$.

3) $(\sin x)' = \cos x \qquad x\in\mathbb{R}$.
$(\cos x)' = -\sin x \qquad x\in\mathbb{R}$.

Důkaz: 0) $(c)' = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$.
1) pro $a\in\mathbb{N}$: $(x^n)' = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[(x+h)^n - x^n\right] =$
$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(x^n + nx^{n-1}h + \cdots + h^n - x^n\right) =$
$= \lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + \cdots + h^{n-1}) = nx^{n-1}$.
2) $(\mathrm{e}^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^x}{h} = \mathrm{e}^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h} = \mathrm{e}^x\cdot 1 = \mathrm{e}^x$.
3) pro $\sin x$: $(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} =$
$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+h/2)\sin h/2}{h} =$
$= \lim_{h\to 0}\cos(x+h/2)\cdot\lim_{h/2\to 0}\frac{\sin h/2}{h/2} = \cos x\cdot 1 = \cos x$.

Příklady.
1) $(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$, $x\in\mathbb{R}$.
2) $(\sqrt[3]{x})' = (x^{1/3})' = \frac{1}{3}x^{1/3-1} = 1/\big(3\sqrt[3]{x^2}\big)$, $x\neq 0$.

Věta. *Funkce je spojitá v každém bodě, ve kterém má vlastní derivaci.*

Důkaz: $f(x) = f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a) \xrightarrow{x\to a}$
$f(a) + f'(a)\cdot 0 = f(a)$.

Příklady.
1) $\operatorname{sign} x$ je nespojitá v 0,
$\operatorname{sign}'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sign} h - \operatorname{sign} 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{|h|} = \left|\frac{1}{0+}\right| = +\infty$.
2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ je spojitá v 0, $f'(0) = +\infty$.
3) $f(x) = |x|$ je spojitá v 0, $f'(0)$ neexistuje:
$f'_\pm(0) = \lim_{h\to 0\pm}\frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0\pm}\pm 1 = \pm 1$.

Poznámka. Existuje funkce spojitá na $\mathbb{R}$, která nemá v žádném bodě derivaci.

Věta (o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu)**.** *Mají-li funkce f, g vlastní derivace v bodě a, pak:*
1) $(f\pm g)'(a) = f'(a)\pm g'(a)$*;*
2) $(f\cdot g)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$*;*
3) *je-li $g(a)\neq 0$, pak*
$$\left(\tfrac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}.$$

Důkaz:
$$\frac{(f\pm g)(x) - (f\pm g)(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \pm \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$
$$\xrightarrow{x\to a} f'(a)\pm g'(a);$$
$$\frac{(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(a)}{x-a} =$$
$$= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(x) + f(a)\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$
$$\xrightarrow{x\to a} f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a);$$

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} =$$
$$= \frac{1}{g(a)\,g(x)}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(a) - f(a)\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]$$
$$\xrightarrow{x\to a} \frac{1}{g(a)^2}\left[f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)\right].$$

Poznámky.
1) Podobně pro derivace funkcí (nejen v bodě).
2) Pro $c\in\mathbb{R}$ je $(cf)' = (c)'f + cf' = cf'$ („derivace násobku je násobek derivace“).
3) Zobrazení $' : f\to f'$ je lineární.
4) $(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)' = f_1' + f_2' + \cdots + f_n'$,
$(f_1 f_2\cdots f_n)' = f_1' f_2\cdots f_n + f_1 f_2'\cdots f_n + \cdots + f_1 f_2\cdots f_n'$.

Příklady.
1) $(3x^2 + 2x + 7)' = 6x + 2$.
2) $(x^2\,\mathrm{e}^x\sin x)' = 2x\,\mathrm{e}^x\sin x + x^2\,\mathrm{e}^x\sin x + x^2\,\mathrm{e}^x\cos x$.
3) $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$
$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Věta (o derivaci složené funkce)**.** *Má-li f vlastní derivaci v a, g vlastní derivaci v $f(a) = b$, pak $g\circ f$ má v a derivaci*
$$(g\circ f)'(a) = g'(b)\cdot f'(a).$$

Důkaz: Označme $f(x) = y$. Funkce
$$t(y) = \begin{cases}\frac{g(y)-g(b)}{y-b}, & y\neq b,\\ g'(b), & y = b,\end{cases}$$
je spojitá v b, v okolí b je $g(y) - g(b) = t(y)\,(y-b)$, platí
$$\frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(a)}{x-a} = \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{x-a} =$$
$$= \frac{g(y)-g(b)}{x-a} = \frac{t(y)\,(y-b)}{x-a} =$$
$$= t(y)\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow{x\to a\ (\Rightarrow\ y\to b)} g'(b)\,f'(a).$$

Poznámky.
1) Schematicky pro $f(x) = y$, $g(y) = z$: $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
2) $(f_n\circ\cdots\circ f_2\circ f_1)' = f_n'\cdots f_2' f_1'$.

Příklady.
1) $(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x$.
2) $(\mathrm{e}^{\cos x^3})' = \mathrm{e}^{\cos x^3} \cdot (-\sin x^3) \cdot 3x^2$.
3) $\big(f(ax)\big)' = f'(ax) \cdot a$.

Poznámka. Obecnější vzorce pro $a \in \mathbb{R}$ (na $\mathbb{R}$):
$(\mathrm{e}^{ax})' = a\,\mathrm{e}^{ax}$, $(\sin ax)' = a\cos ax$, $(\cos ax)' = -a\sin ax$.

Derivací $(f_{-1} \circ f)(x) = x$ dostaneme $f'_{-1}\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = 1$.

Věta (o derivaci inverzní funkce)**.** *Je-li funkce f spojitá a ryze monotonní na intervalu I a existuje-li nenulová derivace funkce f v $a \in I$, pak*

$$f'_{-1}\big(f(a)\big) = \frac{1}{f'(a)}\,.$$

Důkaz: Označme $y = f(x)$, $b = f(a)$. $f(I)$ je otevřený interval, existuje spojitá f_{-1} na $f(I)$.

$$\frac{f_{-1}(y) - f_{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \xrightarrow{y \to b\ (\Rightarrow\ x \to a)} \frac{1}{f'(a)}\,.$$

Poznámka. Obvykle vycházíme z funkce, jejíž derivaci chceme spočítat, takže podmínky monotonie a nenulovosti derivace ověřujeme pro inverzní funkci.

Příklad. $\ln x$ je inverzní k e^y, která je spojitá, rostoucí a má nenulovou derivaci. Pro $x \in D(\ln) = (0, +\infty)$ je

$$(\ln x)' = \frac{1}{(\mathrm{e}^y)'} = \frac{1}{\mathrm{e}^y} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \frac{1}{x}\,.$$

Věta.

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}\,,\ \ (\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{x^2+1}\,,\quad x \in \mathbb{R}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)$$

Příklad. Důkaz vzorce o derivaci x^a pro $a \in \mathbb{R}$, $x > 0$:
$(x^a)' = \big(\mathrm{e}^{a\ln x}\big)' = \mathrm{e}^{a\ln x} \cdot \frac{a}{x} = a\,x^{a-1}$.

Definice. *Derivaci řádu n (n-tou derivaci)* funkce f značíme $f^{(n)}$ nebo $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x}$ a definujeme rekurentně

$$f^{(0)} = f\,, \qquad f^{(n)} = \big(f^{(n-1)}\big)' \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}\,.$$

Příklad. Pro $f(x) = 1/x = x^{-1}$ dostáváme

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)x^{-2} \\ f''(x) &= \big((-1)x^{-2}\big)' = (-1)(-2)x^{-3} \\ f'''(x) &= \big((-1)(-2)x^{-3}\big)' = (-1)(-2)(-3)x^{-4} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n\,\frac{n!}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

Poznámky.
1) Derivace řádu n je lineární zobrazení, takže
$(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_k f_k)^{(n)} = c_1 f_1^{(n)} + c_2 f_2^{(n)} + \dots + c_k f_k^{(n)}$.
2) Derivace součinu dvou funkcí se počítají následovně:

$$\begin{aligned} (fg)' &= f'g + fg'\,, \\ (fg)'' &= (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''\,, \\ (fg)''' &= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''\,, \\ &\vdots \\ (fg)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}\,. \end{aligned}$$

Aplikace derivací

Geometrické aplikace

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ... směrnice sečny body $[a, f(a)]$, $[x, f(x)]$
$f'(a)$ ... směrnice tečny v $[a, f(a)]$
tečna:

$$y - f(a) = f'(a)\,(x-a)$$
$$y = f(a) + f'(a)\,(x-a)$$

směrový vektor tečny (kolmý k normále): $\big(1, f'(a)\big)$
normála:

$$x + f'(a)\,y = a + f'(a)\,f(a)$$

$$x = a\,, \qquad \text{pro } f'(a) = 0\,,$$

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}\,(x-a) \qquad \text{pro } f'(a) \neq 0\,.$$

Příklad. Určete tečnu a normálu grafu funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ v bodě [1,?].
$f(1) = \mathrm{e}$, $f'(x) = \mathrm{e}^x$, $f'(1) = \mathrm{e}$
tečna: $y = f(1) + f'(1)\,(x-1) = \mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) = \mathrm{e}x$
normála: $y = \mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) = -\frac{1}{\mathrm{e}}\,x + (\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1})$

Věty o střední hodnotě

Věta (Rolleova)**.** *Nechť pro funkci f platí*
(1) je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$;
(2) má derivaci v každém bodě intervalu (a, b);
(3) $f(a) = f(b)$.
Pak $f'(c) = 0$ pro některý bod $c \in (a, b)$.

Důkaz: pro konstantní je $f' = 0$ na (a, b);
nekonstantní nabývá minima nebo maxima uvnitř $\langle a, b\rangle$;
například pro maximum v bodě $c \in (a, b)$:
$f'(c) = f'_-(c) = \lim_{x\to c-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$,
$f'(c) = f'_+(c) = \lim_{x\to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$.

Příklady. Žádný předpoklad nelze vypustit.
1) Funkce $f(x) = x$ na $\langle 0, 1)$, $f(1) = 0$ nesplňuje (1).
2) Funkce $f(x) = |x|$ na $\langle -1, 1\rangle$ nesplňuje (2).
3) Funkce $f(x) = x$ na $\langle 0, 1\rangle$ nesplňuje (3).

Věta (Lagrangeova, o přírůstku funkce)**.** *Nechť funkce f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a má derivaci v každém bodě (a, b). Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že*

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)\,.$$

Důkaz: funkce $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a)$ splňuje podmínky Rolleovy věty, existuje $c \in (a, b)$:
$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Tvrzení. *Je-li funkce f spojitá v bodě a zprava a existuje-li $f'(a+)$, pak*

$$f'_+(a) = f'(a+)\,.$$

Důkaz: z existence $f'(a+)$ plyne existence vlastní derivace a tedy i spojitost f na pravém okolí a; pro x z tohoto okolí podle Lagrangeovy věty existuje $c_x \in (a, x)$; pro $x \to a+$ je $c_x \to a+$; $f'_+(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a+} f'(c_x) = = \lim_{c_x \to a+} f'(c_x) = f'(a+)$

Poznámka. Podobně pro derivaci zleva, oboustrannou.

Příklad. $f(x) = \arcsin x$:
$f'_+(-1) = \lim_{x\to -1+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left|\frac{1}{0+}\right| = +\infty$.

Příklad. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$:
$f'(0) = 0$, $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x})$ neex.

Věta (Cauchyova)**.** *Nechť funkce f, g jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$, mají vlastní derivaci na (a, b) a $g'(x) \neq 0$ na (a, b). Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že*
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

Důkaz: funkce $h(x) = \big(f(b)-f(a)\big)\,g(x) - \big(g(b)-g(a)\big)\,f(x)$ splňuje podmínky Rolleovy věty, existuje $c \in (a, b)$:
$0 = h'(c) = \big(f(b) - f(a)\big)\,g'(c) - \big(g(b) - g(a)\big)\,f'(c)$,
protože $g'(x) \neq 0$ na (a, b), je $g'(c) \neq 0$ a také $g(b) \neq g(a)$

l'Hospitalovo pravidlo

Věta (l'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť pro funkce f, g platí:*
(1) $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$ *nebo* $\lim_{x\to a+} |g(x)| = +\infty$,
(2) *existuje* $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.
Pak
$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Důkaz: pro $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$:
f', g' existují a $g'(x) \neq 0$ na některém $(a, b\rangle$, položme $f(a) = g(a) = 0$ (pak f, g jsou spojité na $\langle a, b\rangle$); podle Cauchyovy věty pro $\langle a, x\rangle$ ($x \in (a, b)$) existuje $c_x \in (a, x)$:
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \xrightarrow[c_x\to a+]{x\to a+} \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Poznámky.
1) Podobně pro limitu zleva či oboustrannou v $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
2) L'Hospitalovo pravidlo lze použít opakovaně.

Příklady.
1) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$.
2) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left|\frac{+\infty}{+\infty}\right| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{(1/2)x^{-1/2}} =$
$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$.
3) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = \left|\frac{+\infty}{+\infty}\right| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{2x} =$
$= \left|\frac{+\infty}{+\infty}\right| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{2} = +\infty$.
4) $\lim_{x\to 0+} x \ln x = |0 \cdot (-\infty)| = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} =$
$= \left|\frac{-\infty}{+\infty}\right| \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0$.
5) $\lim_{x\to +\infty}(1 + 1/x)^x = \exp[\lim_{x\to +\infty} x \ln(1 + 1/x)] =$
$= \exp\big[\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+1/x)}{1/x}\big] =$
$\overset{\text{l'H}}{=} \exp\big[\lim_{x\to +\infty} \frac{1/(1+1/x)\cdot(-1)/x^2}{-1/x^2}\big]$
$= \exp[\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1+1/x}] = \exp 1 = \mathrm{e}$.
6) $\lim_{x\to +\infty}(\ln x - x) = |\infty - \infty| = \lim_{x\to +\infty} \ln \frac{x}{\mathrm{e}^x} = -\infty$.

Poznámka. Pokud limita podílu derivací neexistuje, nelze l'Hospitalovo pravidlo použít. To neznamená, že limita podílu funkcí neexistuje: $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x} = \left|\frac{\text{omez.}}{+\infty}\right| = 0$, ale limita podílu derivací $\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos x}{1}$ neexistuje.

Poznámka. L'Hospitalovo pravidlo lze použít i pro výpočet limit posloupností, pokud najdeme vhodnou funkci. Například $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^n/n = \lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x/x = +\infty$.

Taylorův polynom

Věta (Taylorova)**.** *Nechť funkce f má spojité derivace do řádu $n \geq 0$ na $\langle a, x\rangle$, $f^{(n+1)}$ existuje v každém bodě (a, x). Pak existuje $c \in (a, x)$ tak, že*
$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{T_n(x)} +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,.$$

$T_n(x)$: *Taylorův polynom* funkce f v bodě a řádu n, *zbytek v Lagrangeově tvaru.*

Poznámky.
1) Podobně pro $\langle x, a\rangle$.
2) $n = 0$: $f(x) = f(a) + f'(c)\,(x - a)$ (Lagrange).
3) $f^{(n+1)}$ spojitá, x blízko a … c blízko a … $f^{(n+1)}(c)$ blízko $f^{(n+1)}(a)$ … T_{n+1} přesnější

Důkaz:
$$\begin{aligned} T_n(a) &= f(a)\\ T_n'(a) &= f'(a)\\ &\vdots\\ T_n^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a)\end{aligned}$$
$$f(x) = T_n(x) + M(x-a)^{n+1}$$
$$g(t) = f(t) - T_n(t) - M(t-a)^{n+1}, \qquad t \in \langle a, x\rangle$$
Rolle $(n+1)$-krát:
$$\begin{array}{lll} & g(x) = 0 & g(a) = 0\\ \exists\, c_1 \in (a, x): & g'(c_1) = 0 & g'(a) = 0\\ \vdots & & \\ \exists\, c_n \in (a, c_{n-1}): & g^{(n)}(c_n) = 0 & g^{(n)}(a) = 0\\ \exists\, c \in (a, c_n): & g^{(n+1)}(c) = 0 & \end{array}$$
$$f^{(n+1)}(c) - 0 - M \cdot (n+1)! = 0$$
$$M = \tfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Příklady.
$$\mathrm{e}^x \sim 1 + \tfrac{1}{1!}\,x + \tfrac{1}{2!}\,x^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}\,x^n$$
$$\cos x \sim 1 - \tfrac{1}{2!}\,x^2 + \tfrac{1}{4!}\,x^4 - \tfrac{1}{6!}\,x^6 + \cdots$$
$$\sin x \sim x - \tfrac{1}{3!}\,x^3 + \tfrac{1}{5!}\,x^5 - \tfrac{1}{7!}\,x^7 + \cdots$$

Poznámky.
1) Taylorův p. sudé (liché) funkce v 0 je funkce sudá (lichá).
2) Taylorův p. řádu n pro polynom P stupně $\leq n$ je P.
3) Taylorova řada: nekonečný součet.

Pro výpočet sinu nebo kosinu stačí interval $\langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle$. Například $\cos \frac{45}{8}\pi = \cos \frac{13}{8}\pi = -\cos \frac{5}{8}\pi = \cos \frac{3}{8}\pi = \sin \frac{\pi}{8}$.

Příklad. Odhadněte $\sin \frac{\pi}{6}$ Taylorovým p. řádu 3 v 0.
$T_3(x) = x - \frac{1}{6}\,x^3$, $T_3(\frac{\pi}{6}) = 0{,}499\,674\ldots$
Protože $T_3 = T_4$, je chyba
$\left|\sin(\frac{\pi}{6}) - T_4(x)\right| = \left|\frac{\sin^{(5)}(c)}{5!}\cdot(\frac{\pi}{6})\right| \leq \frac{1}{120}\cdot(\frac{\pi}{6})^5 = 0{,}000\,327\ldots$
Skutečná chyba je dost přesně rovna tomuto odhadu, T_5 dá výrazně přesnější hodnotu $0{,}500\,002\ldots$

Příklad. Spočtěte číslo e s přesností 10^{-3}, víte-li, že $\mathrm{e} < 3$.
$f(x) = \mathrm{e}^x$, $a = 0$, $\mathrm{e} = f(1) \approx T_n(1)$
chyba $\left|\frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}\, 1^{n+1}\right| \le \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$ pro $n \ge 6$
$T_6(1) = 2{,}718\,0\overline{5}$, chyba $0{,}000\,226\ldots$, odhad $0{,}000\,595\ldots$

Průběh funkce

Monotonie a extrémy

Věta (o monotonii)**.** *Je-li funkce f spojitá na intervalu I a má-li v každém vnitřním bodě I derivaci, pak:*
1) *Je-li $f'(x) > 0$ uvnitř I, pak f je rostoucí v I.*
2) *Je-li $f'(x) < 0$ uvnitř I, pak f je klesající v I.*
3) *Je-li $f'(x) \ge 0$ uvnitř I, pak f je neklesající v I.*
4) *Je-li $f'(x) \le 0$ uvnitř I, pak f je nerostoucí v I.*

Důkaz: $x, y \in I$, $x < y$
Lagrange: $f(x) - f(y) = f'(c)\,(x - y)$, $c \in (x, y)$
1) $f(x) - f(y) < 0 \ldots\ f(x) < f(y) \ldots$ rostoucí
2)–4) podobně

Poznámky.
1) Je-li $f' = 0$ na intervalu, pak f je konstantní.
2) Je-li $f' = g'$ na intervalu, pak f, g se liší o konstantu.

Příklad. $f(x) = x^3 - 3x + 1$
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$
$f' > 0$ na $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \ldots\ f$ rostoucí na $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 1, +\infty)$
$f' < 0$ na $(-1, 1) \ldots\ f$ klesající na $\langle -1, 1\rangle$

Příklad. $f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$
$f' > 0$ na $(-\infty, 0), (0, +\infty)$
$\ldots\ f$ rostoucí na $(-\infty, 0\rangle, \langle 0, +\infty) \ldots$ rostoucí na $\mathbb{R}$

Věta. *Je-li $f'(a) > 0$, pak existuje okolí U bodu a tak, že pro $x, y \in U$, $x < a < y$, je $f(x) < f(a) < f(y)$ (f je rostoucí v bodě a).*

Důkaz:
$$0 < f'(a) = \begin{cases} \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & f(x) < f(a) \text{ vlevo} \\ \lim_{y\to a+} \frac{f(y)-f(a)}{y-a}, & f(y) > f(a) \text{ vpravo} \end{cases}$$

Poznámky.
1) $f'(a) < 0 \ldots\ f$ je klesající v bodě a.
2) Pro $f'(a) = 0$ se nic netvrdí.

Definice. Funkce f má v bodě a *lokální minimum* (*lokální maximum*), jestliže $f(x) \ge f(a)$ ($f(x) \le f(a)$) na některém prstencovém okolí bodu a.

Poznámky.
1) *Lokální extrém*: lok. minimum nebo lok. maximum.
2) *Ostrý* lokální extrém: ostrá nerovnost.

Věta. *Má-li funkce f v bodě a lokální extrém, pak buď $f'(a)$ neexistuje nebo $f'(a) = 0$ (a je* stacionární bod *f).*

Důkaz: $f'(a) > 0 \ldots\ f$ rostoucí v $a \ldots$ není lokální extrém
$f'(a) < 0 \ldots\ f$ klesající v $a \ldots$ není lokální extrém

Příklad. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (viz dříve)
$f'(x) = 3x^2 - 3$, existuje všude, nulová v ± 1
$f(-1) = 3 \ldots$ ostré lokální maximum
$f(1) = -1 \ldots$ ostré lokální minimum

Příklad. $f(x) = |x|$
$f'(x) = \operatorname{sign} x$ pro $x \ne 0$, $f'(0)$ neexistuje
$f(0) = 0$ ostré lokální minimum

Příklad. $f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$ existuje všude, nulová v 0
$f(0) = 0$ není lokální extrém

Věta. *Nechť $f'(a) = 0$.*
1) *Je-li $f''(a) > 0$, pak f má v a ostré lokální minimum.*
2) *Je-li $f''(a) < 0$, pak f má v a ostré lokální maximum.*

Důkaz: 1) $f''(a) > 0 \ldots\ f'$ rostoucí v $a \ldots\ f'(x) < f'(a) = 0 < f'(y)$ pro $x < a < y$ v některém okolí $\ldots\ f$ klesající vlevo, rostoucí vpravo $\ldots$ v a ostré lok. minimum
2) podobně nebo přechodem k $-f$

Příklad. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (viz dříve)
$f'(x) = 3x^2 - 3$, $x_{1,2} = \pm 1$, $f''(x) = 6x$
$f''(-1) = -6 < 0 \ldots$ ostré lokální maximum
$f''(1) = 6 > 0 \ldots$ ostré lokální minimum

Příklad. $f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$, $x_{1,2} = 0$, $f''(x) = 6x$
$f''(0) = 0 \ldots$ kritérium nerozhodne, není l. e.

Příklad. $f(x) = x^4$
$f'(x) = 4x^3$, $x_{1,2,3} = 0$, $f(0) = 0$ ostré lok. minimum
$f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0 \ldots$ kritérium nerozhodne, je l. e.
$f^{(3)}(x) = 24x$, $f^{(3)}(0) = 0$
$f^{(4)}(x) = 24$, $f^{(4)}(0) = 24 > 0$

Poznámka. Pro $f'(a) = \cdots = f^{(2n-1)}(a) = 0$:
1) $f^{(2n)}(a) > 0 \ldots$ ostré lokální minimum,
2) $f^{(2n)}(a) < 0 \ldots$ ostré lokální maximum.

Věta. *Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá maxima (minima) buď v bodě, ve kterém má lokální maximum (minimum), nebo v některém krajním bodě intervalu.*

Důkaz: Extrém ve vnitřním bodě je lokální.

Poznámka. Porovnáváme hodnoty v bodech, kde derivace není nebo je nulová, v krajních bodech intervalu, které do něj patří. Ověříme limity v nepatřících krajních bodech.

Příklad. $f(x) = x^2 + 2x$ na $\langle -2, +\infty)$. $f'(x) = 2x + 2$,
nemá derivaci: $\emptyset$,
stacionární body: -1, $f(-1) = -1$,
patřící krajní body: -2, $f(-2) = 0$,
nepatřící krajní body: $+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,
$\min f = f(-1) = -1$, $\max f$ neexistuje.

Konvexita, konkavita, inflexní body

Konvexita: 1) spojnice grafu nad grafem, 2) tečna pod grafem, 3) směrnice sečen rostou.

Definice. Funkce f je *konvexní* na intervalu I, jestliže pro každé $x, y, z \in I$, $x < y < z$, platí

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \le \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

(*konkávní* pro $\ge$, *ryze konv.* pro $<$, *ryze konk. pro* $>$).

Věta. *Je-li f spojitá na intervalu I a má-li v každém vnitřním bodě I druhou derivaci, pak:*
1) *Je-li $f''(x) \ge 0$ uvnitř I, pak f je konvexní.*
2) *Je-li $f''(x) \le 0$ uvnitř I, pak f je konkávní.*

Důkaz: 1) $x < y < z$: f' je neklesající, Lagrange … existují $c \in (x, y)$, $d \in (y, z)$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \le f'(d) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Poznámka. Podobně pro ostré nerovnosti s „ryze“.

Definice. Bod $[a, f(a)]$ je *inflexním bodem* grafu funkce f (funkce f má v bodě a *inflexi*), pokud je funkce f spojitá v bodě a, existuje $f'(a)$ a funkce f je na některém jednostranném okolí a ryze konvexní a na některém jednostranném okolí a ryze konkávní.

Věta.
1) *Má-li f v a inflexi, pak $f''(a)$ neexistuje nebo $f''(a) = 0$.*
2) *Je-li $f''(a) = 0$, $f'''(a) \ne 0$, pak f má v a inflexi.*

Poznámka. $f''(a) = \cdots = f^{(2n)}(a) = 0$, $f^{(2n+1)}(a) \ne 0$ … inflexe v a.

Příklad. $f(x) = x^3 - 3x + 1$
$f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$, $x_1 = 0$
$f'''(x) = 6$, $f'''(0) \ne 0$ … 0 je inflexní bod
nebo: $f'' < 0$ pro $x < 0$, $f'' > 0$ pro $x > 0$

Asymptoty

$f(x) \sim px + q$

Definice. Má-li funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, nazýváme přímku o rovnici $x = a$ *asymptotou* grafu funkce f v bodě a. *Asymptota* grafu funkce f v bodě $a \in \{\pm\infty\}$ je přímka o rovnici $y = px + q$ taková, že:

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) - px - q\big) = 0\,.$$

Příklad. $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}x$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$\lim_{x \to 1\pm} f(x) = \pm\infty$ … $x = 1$ je asymptota v 1
$\lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - \frac{1}{2}\,x\big) = 0$ … $y = \frac{1}{2}\,x$ je asymptota v $\pm\infty$

Věta. *Graf funkce f má v $a \in \{\pm\infty\}$ asymptotu o rovnici $y = px + q$ právě tehdy, když*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x} = p\,, \quad \lim_{x \to a} \big(f(x) - px\big) = q\,.$$

Příklad. $f(x) = x \sin x$
$\lim_{x \to \infty} f(x)/x = \lim_{x \to \infty} \sin x$ neex. … as. v $+\infty$ neex.

Příklad. $f(x) = x^2$
$\lim_{x \to \infty} f(x)/x = \lim_{x \to \infty} x = +\infty$ … as. v $+\infty$ neex.

Příklad. $f(x) = \ln x$
$\lim_{x \to \infty} (\ln x)/x = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ (l'H)
$\lim_{x \to \infty} (\ln x - 0 \cdot x) = +\infty$ … as. v $+\infty$ neex.

Příklad. $f(x) = x + |x| + 1 + \frac{1}{x-1}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$\lim_{x \to 1\pm} = \pm\infty$ … asymptota $x = 1$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, $\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - 2x\big) = 1$
… asymptota $y = 2x + 1$ v $+\infty$
$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$
… asymptota $y = 1$ v $-\infty$

Poznámky.
1) Je-li $\lim_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ pro $a \in \{\pm\infty\}$, pak asymptota v a má rovnici $y = b$.
2) Existují-li asymptota v $a \in \{\pm\infty\}$ o rovnici $y = px + q$ a $\lim_{x \to a} f'(x)$, pak $p = \lim_{x \to a} f'(x)$.

Příklad. $f(x) = \frac{1}{x} \sin x^2$
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ … asymptota $y = 0$ v $\pm\infty$
$\lim_{x \to \pm\infty} f'(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \big(-\frac{1}{x^2} \sin x^2 + 2 \cos x^2\big)$ … neex.

Shrnutí vyšetřování průběhu funkce

f: definiční obor, sudost, lichost, perioda, spojitost, limity v hraničních bodech $D(f)$, v bodech nespojitosti, asymptoty.
f': monotonie, (lokální) extrémy, obor hodnot, tečny grafu v hraničních bodech $D(f)$, $D(f')$.
f'': konvexita/konkavita, inflexní body (včetně tečen).
Graf.

Příklad. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3|x|$

Příklad. $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}$

Asymptotické chování funkcí

Definice. Nechť funkce g je definována na prstencovém okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
1) Funkce f je třídy $O(g)$ ($f \in O(g)$, $f = O(g)$) pro $x \to a$, pokud existuje číslo M a prstencové okolí P bodu a tak, že $|f(x)| \le M\,|g(x)|$ pro každé $x \in P$.
2) Funkce f je třídy $\Theta(g)$ ($f \in \Theta(g)$, $f = \Theta(g)$) pro $x \to a$, pokud existují kladná čísla m, M a prstencové okolí P bodu a tak, že $m\,|g(x)| \le |f(x)| \le M\,|g(x)|$ pro každé $x \in P$.

Poznámka. Podobně pro jednostranné limity, posloupnosti.

Poznámka. $f \in \Theta(g)$ právě tehdy, když platí $f \in O(g)$ a $g \in O(f)$, tj. právě tehdy, když $g \in \Theta(f)$.

Věta. *Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*
1) *Je-li $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$, pak $f \in O(g)$ pro $x \to a$.*
2) *Je-li $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak $f \in \Theta(g)$ pro $x \to a$.*

Důkaz: 1) Vlastní limita … omezenost M na prstencovém okolí P bodu a, tj. $\big|\frac{f(x)}{g(x)}\big| \le M$ na P.
2) Limita abs. hodnoty b … existuje $m \in (0, b)$, $M \in$ $\in (b, +\infty)$ a prstencové okolí P bodu a tak, že $m \le \big|\frac{f(x)}{g(x)}\big| \le$ $\le M$ na P.

Příklad. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^3} = 2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f \in \Theta(x^3)$ pro $x \to +\infty$
$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 5 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f \in \Theta(x)$ pro $x \to 0$

Poznámky.
1) Stačí příslušná „omezenost“ $|f/g|$ na prstencovém okolí a ($\limsup_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$, pro Θ navíc $\liminf_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| > 0$).
2) Existují různé definice Θ (jen pro kladné/nezáporné funkce, bez absolutních hodnot), shodují se pro kladné.
3) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$: $f \sim g$ (asymptoticky ekvivalentní, speciální případ $f \in \Theta(g)$).
4) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$: $f \in o(g)$ ($o(g) \subset O(g)$).
5) Pokud označíme $f \in o(g)$ pro $n \to \infty$ jako $f \prec g$:
$\ln n \prec n^a\ (a > 0) \prec a^n\ (a > 1) \prec n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n} \prec n^n$.
6) Obvykle $x \to 0(+)$ (např. chyba aproximace Taylorovým polynomem), $x \to +\infty$ (např. konvergence integrálu), $n \to \infty$ (např. konvergence řad, složitost algoritmů).

Věta. *Uvažujme $x \to a$ pro $a \in \overline{\mathbb{R}}$, g, g_1, g_2 funkce na prstencovém okolí a.*
1) *Třída $O(g)$ je uzavřena na součet a násobek.*
2) *Je-li $f_1 \in O(g_1)$ a $f_2 \in O(g_2)$, pak $f_1 f_2 \in O(g_1 g_2)$.*

Důkaz:
1) $f_1, f_2 \in O(g)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; pro $i \in \{1, 2\}$ existuje číslo M_i a prstencové okolí P_i bodu a tak, že $|f_i(x)| \le M_i\,|g(x)|$ na P_i; $|c_1\, f_1(x) + c_2\, f_2(x)| \le |c_1|\,|f_1(x)| + |c_2|\,|f_2(x)| \le$ $\le (|c_1| M_1 + |c_2|\, M_2)\,|g(x)|$ na $P_1 \cap P_2$.
2) Pro $i \in \{1, 2\}$ existuje číslo M_i a prstencové okolí P_i bodu a tak, že $|f_i(x)| \le M_i\,|g_i(x)|$ na P_i; $|f_1(x)\, f_2(x)| \le$ $\le M_1 M_2\,|g_1(x)\, g_2(x)|$ na $P_1 \cap P_2$.

Poznámka. Speciálně pro $f \in O(g)$, h, platí $fh \in O(gh)$.

Příklad.
$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\,(1 - \cos x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(1 - (1 - \frac{1}{2}\,x^2 + O(x^3))\right) =$
$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}\,x^2 + O(x^3)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} + O(x)\right) = \frac{1}{2}$.

Neurčitý integrál

Definice. Funkce F se nazývá *primitivní funkce* k funkci f na intervalu I, jestliže $F' = f$ na I.

Poznámky.
1) V krajních bodech jednostranné derivace.
2) Lze zobecnit: na sjednocení intervalů; $F' = f$ až na konečnou (či jinou) množinu.
3) Ne všechny funkce mají primitivní.

Věta (vlastnost mezihodnoty pro derivaci). *Nechť f je derivací F na intervalu I, $a, b \in I$, $f(a) < d < f(b)$. Pak existuje c mezi a, b takové, že $f(c) = d$.*

Důkaz: $G(x) = F(x) - dx$ má vlastní derivaci ... je spojitá ... nabývá minima v c ... $G'_{(\pm)}(a) < 0 < G'_{(\pm)}(b)$, tj. c mezi a, b ... $G'(c) = 0$ ... $f(c) = d$.

Příklad. $\operatorname{sign} x$ není derivací žádné funkce.

Věta. *Spojitá funkce na intervalu má primitivní funkci.*

Poznámka. Primitivní funkce k e^{-x^2} existuje, ale nelze ji vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

Věta.
1) *Je-li F primitivní funkce k f na I, $c \in \mathbb{R}$, pak $F + c$ je primitivní funkce k f na I.*
2) *Jsou-li F_1, F_2 primitivní funkce k f na I, pak $F_1 - F_2$ je konstantní na I.*

Důkaz:
1) $(F + c)' = F' + 0 = F' = f$
2) $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$ ... $F_1 - F_2$ konst. na I

Příklad. Na disjunktních intervalech mohou být konstanty různé, např. pro $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \neq 0$:
$$F(x) = \begin{cases} -x + c_1\,, & x < 0\,, \\ x + c_2\,, & x > 0\,. \end{cases}$$

Definice. Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I nazýváme *neurčitým integrálem* f na I (pokud je neprázdná).
$$\int f = \int f(x)\ \mathrm{d}x = \{F + c \colon c \in \mathbb{R}\} = F + c\,.$$

Tabulkové integrály:
$$\int x^a\ \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c\,, \qquad \text{intervaly } D(x^a)\ (a \neq -1)$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c\,, \qquad x \in (-\infty, 0),\ x \in (0, +\infty)$$
$$\int \mathrm{e}^{ax}\ \mathrm{d}x = \tfrac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax} + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\ (a \neq 0)$$
$$\int \sin ax\ \mathrm{d}x = -\tfrac{1}{a}\cos ax + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\ (a \neq 0)$$
$$\int \cos ax\ \mathrm{d}x = \tfrac{1}{a}\sin ax + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\ (a \neq 0)$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + c\,, \qquad x \in (-1, 1)$$

Příklady.
1) $\int x^6\ \mathrm{d}x = \frac{1}{7}\,x^7 + c$, $x \in \mathbb{R}$.
2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \frac{-1}{2x^2} + c$, $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, +\infty)$.
3) $\int \sqrt[4]{x}\ \mathrm{d}x = \frac{4}{5}\,x\,\sqrt[4]{x} + c$, $x \in \langle 0, +\infty)$.
4) $\int \sqrt[5]{x}\ \mathrm{d}x = \frac{5}{6}\,x\,\sqrt[5]{x} + c$, $x \in \mathbb{R}$.

Věta (linearita). *Jsou-li $F_1, \dots, F_n$ primitivní funkce k $f_1, \dots, f_n$ na I, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, pak $c_1 F_1 + \dots + c_n F_n$ je primitivní funkce k $c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$ na I.*

Důkaz:
$(c_1 F_1 + \dots + c_n F_n)' = c_1 F_1' + \dots + c_n F_n' = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$

Příklad.
$\int \frac{(x+3)^2}{x} = \frac{1}{2}\,x^2 + 6x + 9\ln|x| + c$, $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, +\infty)$

Věta (integrace per partes). *Nechť na intervalu I existují u', v', $\int u'v$. Pak*
$$\int uv' = uv - \int u'v \ \text{ na } I\,.$$

Důkaz: $(uv - \int u'v)' = u'v + uv' - u'v = uv'$.

Příklad. $\int (x+1)\sin x \; dx = \begin{vmatrix} u = x+1 & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{vmatrix} =$
$= -(x+1)\cos x - \int -\cos x \; dx = -(x+1)\cos x + \sin x + c$, $x \in \mathbb{R}$

Příklad. $\int x^2 \, e^{2x} \; dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) e^{2x} + c$, $x \in \mathbb{R}$

Poznámka. Podobně $P(x)\, e^{ax}$, $P(x)\sin ax$, $P(x)\cos ax$ (P polynom, $a \neq 0$).

Příklad. $I = \int e^x \sin x \; dx = \begin{vmatrix} u = e^x & v' = \sin x \\ u' = e^x & v = -\cos x \end{vmatrix} =$
$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \; dx = \begin{vmatrix} u = e^x & v' = \cos x \\ u' = e^x & v = \sin x \end{vmatrix} =$
$= -e^x \cos x + e^x \sin x - I$
$I = \frac{1}{2}\, e^x(\sin x - \cos x) + c$, $x \in \mathbb{R}$

Poznámka. Podobně $e^{ax}\sin bx$, $e^{ax}\cos bx$ ($a, b \neq 0$).

Příklad. $\int \frac{1}{x}\ln x \; dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + c$, $x \in (0, +\infty)$

Příklad. $\int \ln x \; dx = \int \ln x \cdot 1 \; dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{vmatrix} =$
$= x\ln x - \int 1 \; dx = x(\ln x - 1) + c$, $x \in (0, \infty)$

Poznámka. Podobně $x^a \ln x$ ($a \neq -1$).

Věta (substituce). *Nechť* $(\alpha, \beta) \xrightarrow{\varphi} (a, b) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, φ' *existuje na* (α, β), $F(x)$ *je primitivní funkce k* $f(x)$ *na* (a, b).
1)
$$\int f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) \; dt = F\big(\varphi(t)\big) + c \text{ na } (\alpha, \beta).$$
2) *Je-li* $\varphi\colon (\alpha, \beta) \xrightarrow{\text{na}} (a, b)$ *prostá a* G *je primitivní funkce k* $f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)$ *na* (α, β), *pak*
$$\int f(x) \; dx = G\big(\varphi_{-1}(x)\big) + c \text{ na } (a, b).$$
Důkaz: 1) $\frac{d}{dt}F\big(\varphi(t)\big) = F'\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)$.
2) $G(t)$ i $F\big(\varphi(t)\big)$ jsou primitivní k $f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)$ … $G(t) = F\big(\varphi(t)\big) + c$; existuje $\varphi_{-1}(x)$ … $G\big(\varphi_{-1}(x)\big) = F(x) + c$ je primitivní k f.

Používáme (v obou směrech) zápis:
$$\int f(x) \; dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\, dt \end{vmatrix} = \int f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) \; dt\,.$$

Příklady.
1) $\int \sin^3 t \cdot \cos t \; dt = \begin{vmatrix} \sin t = x \\ \cos t\, dt = dx \end{vmatrix} = \int x^3 \; dx = \frac{1}{4}x^4 + c =$
$= \frac{1}{4}\sin^4 t + c$, $x \in \mathbb{R}$
2) $\int x\, e^{-x^2} \; dx = \begin{vmatrix} -x^2 = t \\ x\, dx = -\frac{1}{2}\, dt \end{vmatrix} = \cdots = -\frac{1}{2}\, e^t + c$, $x \in \mathbb{R}$
3) $\int \frac{1}{x}\ln x \; dx = \begin{vmatrix} \ln x = t \\ \frac{1}{x}\, dx = dt \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\ln^2 x + c$, $x \in (0, +\infty)$

Příklady.
1) $\int \frac{1}{x}\ln x \; dx = \begin{vmatrix} x = e^t \\ dx = e^t dt \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\ln^2 x + c$, $x \in (0, +\infty)$
2) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{vmatrix} x = \sin t \\ dx = \cos t\, dt \end{vmatrix} = \int dt = t + c = \arcsin x + c$,
$x \in (-1, 1)$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Poznámky.
1) $\int f(ax+b) \; dx = \begin{vmatrix} ax + b = t \\ a\, dx = dt \end{vmatrix} = \frac{1}{a}\, F(ax+b) + c$ ($a \neq 0$).
2) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \; dx = \begin{vmatrix} f(x) = t \\ f'(x)\, dx = dt \end{vmatrix} = \ln|f(x)| + c$.

Příklady.
1) $\int (x+1)^4 \; dx = \frac{1}{5}\,(x+1)^5 + c$, $x \in \mathbb{R}$
2) $\int \frac{1}{(3x-1)^2} \; dx = \frac{-1}{3(3x-1)}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{3})$, $x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$
3) $\int \operatorname{tg} x \; dx = -\ln|\cos x| + c$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
4) $\int \frac{x-2}{x^2-4x+5} \; dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 4x + 5) + c$, $x \in \mathbb{R}$
5) $\int \operatorname{arctg} x \; dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$, $x \in \mathbb{R}$

Integrace racionálních funkcí

Rozklad racionální funkce

Definice. *Racionální* (lomená) funkce je podíl dvou polynomů $\frac{P}{Q}$, kde Q je nenulový. *Ryze lomená* funkce je podíl dvou polynomů $\frac{P}{Q}$, kde $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ ($\operatorname{st} 0 = -1$). *Parciální zlomky* jsou funkce ve tvaru
$$\frac{A}{(x-a)^n}\,,\quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,,\qquad A, B, a, p, q \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$
kde $(x^2 + px + q)$ nemá reálný kořen, tj. $p^2 - 4q < 0$.

Poznámka. V $\mathbb{C}$ jen první typ parciálních zlomků.

Věta. *Nenulový polynom lze (jednoznačně) napsat ve tvaru*
$$a(x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$
kde $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k_1, \ldots, k_r, l_1, \ldots, l_s \in \mathbb{N}$,
$a, a_1, \ldots, a_r, p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_s \in \mathbb{R}$,
$a_1, \ldots, a_r$ *jsou různé reálné kořeny,*
$x^2 + p_i x + q_i$ ($i = 1, \ldots, s$) *jsou různé a nemají reálné kořeny.*

Věta. *Racionální funkce se dá (jednoznačně) rozložit na součet polynomu a parciálních zlomků. Jmenovatelé těchto zlomků dělí jmenovatel dané racionální funkce.*

Důkaz: (částečný) Dělením polynomů dostaneme součet polynomu a ryze lomené funkce $P_1 + L_1$. Pro jiný zápis $P_2 + L_2$ je $P_1 - P_2 = L_2 - L_1$ polynom i ryze lomená funkce, tj. nulová funkce a tedy $P_2 = P_1$, $L_2 = L_1$. Pro ryze lomenou funkci P/Q a k-násobný kořen a polynomu Q ($k > 0$) je $Q(x) = (x-a)^k Q_2(x)$ pro některý polynom Q_2 s $Q_2(a) \neq 0$.
$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{\frac{P(a)}{Q(a)}}{(x-a)^k} = \frac{P(x) - \frac{P(a)}{Q(a)}\,Q_2(x)}{(x-a)^k Q_2(x)}\,.$$
Čitatel má za kořen a, je tedy roven $(x-a)P_2(x)$,
$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{\frac{P(a)}{Q(a)}}{(x-a)^k} = \frac{P_2(x)}{(x-a)^{k-1}Q_2(x)}\,.$$
Snížili jsme stupeň jmenovatele, pokračujeme dokud je a kořen jmenovatele a pak pro další kořeny.

Postup:
1) Dělení (polynom + ryze lomená funkce).
2) Rozklad jmenovatele na součin kořenových činitelů a ireducibilních kvadratických polynomů.
3) Rozpis na parciální zlomky s „neurčitými koeficienty“.
4) Určení koeficientů.

Příklad. $\frac{2x^2+x-24}{x^2-2x-8} = 2+\frac{5x-8}{(x-4)(x+2)} = 2+\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$. Určení koeficientů: porovnání po přenásobení jmenovatelem:

$$5x-8 = A(x+2)+B(x-4)$$

A) Stejné koeficienty, řešení (regulární) soustavy lin. rovnic:

$$\begin{array}{llll} x^1: & 5 = & A + B & A=2 \\ x^0: & -8 = & 2A-2B & B=3 \end{array}$$

B) Dosazení kořenů (lineární rovnice s 1 proměnnou):

$$\begin{array}{llll} x = 4: & 12 = & 6A & A=2 \\ x=-2: & -18 = & -6B & B=3 \end{array}$$

B') *Zakrývací pravidlo*:

$$A = \left.\frac{5x-8}{(x-4)}\right|_{x=-2} = 3\,, \qquad B = \left.\frac{5x-8}{(x+2)}\right|_{x=4} = 2$$

Příklad. $\frac{-2x+5}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$.
Zakrývacím pravidlem $A=1$, $C=1$. Porovnáme

$$-2x+5 = A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2$$

A) Jen potřebné rovnice, dosadíme už určené koef., např.

$$x^2: \quad 0 = B+C = B+1 \qquad B=-1$$

B) Dosadíme do derivace

$$-2 = A+B(x+2)+B(x-1)+C\cdot 2(x-1)$$

vícenásobné kořeny

$$x=1: \quad -2 = A+3B = 1+3B \qquad B=-1$$

C) Odečteme parciální zlomek pro vícenásobný kořen, zakrývací pravidlo pro zjištění koeficientu u nižší mocniny

$$\frac{-2x+5}{(x-1)^2(x+2)} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{-3x+3}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{-3}{(x-1)(x+2)}$$

Integrace parciálních zlomků

1) Mocnina lineárního polynomu ve jmenovateli:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} = \left| \begin{array}{r} x-a=t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n}$$

2) Mocnina kvadratického polynomu ve jmenovateli:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$$

2a) V čitateli derivace kvadratického polynomu:

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} x^2+px+q=t \\ (2x+p)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n}$$

2b) V čitateli konstanta: převedeme na $\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} = I_n$.
Pro $n>1$ upravíme

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n} = \int \frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t = I_{n-1} + \int \frac{-t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u=t & v' = \frac{-t}{(t^2+1)^n} \\ u'=1 & v = \frac{1}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} \end{array} \right| =$$

$$= I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\,I_{n-1}\,,$$

dostaneme rekurentní vzorec:

$$I_n = \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\,I_{n-1}\,, \quad n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\,,$$

$$I_1 = \operatorname{arctg} t + c\,.$$

Příklad. $\int \frac{5}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x = 5\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2+4} = \frac{5}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x-1}{4}\right)^2+1} = = \left|\, \frac{x-1}{2} = t \,\right| = \frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$.

Příklad. $\int \frac{2}{(x^2-6x+10)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{\left((x-3)^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x = = \left|\, x-3=t \,\right| = 2I_2 = \frac{t}{t^2+1}+I_1 = \frac{t}{t^2+1}+\operatorname{arctg} t + c = = \frac{x-3}{x^2-6x+10}+\operatorname{arctg}(x-3)+c$, $x\in\mathbb{R}$.

Integrace dalších typů funkcí

1)
$$\int R(\mathrm{e}^{ax})\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} \mathrm{e}^{ax} = t \\ x = \frac{1}{a}\ln t \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{at}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int R(t)\,\frac{1}{at}\,\mathrm{d}t$$

$$x\in\mathbb{R} \leftrightarrow t\in(0,+\infty) \quad (a\neq 0)$$

Příklad. $\int \frac{\mathrm{e}^{4x}+2\,\mathrm{e}^{2x}+3}{\mathrm{e}^{4x}-1}\,\mathrm{d}x = \left|\,\mathrm{e}^{2x}=t\,\right| = \int \frac{t^2+2t+3}{2t(t^2-1)}\,\mathrm{d}t$,
$\int \frac{\mathrm{e}^{4x}+2\,\mathrm{e}^{2x}+3}{\mathrm{e}^{4x}-1}\,\mathrm{d}x = \left|\,\mathrm{e}^{x}=t\,\right| = \int \frac{t^4+2t^2+3}{t(t^4-1)}\,\mathrm{d}t$.

2)
$$\int \frac{R(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} \ln x = t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int R(t)\,\mathrm{d}t$$

Příklad. $\int \frac{2}{x(\ln^2+4)}\,\mathrm{d}x = \left|\,\ln x = t\,\right| = \int \frac{2}{t^2+4}\,\mathrm{d}t$.

3)
$$\int R(\sin x,\cos x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \\ x = 2\operatorname{arctg} t \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \end{array} \right|$$

$$x\in(-\pi,\pi) \leftrightarrow t\in\mathbb{R}$$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

Někdy nutno spojovat přes sousední intervaly.

Příklad. $\int \frac{2}{5-3\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{4t^2+1} = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\frac{x}{2})+c+k\pi$ pro $x\in(-\pi,\pi)+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, limity v $\pi+2k\pi$.

3a) „sudé mocniny" $(R(-\sin x,-\cos x) = R(\sin x,\cos x))$:

$$\int R(\sin^2 x,\cos^2 x,\sin x\cos x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} \operatorname{tg} x = y \\ x = \operatorname{arctg} t \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \end{array} \right|$$

$$x\in(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}) \leftrightarrow t\in\mathbb{R}$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x+1} = \frac{t^2}{t^2+1}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x+1} = \frac{1}{t^2+1}$$

$$\sin x\cos x = \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x+1} = \frac{t}{t^2+1}$$

Příklad. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} = \left|\,\sin x = t\,\right| = \int (t^2+1)\,\mathrm{d}t$.

3b) „lichá" v sin nebo v cos:

$$\int R(\sin^2 x,\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} \cos x = t \\ -\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \sin^2 x = 1-t^2 \end{array} \right|$$

$$\int R(\sin x,\cos^2 x)\cos x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \cos^2 x = 1-t^2 \end{array} \right|$$

Příklad. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x} = \left| \sin x = t \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2}$.

3c) $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, \mathrm{d}x$: pro liché m či n viz 3b); pro sudá m, n přechod k dvojnásobnému argumentu

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) , \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x) .$$

Příklad. $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x \, \mathrm{d}x = \left| \cos x = t \right| = \int (t^6 - t^4) \, \mathrm{d}t$.

Příklad. $\int \sin^4 x \, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x \right) \mathrm{d}x =$
$= \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \right) \mathrm{d}x$.

4) $n > 1$, $ad - bc \neq 0$:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \\ x = R_1(t) \\ \mathrm{d}x = R_1'(t) \, \mathrm{d}t \end{array} \right|$$

Příklad. $\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1 - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1 + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \, \mathrm{d}x =$
$= \left| \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t \right| = \int \frac{1-t}{1+t} \cdot \frac{4t}{(t^2-1)^2} \, \mathrm{d}t$.

5) $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \, \mathrm{d}x$, $a \neq 0$: vytknutím a, doplněním na čtverec a lineární substitucí upravíme na integrál ve tvaru $\int R(x, \sqrt{\pm x^2 \pm a^2})$, $a > 0$. Lze použít goniometrické, Eulerovy nebo hyperbolické substituce.

5a) $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \, \mathrm{d}x$, $x \in (-a, a)$:

- $x = a \sin t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$;
- upravíme $\sqrt{a^2 - x^2} = (a + x)\sqrt{(a - x)/(a + x)}$ a použijeme substituci pro typ 4 (Eulerova substituce).

Příklad. $\int \sqrt{4 - x^2} \, \mathrm{d}x = \left| x = 2 \sin t \right| = \int 4 \cos^2 t \, \mathrm{d}t =$
$= 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + c$, $x \in \langle -2, 2 \rangle$.

5b) $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) \, \mathrm{d}x$, $x \in (-\infty, -a)$, $x \in (a, +\infty)$:

- $x = a/(\sin t)$;
- $\sqrt{x^2 - a^2} + x = t$ (Eulerova substituce);
- $x = a \cosh t$, $\sqrt{x^2 + a^2} = a|\sinh t|$.

Příklad. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \left| \sqrt{x^2 - 1} + x = t \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

5c) $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) \, \mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$:

- $x = a \operatorname{tg} t$;
- $\sqrt{x^2 + a^2} + x = t$, (Eulerova substituce);
- $x = a \sinh t$, $\sqrt{x^2 + a^2} = a \cosh t$.

Příklad.
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \left| x + 1 = 2 \sinh t \right| = \int \mathrm{d}t$.

Určitý integrál

Definice. *Dělení intervalu* $\langle a, b \rangle$ je konečná množina $D \subset \subset \langle a, b \rangle$ obsahující a, b.

Značíme $D = \{x_0, \dots, x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Definice. Pro omezenou funkci f na $\langle a, b \rangle$ a dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ zavádíme *dolní* a *horní integrální součet*:

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \inf f(\langle x_{i-1}, x_i \rangle) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$\bar{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sup f(\langle x_{i-1}, x_i \rangle) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Přidáme-li k dělení další bod, dolní součet se nezmenší a horní se nezvětší. Pro libovolná dělení D_1, D_2 dostaneme:

$$\underline{S}(f, D_1) \leq \underline{S}(f, D_1 \cup D_2) \leq \bar{S}(f, D_1 \cup D_2) \leq \bar{S}(f, D_2) .$$

Každý dolní součet je menší nebo roven každému hornímu součtu, supremum dolních integrálních součtů je menší nebo rovno infimu horních integrálních součtů.

Definice. Je-li pro omezenou funkci f na $\langle a, b \rangle$ supremum dolních integrálních součtů rovno infimu horních integrálních součtů, nazýváme tuto hodnotu *určitý* (*Riemannův*) *integrál* funkce f na $\langle a, b \rangle$. Čísla a, b se nazývají *dolní* a *horní* mez integrálu.

Značení: $\int_a^b f$, $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$, (R)–$\int_a^b f$, (R)–$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$.

Poznámka. Pro systém $(\mathcal{D}, \prec)$ dělení s $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a zjemnění:

$$\lim_{(\mathcal{D}, \prec)} \sum_i f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) .$$

Věta. *Pro omezenou funkci* f *na* $\langle a, b \rangle$ *existuje* $\int_a^b f$ *právě tehdy, když existuje posloupnost* $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ *dělení* $\langle a, b \rangle$ *taková, že*

$$\lim_{n \to \infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n \to \infty} \bar{S}(f, D_n) .$$

V takovém případě je integrál roven těmto limitám.

Důkaz: $\Rightarrow$: existují $(D_n')_{n=1}^{\infty}$, $(D_n'')_{n=1}^{\infty}$:
$\underline{S}(f, D_n') \xrightarrow{n \to \infty} \int_a^b f$, $\bar{S}(f, D_n'') \xrightarrow{n \to \infty} \int_a^b f$,
$\underline{S}(f, D_n') \leq \underline{S}(f, D_n' \cup D_n'') \leq \bar{S}(f, D_n' \cup D_n'') \leq \bar{S}(f, D_n'')$,
$(D_n' \cup D_n'')_{n=1}^{\infty}$ je hledaná posloupnost dělení.
$\Leftarrow$: $\sup_D \underline{S}(f, D) \geq \lim_{n \to \infty} \underline{S}(f, D_n) =$
$= \lim_{n \to \infty} \underline{S}(f, D_n) \geq \inf_D \bar{S}(f, D) \geq \sup_D \underline{S}(f, D)$,
… všude rovnosti.

Příklad. $\int_a^b c \, \mathrm{d}x = c(b - a)$
$\underline{S}(c, D_n) = \bar{S}(c, D_n) = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c(b - a)$.

Poznámka. Pro existenci integrálu ve výše uvedené větě stačí $\lim_{n \to \infty} \left(\bar{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) \right) = 0$:
$0 \leq \inf_D \bar{S}(f, D) - \sup_D \underline{S}(f, D) \leq \bar{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n)$.

Příklad. $\int_0^2 \operatorname{sign} x \, \mathrm{d}x = 2$:
$D_n = \{0, \frac{1}{n}, 2\}$, $\underline{S}(f, D_n) = 2 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 2$, $\bar{S}(f, D_n) = 2$.

Poznámka. Hodnota integrálu nezávisí na hodnotách funkce v konečně mnoha bodech.

Poznámka. *Lebesgueův* integrál – dělení v oboru hodnot:

$$\sum_I d_I \cdot \lambda\left(f^{-1}(I)\right) , \quad d_I \in I .$$

Nezávisí na hodnotách funkce ve spočetně mnoha bodech.

Příklad. $d(x) = 1$ pro $x \in \mathbb{Q}$, jinak 0.
(R)–$\int_0^1 d(x)\ \mathrm{d}x$ neex.: $\underline{S}(f,D) = 0$, $\bar{S}(f,D) = 1$.
(L)–$\int_0^1 d(x)\ \mathrm{d}x =$ (L)–$\int_0^1 0\ \mathrm{d}x = 0$, nebo
$0 \cdot \lambda(\langle 0,1\rangle \setminus \mathbb{Q}) + 1 \cdot \lambda(\langle 0,1\rangle \cap \mathbb{Q}) = 0$
(Lebesgueova míra spočetných mn. je nulová, tj. $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$).

Věta. *Monotonní funkce na uzavřeném intervalu má určitý integrál.*

Důkaz: $D_n = \{a, a + \frac{b-a}{n}, \ldots, b\}$ (ekvidistantní na n částí),
$\bar{S}(f,D_n) - \underline{S}(f,D_n) = \frac{b-a}{n} \cdot \bigl|f(b) - f(a)\bigr| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Tvrzení. *Z každého pokrytí uzavřeného intervalu otevřenými lze vybrat konečné pokrytí.*

Důkaz: Sporem. Střed intervalu je pokryt některým otevřeným intervalem, zůstanou nejvýše 2 nepokryté uzavřené intervaly, alespoň jeden se nedá pokrýt konečně mnoha danými intervaly, ten vezmeme a postup opakujeme. Dostaneme posloupnost $(I_n)_{n=1}^\infty$ vnořených uzavřených intervalů, jejichž délky klesají k nule. $\bigcap_{n=1}^\infty I_n = \{c\}$, c je pokryto některým otevřeným intervalem, který ale pokrývá všechny dostatečně krátké I_n – spor.

Tvrzení. *Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu I, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$ pro $y, z \in I$ taková, že $|y - z| < \delta$* (stejnoměrná spojitost).

Důkaz: $\varepsilon > 0$; pro $x \in I$ ex. $\delta_x > 0$:
$|f(u) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $u \in U(x,\delta_x) \cap I$; $u \in \{y, z\}$
$|f(y) - f(z)| < \varepsilon$ pro $y, z \in U(x,\delta_x) \cap I$;
$\{U(x,\delta_x)\colon x \in I\}$ je pokrytí I, vezmeme konečné;
označme δ nejmenší vzdálenost (různých) krajních bodů;
pro $y, z \in I$, $0 < z - y < \delta$ je v $\langle y, z\rangle$ nejvýše 1 krajní bod;
pokud 0, pak y je pokryto $U(x,\delta_x) \ni z$;
pokud 1, pak je pokryt $U(x,\delta_x) \ni y, z$.

Příklad. Funkce $\frac{1}{x}$ není stejnoměrně spojitá na $(0, +\infty)$.

Věta. *Spojitá funkce na uzavřeném intervalu má určitý integrál.*

Důkaz: f na $\langle a, b\rangle$;
pro $\frac{1}{n}$ ex. δ_n: $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{n}$ pro $|y - z| < \delta_n$, $y, z \in \langle a, b\rangle$;
ex. D_n s intervaly kratšími než δ_n;
$0 \le \bar{S}(f,D_n) - \underline{S}(f,D_n) < \frac{1}{n}(b-a) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Věta. *Nechť funkce f, g jsou omezené na $\langle a, b\rangle$, $\int_a^b f$, $\int_a^b g$ existují, $c \in \mathbb{R}$. Pak:*
1) $\int_a^b cf = c\int_a^b f$.
2) $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.
3) *Je-li $f \le g$ na $\langle a, b\rangle$, pak $\int_a^b f \le \int_a^b g$.*
4) $\bigl|\int_a^b f\bigr| \le \int_a^b |f|$.

Důkaz:
1) $c \ge 0$:
$\sup \underline{S}(cf,D) = \sup c\underline{S}(f,D) = c \sup \underline{S}(f,D) = c\int_a^b f$,
$\inf \bar{S}(cf,D) = \inf c\bar{S}(f,D) = c \inf \bar{S}(f,d) = c\int_a^b f$;
$c < 0$:
$\sup \underline{S}(cf,D) = \sup c\bar{S}(f,D) = c \inf \bar{S}(f,D) = c\int_a^b f$,
$\inf \bar{S}(cf,D) = \inf c\underline{S}(f,D) = c \sup \bar{S}(f,d) = c\int_a^b f$.

2) sup/inf int. součtů f, g jsou limity pro společ. $(D_n)_{n=1}^\infty$;
$\inf f(I) + \inf g(I) \le (f+g)(x)$, pro $x \in I$,
$\inf f(I) + \inf g(I) \le \inf(f+g)(I)$,
$\underline{S}(f,D_n) + \underline{S}(g,D_n) \le \underline{S}(f+g,D_n) \le \bar{S}(f+g,D_n) \le$
$\le \bar{S}(f,D_n) + \bar{S}(g,D_n)$ (podobně), limita pro $n \to \infty$.
3) $\underline{S}(f,D) \le \underline{S}(g,D)$, $\sup \underline{S}(f,D) \le \sup \underline{S}(g,D)$.
4) $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$,
ex. $(D_n)_{n=1}^\infty$: $\underline{S}(f,D_n), \bar{S}(f,D_n) \to \int_a^b f$,
$0 \le \bar{S}(f_+,D_n) - \underline{S}(f_+,D_n) \le \bar{S}(f,D_n) - \underline{S}(f,D_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$,
$\int_a^b f_+$ ex., $\int_a^b f_- = \int_a^b (f_+ - f)$ ex., $\int_a^b |f| = \int_a^b (f_+ + f_-)$ ex.,
$-|f| \le f \le |f| \ldots -\int_a^b |f| \le \int_a^b f \le \int_a^b |f|$

Příklad. $\int_0^1 \bigl(d(x) - \frac{1}{2}\bigr)\ \mathrm{d}x$ neexistuje, $\int_0^1 \bigl|d(x) - \frac{1}{2}\bigr|\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Poznámka. Omezené integrovatelné funkce na $\langle a, b\rangle$ tvoří lineární prostor, zobrazení $\int_a^b : f \mapsto \int_a^b f$ je lineární.

Věta. *Nechť $a < b < c$ a funkce f je omezená na $\langle a, b\rangle$. Pak $\int_a^c f$ existuje právě tehdy, když existují $\int_a^b f$ a $\int_b^c f$. V takovém případě $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.*

Důkaz: D' dělení $\langle a, b\rangle$, D'' dělení $\langle b, c\rangle$,
$D = D' \cup D''$ je dělení $\langle a, c\rangle$ obsahující b,
$\underline{S}(f,D') + \underline{S}(f,D'') = \underline{S}(f,D)$,
$\bar{S}(f,D') + \bar{S}(f,D'') = \bar{S}(f,D)$,
přechodem k supremu a infimu:
$$\begin{array}{ccccc}
\sup\limits_{D'} \underline{S}(f,D') & + & \sup\limits_{D''} \underline{S}(f,D'') & = & \sup\limits_{D} \underline{S}(f,D)\,, \\
\le & & \le & & \le \\
\inf\limits_{D'} \bar{S}(f,D') & + & \inf\limits_{D''} \bar{S}(f,D'') & = & \inf\limits_{D} \bar{S}(f,D)\,,
\end{array}$$
stejné sčítance pod sebou právě tehdy, když stejné součty.

Definice. Definujeme $\int_a^a f = 0$, $\int_b^a f = -\int_a^b f$ pro $a < b$.

Poznámka. Rovnost v předešlé větě pro libovolná a, b, c.

Poznámka. Po částech spojité funkce (konečně mnoho bodů nespojitosti s konečnými jednostrannými limitami) i po částech monotonní funkce jsou integrovatelné.

Věta. *Nechť funkce f je omezená na $\langle a, b\rangle$, $\int_a^b f$ existuje, $F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ pro $x \in \langle a, b\rangle$. Pak*
1) *F je spojitá.*
2) *$F'(x) = f(x)$ v bodech spojitosti funkce f.*

Důkaz: F je definována (aditivita na definičním oboru)
$F(x+h) - F(x) = \int_a^{a+h} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t$,
1) $|f| \le M$ na $\langle a, b\rangle$,
$|F(x+h) - F(x)| = \bigl|\int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t\bigr| \le \operatorname{sign} h \int_x^{x+h} |f(t)|\ \mathrm{d}t \le$
$\le \operatorname{sign} h \int_x^{x+h} M\ \mathrm{d}t = M \cdot |h| \xrightarrow{h\to 0(\pm)} 0$.
2) $\bigl|\frac{1}{h}\bigl(F(x+h) - F(x)\bigr) - f(x)\bigr| =$
$= \bigl|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\ \mathrm{d}t\bigr| =$
$= \bigl|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \bigl(f(t) - f(x)\bigr)\ \mathrm{d}t\bigr| \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\ \mathrm{d}t \le$
(f spoj. v x: pro $\varepsilon > 0$ je $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ na okolí x)
$\le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varepsilon\ \mathrm{d}t = \frac{1}{h} \cdot h\varepsilon = \varepsilon$.

Důsledek. *Funkce spojitá na intervalu má na tomto intervalu primitivní funkci.*

Důkaz: $a \in I$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (případně $+F(a)$).

Poznámka. Derivace integrálu podle horní meze (pro f spojitou): $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$.

Poznámka. Po částech spojitá f: jednostranné derivace F jsou rovny příslušným jednostranným limitám f.

Příklad. $f(x) = \operatorname{sign} x$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \left\{\begin{array}{ll} \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x\,, & x \geq 0 \\ \int_0^x -1\,\mathrm{d}t = -x\,, & x \leq 0 \end{array}\right\} = |x|\,,$$

$F'_-(0) = -1 = f(0-)$, $F'_+(0) = 1 = f(0+)$.

Věta (Newtonova–Leibnizova formule). *Nechť funkce f je omezená na $\langle a,b\rangle$, $\int_a^b f$ existuje a F je primitivní funkce k f na (a,b). Pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b-) - F(a+)\,.$$

Důkaz: $|f| \leq M$ na $\langle a,b\rangle$, $a_n = a + \frac{1}{n} \in \langle a,b\rangle$ pro $n \geq n_0$,
pro $x \in (a,a_n)$ (Lagrange):
$|F(x) - F(a_n)| = |f(c_{x,n})\cdot(x-a_n)| \leq \frac{M}{n}$,
$F\big((a,a_n)\big) \subset \langle F(a_n) - \frac{M}{n}, F(a_n) + \frac{M}{n}\rangle = I_n$,
$(I_n)_{n=n_0}^\infty$ uzavřené vnořené intervaly délek $\frac{2M}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$,
$\bigcap_{n=n_0}^\infty I_n = \{F(a+)\}$, $F(a+)$ existuje (podobně $F(b-)$);
$D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$,
$F(b+) - F(a-) = \sum_{i=1}^n \big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) =$ (Lagrange)
$= \sum_{i=1}^n F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1})$

$$\underline{S}(f,D) \leq F(b+) - F(a-) \leq \bar{S}(f,D)$$
$$\sup_D \underline{S}(f,D) \leq F(b+) - F(a-) \leq \inf_D \bar{S}(f,D)$$

Příklady.
1) $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \big[\frac{1}{2}x^2\big]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.
2) $\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = x & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{array}\right| =$
$= \big[-x\cos x\big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x = \pi - 0 + \big[\sin x\big]_0^\pi = \pi + (0-0) =$
$= \pi$.
3) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} x^2+1 = t \\ x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right| = \int_1^2 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{8}-1}{3}$.
4) $\int_0^\pi \sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right| = \int_0^0 t\,\mathrm{d}t = 0$.

Poznámka. *Newtonův int.*: (N)–$\int_a^b f(x) = F(b-) - F(a+)$. Existuje-li Riemannův i Newtonův integrál, jsou stejné.

Příklady.
1) $r(x) = \frac{1}{b}$ pro $x = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ nesoudělná, jinak 0,
(N)–$\int_{-1}^1 r(x)\,\mathrm{d}x$ neex., (R)–$\int_{-1}^1 r(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
2) (N)–$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ ex., (R)–$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ ex., F nelze „dobře“ vyjádřit.
3) (N)–$\int_0^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = 2$, (R)–$\int_0^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ neex.
4) (N)–$\int_1^\infty x^{-2}\,\mathrm{d}x = 1$, (R)–$\int_1^\infty x^{-2}\,\mathrm{d}x$ neex.

Nevlastní integrál

I neomezené funkce či intervaly, nevlastní hodnoty.

Definice. Nechť $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ($a,b \in \overline{\mathbb{R}}$) není omezená nebo (a,b) není omezený, $\int_c^d f$ existuje pro každý $\langle c,d\rangle \subset \subset (a,b)$. Definujeme *nevlastní integrál*:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to a+}\int_c^e f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{d\to b-}\int_e^d f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

pokud je výraz vpravo definován pro některé $e \in (a,b)$. Je-li konečný, řekneme, že integrál *konverguje*.

Poznámka. Výběr e není podstatný, pro e' je:
$\lim_{c\to a+}\int_c^{e'} f = \lim_{c\to a+}\int_c^e f + \int_e^{e'} f$,
$\lim_{d\to b-}\int_{e'}^d f = \lim_{d\to b-}\int_e^d f - \int_e^{e'} f$.

Příklady.
1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\operatorname{arctg} x]_{-\infty}^\infty = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$, konverguje.
2) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln x]_1^\infty = \infty - 0 = \infty$, existuje, nekonverguje.
3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big[\ln(1+x^2)\big]_{-\infty}^\infty = \infty - \infty$, neexistuje.
4) $\int_0^{+\infty} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{+\infty} = |\text{neex.} - (-1)|$ neex.

Příklady.
1) $\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = x & v' = \mathrm{e}^{-x} \\ u' = 1 & v = -\mathrm{e}^{-x} \end{array}\right| = \cdots =$
$= \big[\mathrm{e}^{-x}(-x-1)\big]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x-1}{\mathrm{e}^x} - (-1) = 0 + 1 = 1$.
2) $\int_1^{+\infty} x^{-2}\,\mathrm{e}^{-1/x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} -x^{-1} = t \\ x^{-2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right| = \int_{-1}^0 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t =$
$= \big[\mathrm{e}^t\big]_{-1}^0 = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.
3) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x} = \int_1^{+\infty}\big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\big)\,\mathrm{d}x = \big[\ln\frac{x}{x+1}\big]_0^{+\infty} = \ln 2$,
nelze $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^{+\infty}\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \infty - \infty$.

Poznámka. Linearita, monotonie, odhad absolutní hodnoty integrálu integrálem z absolutní hodnoty platí i pokud připustíme nevlastní integrály (pokud existují příslušné násobky či součty pro případné nevlastní hodnoty).

Poznámka. Definice integrálu by šla vylepšit v případě potřeby jako součet integrálů přes vhodné podintervaly. Například $\int_{-1}^1 x^{-2/3}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 x^{-2/3}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^{-2/3}\,\mathrm{d}x = 6$.

Poznámka. Alternativní rozšíření o nevlastní integrály: Pro $(a,b) = \bigcup_{n=1}^\infty \langle a_n,b_n\rangle$ skoro disjunktní takové, že $\int_{a_n}^{b_n} f$ existují, existují $\int_{a_n}^{b_n} f_\pm$ a $I_\pm = \sum_{n=1}^\infty \int_{a_n}^{b_n} f_\pm$. Pokládáme $\int_a^b f = I_+ - I_-$, pokud je rozdíl definován. Pokud tento integrál konverguje, pak i $\int_a^b |f| = I_+ + I_-$ konverguje (absolutní konverence integrálu). Newtonův integrál ani zavedený nevlastní integrál nejsou absolutně konvergentní.

Příklad. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ konverguje, $\int_0^{+\infty}\big|\frac{\sin x}{x}\big|\,\mathrm{d}x = +\infty$.

Věta. 1) *Jestliže $|f| \leq g$ na (a,b), $\int_a^b g$ konverguje a f je po částech spojitá, pak $\int_a^b f$ konvergje.*
2) *Jestliže $f \leq g$ na (a,b), $\int_a^b f = +\infty$ a g je po částech spojitá, pak $\int_a^b g = +\infty$.*

$$\int_0^1 x^a\,\mathrm{d}x = \begin{cases} [\ln x]_0^1 = 0-(-\infty) = \infty\,, & a=-1\\ \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = \begin{cases}\frac{1}{a+1} - \frac{\infty}{a+1} = \infty\,, & a<-1\\ \frac{1}{a+1} - 0 = \frac{1}{a+1}\,, & a>-1\end{cases}\end{cases}$$

$$\int_1^\infty x^a\,\mathrm{d}x = \begin{cases} [\ln x]_1^\infty = \infty - 0 = \infty\,, & a=-1\\ \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_1^\infty = \begin{cases}\infty - \frac{1}{a+1} = \infty\,, & a>-1\\ 0 - \frac{1}{a+1} = \frac{-1}{a+1}\,, & a<-1\end{cases}\end{cases}$$

Tvrzení. *Nechť P, Q jsou nenulové polynomy, Q nemá v $\langle a, +\infty)$ kořeny. Pak $\int_a^{+\infty} \frac{P}{Q}$ konverguje právě tehdy, když* $\operatorname{st} Q \geq \operatorname{st} P + 2$.

Důkaz: $n = \operatorname{st} P - \operatorname{st} Q \in \mathbb{Z}$
$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)\,x^n} = A \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, např. $A > 0$
existuje $b > a, 0$ tak, že $\frac{P(x)}{Q(x)\,x^n} \in \left(\frac12 A, \frac32 A\right)$ pro $x > b$
$\frac12 Ax^n < \frac{P(x)}{Q(x)} < \frac32 Ax^n$ ($\frac{P}{Q} = \Theta(x^n)$)
$\int_b^\infty \frac32 Ax^n$ konv. pro $n < -1$, $\int_b^\infty \frac12 Ax^n = \infty$ pro $n \geq -1$
$\int_b^\infty \frac{P}{Q}$ a $\int_a^\infty \frac{P}{Q}$ konv. právě pro $n < -1$, tj. $n \leq -2$

Příklady. $\int_0^\infty \frac{x^2+4x+5}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$ konv., $\int_0^\infty \frac{x^2+4x+5}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = +\infty$.

Tvrzení. *Nechť P, Q jsou nenulové polynomy, $c \in \langle a, b\rangle$ je jediný kořen polynomu Q násobnosti větší než polynomu P. Pak $\int_a^b \frac{P}{Q} \in \{\pm\infty\}$ pro n sudé nebo $c \in \{a, b\}$, jinak neexistuje.*

Důkaz: $\frac{P}{Q}$ se v okolí c chová jako $\frac{\pm 1}{(x-c)^n}$.

Příklady. $\int_{-2}^0 \frac{x^2+4x+5}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$ neex., $\int_{-2}^0 \frac{x^2+4x+5}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x = +\infty$.

Příklad (Laplaceova transformace)**.** Nechť funkce $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ je po částech spojitá a má omezený exponenciální růst, tj. existují konstanty $M, a \in \mathbb{R}$ tak, že $|f(t)| \leq M\,\mathrm{e}^{at}$ ($f = O(\mathrm{e}^{at})$). *Laplaceovým obrazem* funkce f je funkce F daná předpisem

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\,.$$

Je definována pro $p > a$ ($\operatorname{Re} p > a$ v $\mathbb{C}$):
$|f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}| \leq M\,\mathrm{e}^{(a-p)t}$,
$\int_0^\infty M\,\mathrm{e}^{(a-p)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{M}{a-p}\,\mathrm{e}^{(a-p)t}\right]_0^\infty = 0 - \frac{M}{a-p}$ konverguje.

Příklad.

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Konverguje pro $x > 0$:
$|t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}| \leq t^{x-1}$, $\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ konverguje pro $x > 0$;
pro $n \geq x-1$ je $|t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}| \leq t^n\,\mathrm{e}^{-t}$, $\int_1^\infty t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t =$ $=$ (per partes) $= [P_n(t)\,\mathrm{e}^{-t}]_1^\infty = 0 - P_n(1)\,\mathrm{e}^{-1}$ konverguje.
$\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = [-\mathrm{e}^{-t}]_0^\infty = 0 - (-1) = 1$.
$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left|\begin{matrix} u = t^x & v' = e^{-t}\\ u' = xt^{x-1} & v = -\mathrm{e}^{-t}\end{matrix}\right| =$
$= \left[-t^x\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty xt^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\,\Gamma(x)$.
$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = (n-1)!\,\Gamma(1) = (n-1)!$

Aplikace určitého integrálu

Definice. *Střední hodnota* funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ je

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

pokud integrál konverguje.

Příklad. Střídavé napětí $u(t) = U_0 \sin\frac{2\pi t}{T}$ má na odporu R okamžitý výkon $p(t) = \frac{1}{R}\,u^2(t) = \frac{U_0^2}{R}\sin^2\frac{2\pi t}{T}$. Jeho střední hodnota (například na intervalu $\langle 0, T\rangle$) je $\frac{U_0^2}{2R}$ což pro stejnosměrný proud odpovídá napětí $U_\mathrm{e} = \frac{\sqrt2}{2}\,U_0$ (*efektivní napětí střídavého proudu*).

Věta (o střední hodnotě). *Spojitá spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá své střední hodnoty.*

Důkaz: f na $\langle a, b\rangle$ má primitivní F, podle Lagrangeovy věty je $\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c) = f(c)$ pro některé $c \in (a, b)$.

Poznámka. Aritmetický průměr $\bigl(f(i)\bigr)_{i=1}^n$ je střední hodnota f, pokud použijeme Lebesgueův integrál vzhledem k součtu Diracových měr $\mu = \sum_{i=1}^n \delta_i$ ($\delta_i(M) = 1$ pro $i \in M$, jinak 0): $\bigl(\int_1^n f\,\mathrm{d}\mu\bigr)/\bigl(\int_1^n 1\,\mathrm{d}\mu\bigr) = \frac1n\sum_{i=1}^n f(i)$.

Věta. *Nechť funkce $f \leq g$ jsou po částech spojité na (a, b), $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Obsah $\{[x, y]\colon\ a < x < b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$ je*

$$\int_a^b \bigl(g(x) - f(x)\bigr)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz: $\langle c, d\rangle \subset (a, b)$:
ex. $(D_{f,n})_{n=1}^\infty$: $\underline{S}(f, D_{f,n}), \bar{S}(f, D_{f,n}) \xrightarrow{n\to\infty} \int_c^d f$,
ex. $(D_{g,n})_{n=1}^\infty$: $\underline{S}(g, D_{g,n}), \bar{S}(g, D_{g,n}) \xrightarrow{n\to\infty} \int_c^d g$,
pro $D_n = D_{f,n} \cup D_{g,n}$:

$$\underline{S}(g, D_n) - \bar{S}(f, D_n) \leq P \leq \bar{S}(g, D_n) - \underline{S}(f, D_n)\,,$$
$$\int_c^d (g - f) \leq P \leq \int_c^d (g - f)\,;$$

limity $c \to a+$, $d \to b-$.

Příklad. Obsah plochy uvnitř elipsy $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ je $4\int_0^a b\sqrt{1 - (x/a)^2}\,\mathrm{d}x = \pi ab$.

Příklad. Obsah plochy mezi grafy $\frac{1}{x^3}$ a $\frac{1}{x^2}$ na $(1, \infty)$ je $\frac12$.

Věta. *Nechť funkce f má po částech spojitou derivaci na (a, b). Délka grafu funkce f je*

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz: Pro uzavřený interval (pak případně limity):
délka = supremum délek po částech lineárních interpolací,
$l(D) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} =$
$= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)\,(x_i - x_{i-1})]^2} =$
$= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,(x_i - x_{i-1})$, $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$,
$\underline{S}(\sqrt{1 + (f')^2}, D) \leq l(D) \leq \bar{S}(\sqrt{1 + (f')^2}, D)$,
integrál i supremum délek interpolací jako limity

Příklad. Délka astroidy $(x/r)^{2/3} + (y/r)^{2/3} = 1$ je $4\int_0^r \sqrt{1 + [((r^{2/3} - x^{2/3})^{3/2})']^2}\,\mathrm{d}x = 6r$.

Věta. *Nechť funkce f je po částech spojitá na (a, b), $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Objem $\{[x, y, z]\colon\ a < b < a,\ y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$ je*

$$\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz: Pro uzavřený interval (pak případně limity): pro dělení D uvažujeme vepsané/opsané válce:

$$\underline{S}(\pi f^2, D) \leq V \leq \bar{S}(\pi f^2, D)$$
$$\pi\int_a^b f^2 \leq V \leq \pi\int_a^b f^2$$

Příklad. Objem kužele ($f(x) = \frac{r}{v}x$ na $\langle 0,v\rangle$) je $\pi\int_0^v r^2x^2/v^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\pi r^2 v$.

Věta. *Nechť funkce f má po částech spojitou derivaci na (a,b). Obsah plochy vzniklé rotací grafu f kolem osy x je*

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz (náznak pro uzavřený interval):
supremum pro po částech lineární interpolace f,
obsah pláště komolého kužele: $2\pi\,\frac{r_1+r_2}{2}\,s$,
$\sum_{i=1}^n 2\pi\,f(c_i)\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+[f(x_i)-f(x_{i-1})]^2} =$
$\sum_{i=1}^n 2\pi\,f(c_i)\sqrt{1+[f'(c_i')]^2}\,(x_i-x_{i-1}) \sim$
$\sim S(2\pi f\sqrt{1+(f')^2},D) \to 2\pi\int_a^b f\sqrt{1+(f')^2}$

Příklad. Obsah sféry ($f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ na $\langle -r,r\rangle$) je $2\pi\int_{-r}^r\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left[\frac{1}{2}(r^2-x^2)^{-1/2}(-2x)\right]^2}\,\mathrm{d}x = 4\pi r^2$.

Souřadnice těžiště v rovině:

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{M_y}{m}\,,\qquad y_{\mathrm{T}} = \frac{M_x}{m}\,.$$

Momenty lineárních útvarů (λ je lineární hustota):

$$M_y = \lambda\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

$$M_x = \lambda\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Příklad. Těžiště čtvrtkružnice ($f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ na $\langle 0,r\rangle$) má souřadnice $x_{\mathrm{T}} = y_{\mathrm{T}} = \frac{2}{\pi}\,r$.

Momenty plošných útvarů ($f\ge 0$, σ je plošná hustota):

$$M_y = \sigma\int_a^b x\,f(x)\,\mathrm{d}x\,,\qquad M_x = \frac{\sigma}{2}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Příklad. Těžiště plochy pod obloukem kosinusoidy ($f(x) = \cos x$ na $\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$) má souřadnice $x_{\mathrm{T}} = 0$, $y_{\mathrm{T}} = \frac{\pi}{8}$.

Číselné řady

Definice. (*Nekonečná číselná*) *řada* je výraz $\sum_{k=1}^\infty a_k = a_1+a_2+\cdots$, kde $(a_k)_{k=1}^\infty$ je posloupnost čísel. Číslo a_k je *k-tý člen*, $\sum_{k=1}^n a_k = a_1+\cdots+a_n$ je *n-tý částečný součet*, limita posloupnosti částečných součtů je *součet.*
Řekneme, že řada *konverguje*, má-li konečný součet; *diverguje*, má-li nekonečný součet; *osciluje*, nemá-li součet.

Poznámky.
1) Obecněji $\sum_{k=n}^\infty$ pro $n\in\mathbb{Z}$ (lze přeindexovat $\mathbb{N}$).
2) $\sum_{k=1}^\infty a_k \leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)_{n=1}^\infty$.

Příklady.
1) $\sum_{k=1}^\infty 1$ diverguje: $s_n = n$, $\lim_{n\to\infty}s_n = +\infty$.
2) $\sum_{k=1}^\infty(-1)^{k-1} = 1-1+1-1+\cdots$ osciluje: $s_n = 1$ pro n liché, $s_n = 0$ pro n sudé.
3) $\sum_{k=1}^\infty 2^{-k} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = \lim_{n\to\infty}(1-2^{-n}) = 1$ konverguje.

Poznámka. Caesarův součet $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n s_k = \frac{1}{2}$ pro 2).

Poznámka. V komplexním oboru konvergence odpovídá konvergenci reálné a imaginární části. Komplexní čísla se doplňují o jediné ∞, takže existují (reálné) řady, které v $\mathbb{C}$ divergují a v $\mathbb{R}$ oscilují (posloupnosti částečných součtů mají za hromadné hodnoty $\pm\infty$).

Příklad. *Aritmetická řada* s *diferencí d* je řada ve tvaru $\sum_{k=1}^\infty\big(a+(k-1)d\big) = a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+\cdots$. Částečné součty $s_n = \frac{1}{2}n(a_1+a_n)$, speciálně $\sum_{k=1}^n k = 1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Definice. *Geometrická řada* s *kvocientem q* je řada $\sum_{k=1}^\infty a_1q^{k-1} = a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots$.

Věta. $\sum_{k=1}^\infty a_1q^k = \frac{a_1}{1-q}$ *pro $|q|<1$, pro $|q|\ge 1$ a $a_1\ne 0$ řada nekonverguje.*

Důkaz:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1(1+q+\cdots+q^{n-1})\\ qs_n &= a_1(\quad q+\cdots+q^{n-1}+q^n)\\ (1-q)s_n &= a_1(1-q^n)\\ s_n &= \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\,,\quad (q\ne 1)\end{aligned}$$

Příklad. $\sum_{k=1}^\infty\frac{4}{3^n} = \frac{4/3}{1-1/3} = 2$ ($a_1 = \frac{4}{3}$, $q = \frac{1}{3}$).

Věta. *Jestliže $\sum_{k=1}^\infty a_k$, $\sum_{k=1}^\infty b_k$ konvergují, $c\in\mathbb{R}$, pak*
1) $\sum_{k=1}^\infty(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^\infty a_k + \sum_{k=1}^\infty b_k$.
2) $\sum_{k=1}^\infty ca_k = c\sum_{k=1}^\infty a_k$.

Důkaz: Použití vět o limitách součtu a součinu pro posloupnosti částečných součtů.

Poznámka. Ve výše uvedené větě postupujeme zprava doleva, obráceně to obecně nejde. Část 1) je speciální případ nekonečné asociativity, část 2) je nekonečná distributivita.

Věta (nutná podmínka konvergence). *Jestliže $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konverguje, pak $\lim_{k\to\infty}a_k = 0$.*

Důkaz: $\lim_{k\to\infty}a_k = \lim_{k\to\infty}(s_k-s_{k-1}) = \lim_{k\to\infty}s_k - \lim_{k\to\infty}s_{k-1} = s-s = 0$.

Věta. *Řada s nezápornými členy má součet.*

Důkaz: Posloupnost částečných součtů je neklesající, má tedy limitu.

Příklad. $\sum_{k=1}\frac{1}{k^a} = +\infty$ pro $a\le 0$: nekonverguje (členy nejdou k nule), má součet (členy jsou nezáporné).

Věta (srovnávací kr.). *Nechť $0\le a_k\le b_k$ pro každé $k\in\mathbb{N}$.*
1) *Jestliže $\sum_{k=1}^\infty b_k$ konverguje, pak i $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konverguje.*
2) *Jestliže $\sum_{k=1}^\infty a_k$ diverguje, pak i $\sum_{k=1}^\infty b_k$ diverguje.*

Důkaz: $\sum_{k=1}^n a_k \le \sum_{k=1}^n b_k$, limity pro $n\to\infty$ existují (předcházející věta), věta o monotonii pro limity.

Příklady.
1) *Harmonická řada*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} = 1 + \tfrac12 + \tfrac13 + \tfrac14 + \tfrac15 + \tfrac16 + \tfrac17 + \tfrac18 + \cdots$$
$$\geq 1 + \tfrac12 + \left(\tfrac14 + \tfrac14\right) + \left(\tfrac18 + \tfrac18 + \tfrac18 + \tfrac18\right) + \cdots$$
$$= 1 + \tfrac12 + \tfrac12 + \tfrac12 + \cdots = +\infty\,.$$

2) $a \leq 1$: $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^a \geq \sum_{k=1}^{\infty} 1/k$, diverguje.

Definice. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje absolutně*, pokud konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Věta. *Absolutně konvergentní řada konverguje.*

Důkaz: $a_k \in \mathbb{R}$: $a^+ = \max\{a, 0\}$, $a^- = \max\{-a, 0\}$
$a = a^+ - a^-$, $|a| = a^+ + a^-$, $0 \leq a^+, a^- \leq |a|$
$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje ...
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergují (srovnávací kritérium) ...
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konv.

Poznámka. Geometrická řada konverguje absolutně (když konverguje).

Věta (podílové kritérium)**.** *Nechť $a_k \neq 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.*
1) *Je-li $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje (absolutně).*
2) *Je-li $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonv.*

Důkaz:
1) $|a_k| \leq a_{k-1}|q| \leq \cdots \leq |a_1| q^{k-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_1| q^{k-1}$ konv.
2) $|a_k| \geq |a_{k-1}| \geq \cdots \geq |a_1|$, $a_k \not\to 0$

Poznámka. Stačí, aby byly nerovnosti splněny pro dostatečně velká k, tj. počínaje některým k_0.

Věta (limitní tvar podílového kritéria)**.**
1) *Je-li $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. (abs.).*
2) *Je-li $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje.*

Příklady.
1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konverguje: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{k+1} \to 0$.
2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}$ diverguje: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k+1}{2} \to +\infty$.
3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ – kr. nerozhodne: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k}{k+1} \nearrow 1$ (diverguje – nestačí, aby podíly byly menší než 1).
4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ – kr. nerozhodne: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \nearrow 1$ (konv.).

Věta (odmocninové kritérium)**.**
1) *Je-li $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje (absolutně);*
2) *Je-li $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonv.*

Důkaz:
1) $|a_k| \leq q^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ konverguje
2) $|a_k| \geq 1$, $a_k \not\to 0$

Věta (limitní tvar odmocninového kritéria)**.**
1) *Je-li $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. (abs.).*
2) *Je-li $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje.*

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$ kr. nerozhodne: $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{k}{k+1} \nearrow 1$, $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \left[\left(1 + \frac1k\right)^k\right]^{-1} = \mathrm{e}^{-1} \neq 0$ – diverguje.

Poznámka. V limitních tvarech podílového a odmocninového kritéria stačí $\limsup < 1$ nebo $\liminf > 1$.

Příklad. $a_{2k-1} = 2^{-k}$, $a_{2k} = 2^{1-k}$:
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac12 + 1 + \frac14 + \frac12 + \frac18 + \frac14 + \cdots = 3$,
$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \in \{2, \frac14\}$ – podílové kritérium nerozhodne,
$\sqrt[k]{|a_k|} \to 2^{-1/2} < 1$ – konverguje podle odmocninového kr.

Věta (integrální kritérium)**.** *Nechť f je nezáporná nerostoucí funkce na $\langle 1, +\infty)$. Pak $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Důkaz: $f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geq f(k+1)$,
$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \geq \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - f(1)$

Příklady.
1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac1k$ diverguje: $\int_1^{+\infty} \frac1x\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^{+\infty} = +\infty$.
2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ konverguje pro $a > 1$: $\int_1^{+\infty} x^{-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a-1}$.

Věta (Leibnizovo kr.)**.** *Je-li $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost s nulovou limitou, pak $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ konverguje.*

Důkaz: $s_1 \geq s_3 \geq \cdots \searrow s'$, $s_2 \leq s_4 \leq \cdots \nearrow s'' \leq s'$, $s' - s'' = \lim_{k\to\infty} a_k$.

Poznámka. Jiná formulace: Alternující řada (střídají se znaménka) s $|a_k| \searrow 0$ konverguje.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac1k = 1 - \frac12 + \frac13 - \frac14 + \cdots (= \ln 2)$ konverguje: střídají se znaménka, $|a_k| = \frac1k \searrow 0$. Ne absolutně: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac1k = +\infty$ (podle integrálního kritéria).

Příklad. $a_{2k-1} = 1/k$, $a_{2k} = -1/2^k$. Střídají se znaménka, $|a_k| \to 0$, ale ne monotónně. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty - \frac12 = +\infty$ (rozdíl harmonické a geometrické řady).

Definice. *Přerovnáním řady* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nazýváme každou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}$, kde f je bijekce na $\mathbb{N}$.

Věta. *Jestliže řada konverguje absolutně, pak každé její přerovnání konverguje (absolutně) a má stejný součet.*

Důkaz:
1) $a_k \geq 0$: označme $m_n = \max\{f(1), \ldots, f(n)\}$
$\sum_{k=1}^{n} a_{f(k)} \leq \sum_{k=1}^{m_n} a_k$, tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
opačná nerovnost: první řada je přerovnáním druhé pro f_{-1}
důsledek: přerovnání abs. konv. řady je abs. konv.
2) $a_k \in \mathbb{R}$: $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}^- =$
$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Poznámka. Pro řadu, která konverguje, ale ne absolutně, je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$. Pro každé $c \in \overline{\mathbb{R}}$ ji pak lze přerovnat tak, abychom dostali součet c.
Pro $c \in \mathbb{R}$ opakujeme:
1) bereme nezáp. členy, dokud součet nebude (poprvé) $> c$
2) bereme záporné členy, dokud součet nebude (poprvé) $< c$
Pro $c = +\infty$ ($c = -\infty$) použijeme v n-tém kroku n ($-n$).

Věta. *Jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ konvergují (absolutně) a jejich součet je roven součtu původní řady.*

Důkaz: $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{2k-1}|, \sum_{k=1}^{\infty}|a_{2k}| \le \sum_{k=1}^{\infty}|a_k| \dots$ konv.
$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty}(a_{2k-1}+a_{2k}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Důsledek. *Rozdělením absolutně konvergentní řady na konečně mnoho přeskládaných částí se součet nezmění.*

Poznámka. Neabsolutně konvergentní řada má nekonečné součty nezáporných i záporných členů, jejich rozdíl není definován.

Numerická integrace

Chyby: metody, výpočtu.
Metody: na 1 pokus, iterační (posloupnost konv. k řešení).
Řád: popisuje rychlost konv. při zlepšování parametru.

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\big(w_1 f(x_1) + \dots + w_k f(x_k)\big)\,.$$

Střední hodnotu funkce aproximujeme váženým průměrem hodnot v *uzlech* $x_i \in \langle a,b\rangle$ s *váhami* w_i ($w_1+\dots+w_k=1$). Uzly dle metody, váhy pro největší řád, integrují se přesně polynomy menšího stupně. $M_n = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f^{(n)}(x)|$.

Gaussova metoda

Optimální volba uzlů, řád je dvojnásobek jejich počtu. Řešíme soustavu rovnic pro střední hodnoty mocnin.
Pro $k=1$ je $w_1 = 1$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, odhad chyby $M_2(b-a)^3/24$.
Pro $k=2$ na $\langle -1,1\rangle$ je $w_{1,2} = \frac{1}{2}$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{1/3}$ řešením

$$\begin{aligned} x^0 &: \quad 1 = w_1 \quad + w_2 \\ x^1 &: \quad 0 = w_1x_1 + w_2x_2 \\ x^2 &: \quad \tfrac{1}{3} = w_1x_1^2 + w_2x_2^2 \\ x^3 &: \quad 0 = w_1x_1^3 + w_2x_2^3 \end{aligned}$$

Odhad chyby je $M_4(b-a)^5/4320$.

Newtonovy–Cotesovy metody

Uzly z ekvidistantního dělení $\langle a,b\rangle$, včetně (*uzavřená* metoda) nebo bez (*otevřená* metoda) krajních bodů a,b. Řád metody je počet uzlů zaokrouhlený na sudé číslo nahoru.

Poznámka. Někdy nekonvergují (pro rostoucí počet uzlů).

Složené metody

Interval $\langle a,b\rangle$ rozdělíme na n částí délek $(b-a)/n = h$ s krajními body $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, na každé použijeme vybranou metodu. Zlepšujeme zvětšováním n.

Obdélníková metoda používá otevřenou Newtonovu–Cotesovu metodu pro jeden uzel (uprostřed, váha je 1):

$$R(h) = h\left[f\left(\tfrac{x_0+x_1}{2}\right) + \dots + f\left(\tfrac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right].$$

Věta. *Má-li f na $\langle a,b\rangle$ spojitou druhou derivaci, pak*

$$|I - R(h)| \le \tfrac{M_2}{24}(b-a)h^2\,, \qquad M_2 = \max_{x\in\langle a,b\rangle}|f''(x)|\,.$$

Důkaz: $\langle x_0,x_1\rangle$, $s_1 = (x_0+x_1)/2$. Taylorova věta:

$$f(x) = f(s_1) + f'(s_1)(x-s_1) + \tfrac{f''(c_x)}{2}(x-s_1)^2$$

pro některý bod $c_x \in (x_0,x_1)$. Chyba integrace je

$$\left|\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x - h\,f(s_1)\right| = \left|\int_{x_0}^{x_1}\big(f(x)-f(s_1)\big)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$= \left|f'(s_1)\underbrace{\int_{x_0}^{x_1}(x-s_1)\,\mathrm{d}x}_{=0} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f''(c_x)(x-s_1)^2\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\le \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}|f''(c_x)|(x-s_1)^2\,\mathrm{d}x \le \frac{M_2}{2}\int_{x_0}^{x_1}(x-s_1)^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \left|\begin{array}{r} x-s_1 = t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right| = M_2\int_0^{h/2} t^2\,\mathrm{d}t = M_2\left[\tfrac{t^3}{3}\right]_0^{h/2} = \tfrac{M_2}{24}h^3\,.$$

Stejný odhad je na ostatních podintervalech:

$$|I - R(h)| \le \tfrac{M_2}{24}h^3 n = \tfrac{M_2}{24}(b-a)h^2\,.$$

Poznámka. Pokud bychom použili hodnotu (např.) v levém krajním bodě (pro funkci danou tabulkou), dostali bychom metodu řádu 1 s odhadem chyby $\frac{M_1}{2}(b-a)h$.

Lichoběžníková metoda používá uzavřenou Newtonovu–Cotesovu metodu pro 2 uzly (váhy jsou 1/2):

$$T(h) = h\left[\tfrac{1}{2}f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \tfrac{1}{2}f(b)\right].$$

Věta. *Je-li P lineární interpolace funkce f se spojitou druhou derivací na intervalu $\langle x_0,x_1\rangle$ (tj. P je lineární funkce, $P(x_0) = f(x_0)$, $P(x_1) = f(x_1)$), pak pro $x \in \langle x_0,x_1\rangle$ je*

$$|f(x) - P(x)| \le \tfrac{M_2}{2}|(x-x_0)(x-x_1)|\,.$$

Důkaz: Pro $x \in (x_0,x_1)$ má funkce

$$g(t) = f(t) - P(t) - \big(f(x)-P(x)\big)\frac{(t-x_0)(t-x_1)}{(x-x_0)(x-x_1)}\,.$$

tři nulové body x_0, x_1, x. Podle Rolleovy věty má g' dva nulové body v (x_0,x_1) a g'' nulový bod $c_x \in (x_0,x_1)$:

$$0 = g''(c_x) = f''(c_x) - \big(f(x)-P(x)\big)\tfrac{2}{(x-x_0)(x-x_1)}$$

$$f(x) - P(x) = \tfrac{f''(c_x)}{2}(x-x_0)(x-x_1)\,,$$

$$|f(x)-P(x)| \le \tfrac{M_2}{2}|(x-x_0)(x-x_1)|\,.$$

Poznámka. Je-li P polynomiální interpolace funkce f se spojitou derivací řádu $n+1$ na intervalu $\langle a,b\rangle$ pro různé body $x_0,\dots,x_n \in \langle a,b\rangle$, pak pro $x \in \langle a,b\rangle$ je

$$|f(x)-P(x)| \le \tfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x-x_0)\dots(x-x_n)|\,.$$

Věta. *Má-li f na $\langle a,b\rangle$ spojitou druhou derivaci, pak*

$$|I - T(h)| \le \tfrac{M_2}{12}(b-a)h^2\,, \qquad M_2 = \max_{x\in\langle a,b\rangle}|f''(x)|\,.$$

Důkaz: $\langle x_0,x_1\rangle$, $s_1 = (x_0+x_1)/2$. Chyba integrace je

$$\left|\int_{x_0}^{x_1}\big(f(x)-P(x)\big)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_{x_0}^{x_1}\big|f(x)-P(x)\big|\,\mathrm{d}x$$

$$\le \frac{M_2}{2}\int_{x_0}^{x_1}|(x-x_0)(x-x_1)|\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{r} x-s_1 = t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array}\right|$$

$$= \frac{M_2}{2}\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{h^2}{4} - t^2\right)\mathrm{d}t = M_2\left[\tfrac{1}{4}h^2t - \tfrac{1}{3}t^3\right]_0^{h/2}$$

$$= M_2\left(\tfrac{1}{8}h^3 - \tfrac{1}{24}h^3\right) = \tfrac{M_2}{12}h^3\,.$$

Stejný odhad je na ostatních podintervalech:

$$|I - T(h)| \le \tfrac{M_2}{12}\, h^3 n = \tfrac{M_2}{12}\,(b-a)h^2\,.$$

Poznámka. Odhad chyby obdélníkové metody je lepší než u lichoběžníkové, přestože se používá horší polynom. Využití středu intervalu odpovídá totiž aproximaci tečnou.

Simpsonova metoda používá uzavřenou Newtonovu–Cotesovu metodu pro 3 uzly. Rozděluje tedy každý podinterval na dva. Pro lepší srovnání označme n (sudý) počet všech takto vzniklých podintervalů. Hodnoty vah získáme integrací kvadratické interpolace, kterou dostaneme lineární kombinací Lagrangeových polynomů P_i, $P_i(x_j) = \delta_{i,j}$:

$$\int_{x_0}^{x_2} P(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{aligned} (x - x_1) &= ht \\ \mathrm{d}x &= h\,\mathrm{d}t \end{aligned} \right| = h \int_{-1}^{1} \tilde{P}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= h \int_{-1}^{1} \big(f(x_0)\,P_0(t) + f(x_1)\,P_1(t) + f(x_2)\,P_2(t) \big)\,\mathrm{d}t$$

$$= h \int_{-1}^{1} \big(f(x_0)\,\tfrac{(t-0)(t-1)}{(-1-0)(-1-1)} + f(x_1)\,\tfrac{(t+1)(t-1)}{(0+1)(0-1)} + {}$$

$$+ f(x_2)\,\tfrac{(t+1)(t-0)}{(1+1)(1-0)} \big)\,\mathrm{d}t$$

$$= h\,[\tfrac13\, f(x_0) + \tfrac43\, f(x_1) + \tfrac13\, f(x_2)]\,.$$

Sečtením přes dvojice podintervalů dostaneme

$$S(h) = \tfrac{h}{3}\,[f(x_0) + 4\,f(x_1) + 2\,f(x_2) + \cdots + 4\,f(x_{n-1}) + f(x_n)]\,.$$

Věta. *Má-li f na $\langle a, b\rangle$ spojitou čtvrtou derivaci, pak*

$$|I - S(h)| \le \tfrac{M_4}{180}\,(b-a)h^4\,, \qquad M_4 = \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f^{(4)}(x)|\,.$$

Poznámka. Simpsonova metoda je řádu 4 a je tedy přesná i pro polynomy stupně 3. Pro ověření stačí (linearita integrálu i $S(h)$) spočítat $\int_{x_1-h}^{x_1+h} x^3\,\mathrm{d}x = 2x_1^3 h + 2x_1 h^3 = S(h)$.

Richardsonova extrapolace

Pro metodu F řádu p konvergující k $F(0)$ je

$$F(h) = F(0) + ah^p + O(h^q)\,,$$

kde $a \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > p$. Uvažujme $h > 0$ a proložme body $[h^p, F(h)]$ a $[(2h)^p, F(2h)]$ přímku:

$$P(x) = F(h) + \frac{F(2h) - F(h)}{(2^p - 1)h^p}\,(x - h^p)\,.$$

Richardsonova extrapolace je $P(0) \approx F(0)$, tj.

$$F(h) + \frac{F(h) - F(2h)}{2^p - 1} = F_1(h)\,.$$

Věta. *Nechť $F(h) = F(0) + ah^p + O(h^q)$, $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$. Pak $F_1(h) = F(0) + O(h^q)$.*

Důkaz: $O(h^q)$ je uzavřeno na lineární kombinace:

$$F(2h) = F(0) + a2^p h^p + O(h^q)$$

$$F_1(h) = F(0) + ah^p + \frac{a(1-2^p)h^p}{2^p - 1} + O(h^q) =$$

$$= F(0) + O(h^q)\,.$$

Příklady. Uvedené metody mají chyby jen sudých řádů:

$$T_1(h) = T(h) + \tfrac13\,\big(T(h) - T(2h)\big) \qquad \text{řádu } 4\,,$$

$$S_1(h) = S(h) + \tfrac{1}{15}\,\big(S(h) - S(2h)\big) \qquad \text{řádu } 6\,.$$

Poznámky. Odstraníme chybu nejnižšího řádu.
1) Dostaneme přesnější metodu.
2) Přičítaná hodnota dobře odhaduje chybu (nemusí to být horní odhad), což můžeme použít v iteračním postupu: Spočteme pro h, opakovaně počítáme pro poloviční krok a odhadujeme chybu, dokud nedosáhneme požadované přesnosti. Pro lichoběžníkovou a Simpsonovu metodu stačí dopočítat hodnoty jen v nových bodech (můžeme mít dokonce uloženy součty pro předcházející krok).

Poznámka. $T_1(h) = \frac43\, T(h) - \frac13\, T(2h) =$
$= \frac{4h}{3}\big(\frac12\, f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots\big) - \frac{2h}{3}\big(f(x_0) + f(x_2) + \cdots\big) =$
$= \frac{h}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_1) + \cdots\big) = S(h)$.

Rombergova metoda

Začneme s lichoběžníkovou metodou, při přechodu k polovičnímu kroku dopočítáme všechny dostupné Richardsonovy extrapolace (v k-tém sloupci je metoda řádu $2k$), odhadujeme chyby hodnot pod diagonálou:

$$\begin{array}{lllll} T(h) & & & & \\ T(h/2) & T_1(h/2) & & & \\ T(h/4) & T_1(h/4) & T_2(h/4) & & \\ T(h/8) & T_1(h/8) & T_2(h/8) & T_3(h/8) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Příklad. Spočtěte $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$ s přesností $\varepsilon = 10^{-6}$.

Pro uvedené složené metody (R, T, S) můžeme využít odhady chyb, ve kterých přepíšeme $h = (b-a)/n$.

$$M_2 = \max_{x\in\langle 0,1\rangle} \left| \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}(x^2 - 1) \right| = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,$$

$$M_4 = \max_{x\in\langle 0,1\rangle} \left| \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}(x^4 - 6x^2 + 3) \right| = \tfrac{3}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

$$\varepsilon > \frac{M_2(b-a)^3}{24n_R^2} \quad n_R > \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{24\varepsilon}} \doteq 128{,}9 \quad n_R \ge 129$$

$$\varepsilon > \frac{M_2(b-a)^3}{12n_T^2} \quad n_T > \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{12\varepsilon}} \doteq 182{,}3 \quad n_T \ge 183$$

$$\varepsilon > \frac{M_4(b-a)^5}{180n_S^4} \quad n_S > \sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{180\varepsilon}} \doteq 7{,}2 \quad n_S \ge 8$$

Skutečné chyby jsou o něco menší:

metoda	R	T	S
$10^6 \cdot$ chyba	−0,606	0,602	−0,660

Stačilo by:

metoda	R	T	S	Romberg	Gauss
dělení	101	143	8	4	1
hodnot	101	144	9	5	3

Iterační proces by skončil:

metoda	R	T	S
dělení	128	256	8
hodnot	255	257	9

Diferenciální rovnice

(*Obyčejná*) *dif. rovnice řádu n*: $F(t,x,x',\dots,x^{(n)})=0$.
Speciální tvar: $x^{(n)}=f(t,x,\dots,x^{(n-1)})$.
Řešení na intervalu I: funkce $x\colon\ I\to\mathbb{R}$ taková, že pro každé $t\in I$ je $x^{(n)}(t)=f\big(t,x(t),\dots,x^{(n-1)}(t)\big)$.
Maximální řešení: neexistuje řešení na větším intervalu.
Cauchyova úloha: navíc *počáteční podmínky*:
$x(t_0)=x_{0,0},\ x'(t_0)=x_{0,1},\ \dots,\ x^{(n-1)}(t_0)=x_{0,n-1}$.
Počáteční podmínky „obvykle“ vyberou jedno z pole řešení.
Jednoznačnost Cauchyovy úlohy: řešení splývají na okolí t_0.

Separovatelné diferenciální rovnice 1. řádu

$$\boxed{x'=g(t)\,h(x),\qquad x(t_0)=x_0}$$

Věta. *Nechť I,J jsou otevřené intervaly, funkce g je spojitá na $I\ni t_0$, funkce h je spojitá na $J\ni x_0$. Pak $x'=g(t)\,h(x)$, $x(t_0)=x_0$, má řešení na intervalu $I'\subset I$ obsahujícím t_0. Je-li navíc h' spojitá na J, pak je toto řešení jednoznačné.*

Postup řešení:
1) $h(x_1)=0\ \dots\ x(t)=x_1$, $t\in I$ je *stacionární* řešení
2) $h(x_1)\neq 0\ \dots\ h(x)\neq 0$ na okolí x_1

$$x'(t)=g(t)\,h\big(x(t)\big)$$
$$\int\frac{x'(t)}{h\big(x(t)\big)}\ \mathrm{d}t=\int g(t)\ \mathrm{d}t$$
$$\left|\begin{array}{c}x(t)=y\\ x'(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}y\end{array}\right|:\quad \int\frac{\mathrm{d}y}{h(y)}=\int g(t)\ \mathrm{d}t$$
$$H_1(y)=G(t)+c$$
$$x(t)=y=\dots$$

3) Počáteční podmínka: dopočítat c nebo
$$\int_{x_0}^{x(t)}\frac{\mathrm{d}y}{h(y)}=\int_{t_0}^{t}g(u)\ \mathrm{d}u$$

4) Interval řešení: graf řešení se „zarazí“ o hranici $I\times J$.

Poznámka. Separaci proměnných lze použít pouze pro nestacionární řešení!!!

Příklad. $x'=-\lambda x$, $x(0)=x_0>0$ (radioaktivní rozpad).
$g(t)=-\lambda$, $h(x)=x$, $h'(x)=1$ spoj. na $\mathbb{R}\ \dots$ ex. a jedn.;
stacionární řešení: $x(t)=0$, $t\in\mathbb{R}$ (nevyhovuje);
nestacionární řešení:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\lambda x$$
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int-\lambda\ \mathrm{d}t$$
$$\ln|x|=-\lambda t+\ln|c|\qquad (c>0)$$
$$|x|=|c|\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$$
$$x(t)=c\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\qquad (c\neq 0)$$

dosazení počáteční podmínky: $x_0=c\,\mathrm{e}^{-\lambda\cdot 0}$, tj. $c=x_0$;
řešení: $x(t)=x_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$, $t\in\mathbb{R}$.

Příklad. $x'=\frac{x^2-1}{2t}$.
$g(t)=\frac{1}{t}$, spojitá na $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$, $h(x)=\frac{x^2-1}{2}$, $h'(x)=x$ spojité na $\mathbb{R}$, ... existence a jednoznačnost;
stacionární řešení: $x_{1,\pm}(t)=\pm1$, $t\in(-\infty,0)$, $x_{2,\pm}(t)==\pm1$, $t\in(0,+\infty)$;
nestacionární řešení:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{x^2-1}{2t}$$
$$\int\frac{2}{x^2-1}\ \mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}t}{t}$$
$$\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=\ln|t|+\ln|c|\qquad (c>0)$$
$$\frac{x-1}{x+1}=ct\qquad (c\neq 0)$$
$$x(t)=\frac{1+ct}{1-ct}$$

intervaly řešení: $t\neq 0$, $t\neq\frac{1}{c}$;
pro počáteční podmínky:
a) $x(0)=2$: nelze ($t\neq 0$);
b) $x(1)=-1$: stac. $x(t)=-1$, $t\in(0,+\infty)$;
c) $x(1)=0$: $c=-1$, $x(t)=\frac{1-t}{1+t}$, $t\in(0,+\infty)$;
d) $x(-\frac{1}{2})=3$: $c=-1$, $x(t)=\frac{1-t}{1+t}$, $t\in(-1,0)$;
e) $x(1)=-1$: $c=3$, $x(t)=\frac{1+3t}{1-3t}$, $t\in(\frac{1}{3},0)$.

Příklad. $x'=3x^{2/3}$.
$g(t)=1$, $h(x)=3x^{2/3}$ spojité na $\mathbb{R}\ \dots$ existence,
navíc $h'(x)=2x^{-1/3}$ spojitá na $\mathbb{R}\setminus\{0\}\ \dots$ jedn. pro $x\neq 0$;
stacionární řešení: $x(t)=0$, $t\in\mathbb{R}$;
nestacionární řešení:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3x^{2/3}$$
$$\int\tfrac{1}{3}\,x^{-2/3}\ \mathrm{d}x=\int\ \mathrm{d}t$$
$$x^{1/3}=t-c$$
$$x(t)=(t-c)^3\,,\quad t\in(-\infty,c)\,,\ t\in(c,+\infty)$$

Řešení se v bodech nejednoznačnosti dají spojovat, obecné řešení je

$$x_{c,d}(t)=\begin{cases}(t-c)^3\,, & t\le c\,, & c\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\},\\ 0\,, & c<t<d\,, & d\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\},\\ (t-d)^3\,, & d\le t\,, & c\le d\,.\end{cases}$$

Pro počáteční podmínku $x(1)=1$ dostaneme maximální jednoznačné řešení $x(t)=t^3$, $t\in\langle 0,+\infty)$, maximální (nejednoznačná) řešení jsou

$$x_c(t)=\begin{cases}(t-c)^3\,, & t\le c\,,\\ 0\,, & c<t<d\,, & c\in(-\infty,0\rangle\cup\{-\infty\}\,.\\ t^3\,, & 0\le t\,,\end{cases}$$

Příklad. $x'=\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{x}{\mathrm{e}^x}$.
separace:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{x}{\mathrm{e}^x}$$
$$\int\frac{\mathrm{e}^x}{x}\ \mathrm{d}x=\int\frac{1}{\ln t}\ \mathrm{d}t$$

integrály nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí

Příklad. $x'=\frac{1}{t}\cdot\frac{x+1}{x-1}$, $x(1)=0$.
$g(t)=\frac{1}{t}$, spojitá na $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$, $h(x)=\frac{x+1}{x-1}$, $h'(x)==\frac{-2}{(x-1)^2}$ spojité $(-\infty,1)$, $(1,+\infty)$, ... ex. a jedn.;
stacionární řešení:
$x_{1,2}(t)=-1$, $t\in(-\infty,0)$, $t\in(0,+\infty)$ (nevyhovují);

nestacionární řešení:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t} \cdot \frac{x+1}{x-1}$$

$$\int \frac{x-1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$x - 2\ln|x+1| = \ln t + c$$

pro poč. podmínku: $0-0=0+c$, tj. $c=0$ ($t>0$, $|x|<1$), $x(t) - 2\ln\bigl(x(t)+1\bigr) - \ln t = 0$, je zadaná *implicitně*

Lineární diferenciální rovnice (LDR)

$$\boxed{x^{(n)} + a_{n-1}(t)\,x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\,x' + a_0(t)\,x = b(t)}$$

$a_{n-1},\dots,a_0$ jsou *koeficienty*, b je *pravá strana.*
(*Přidružená*) *homogenní* LDR: $b(t)=0$.
Předpoklady: $a_{n-1},\dots,a_0,b$ spojité na intervalu $I \ni t_0$.

Věta. *Cauchyova úloha má právě jedno řešení na I.*

$C(I)$: lineární prostor funkcí spojitých na I.
$C^n(I)$: lineární prostor funkcí se spoj. n-tou derivací na I.
Lineární diferenciální operátor $D\colon C^n(I) \to C(I)$:
$x \mapsto x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x$.

Věta. 1) *Je-li x řešení LDR a $\tilde{x}$ řešení přidružené homogenní rovnice, pak $x+\tilde{x}$ je řešení dané LDR.*
2) *Jsou-li x_1, x_2 řešení LDR, pak $x_1 - x_2$ je řešení přidružené homogenní rovnice.*
3) *Jsou-li x_1, x_2 řešení pro pravé strany b_1, b_2, pak x_1+x_2 je řešení pro pravou stranu b_1+b_2* (princip superpozice).

Poznámka. Obecné řešení LDR lze zapsat ve tvaru $x(t) = \hat{x}(t) + \tilde{x}(t)$, kde $\hat{x}(t)$ je libovolné (*partikulární*) řešení a $\tilde{x}(t)$ je obecné řešení přidružené homogenní rovnice.

Věta. *Množina řešení homogenní LDR řádu n tvoří lineární prostor dimenze n.*

Důkaz: $D\colon\ x \mapsto x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1x' + a_0$ je lineární, množina řešení je jeho jádro, tj. lineární prostor.

$x(t_0)$	$x'(t_0)$	$\dots$	$x^{(n-1)}(t_0)$		řešení C. úlohy
1	0	$\dots$	0	$\to$	$x_0(t)$
0	1	$\dots$	0	$\to$	$x_1(t)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\dots$	1	$\to$	$x_{n-1}(t)$
$x_{0,0}$	$x_{0,1}$	$\dots$	$x_{0,n-1}$	$\to$	$\sum_{i=0}^{n-1} x_{0,i}x_i(t)$

$\dots$ lineární obal $\{x_0(t),\dots,x_{n-1}(t)\}$ je celý prostor řešení

$$A_0\,x_0(t) + \cdots + A_{n-1}\,x_{n-1}(t) = 0 \xrightarrow{t=t_0} A_0 = 0$$

$${}'\colon\ A_0\,x_0'(t) + \cdots + A_{n-1}\,x_{n-1}'(t) = 0 \xrightarrow{t=t_0} A_1 = 0 \quad \dots$$

$\dots$ funkce $x_0(t),\dots,x_{n-1}(t)$ jsou lineárně nezávislé

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Homogenní LDR 1. řádu $x' + a(t)\,x = 0$ je separovatelná: $x' = -a(t)\,x$. Stacionární řešení je $x_{\mathrm{s}}(t) = 0$, $t \in I$. Nestacionární řešení dostaneme separací proměnných

$$\tilde{x}'(t) = -a(t)\,\tilde{x}(t)$$

$$\int \frac{\tilde{x}'(t)}{\tilde{x}(t)}\,\mathrm{d}t = \int -a(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\ln|\tilde{x}(t)| = -A(t) + \ln|c| \quad (c>0)$$

$$|\tilde{x}(t)| = |c|\,\mathrm{e}^{-A(t)}$$

$$\tilde{x}(t) = c\,\mathrm{e}^{-A(t)} \quad (c \neq 0)$$

Přidáme stacionární řešení: $\tilde{x}(t) = c\,\mathrm{e}^{-A(t)}$, $t \in I$ ($c \in \mathbb{R}$).

Partikulární řešení LDR 1. řádu $x' + a(t)\,x = b(t)$ najdeme *variací konstanty*, tj. ve tvaru obecného řešení přidružené homogenní rovnice, ve kterém konstantu nahradíme funkcí: $\hat{x}(t) = c(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}$. Dostaneme:

$$c'(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)} + c(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}a(t) + a(t)\,c(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)} = b(t)$$

$$c'(t) = b(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}$$

integrací najdeme některou funkci $c(t)$.

Příklad. $x' + \frac{1}{t}\,x = 1$, $x(1) = 2$.
$a(t) = \frac{1}{t}$ spojitá na $(-\infty,0)$ a $(0,+\infty)$, $b(t)=1$ spojitá na $\mathbb{R}$ … existence a jednoznačnost na $(0,+\infty) \ni 1$;
řešení přidružené homogenní rovnice:

$$\int \frac{\tilde{x}'(t)}{\tilde{x}(t)}\,\mathrm{d}t = \int -\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$\ln|\tilde{x}(t)| = -\ln|t| + \ln|c|$$

$$|\tilde{x}(t)| = \left|\tfrac{c}{t}\right|$$

$$\tilde{x}(t) = \tfrac{c}{t}$$

partikulární řešení ve tvaru $\hat{x}(t) = c(t)\,t^{-1}$:

$$c'(t)\,t^{-1} + c(t)\,(-t^{-2}) = -c(t)\,t^{-2} + 1$$

$$c'(t) = t$$

$$c(t) = \tfrac{1}{2}\,t^2$$

$$\hat{x}(t) = c(t)\,t^{-1} = \tfrac{1}{2}\,t$$

$$x(t) = \hat{x}(t) + \tilde{x}(t) = \tfrac{1}{2}\,t + \tfrac{c}{t}$$

pro počáteční podmínku: $2 = \frac{1}{2} + \frac{c}{1}$, tj. $c = \frac{3}{2}$:

$$x(t) = \tfrac{1}{2}\,t + \tfrac{3}{2t}\,, \quad t \in (0,+\infty)\,.$$

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Funce $\mathrm{e}^{\lambda t}$ vyhovuje homogenní LDR s konstantními koeficienty právě tehdy, když $\mathrm{e}^{\lambda t}(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0) = 0$.

Charakteristická rovnice pro LDR s konstantními koeficienty: $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$.

Má-li reálný polynom imaginární kořen, pak má za kořen i číslo k němu komplexně sdružené (stejné násobnosti).
Pro imaginární kořeny $\alpha \pm \beta\mathrm{j}$ dostaneme komplexní řešení

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha+\beta\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t + \mathrm{j}\sin\beta t)\,,$$

$$x_2(t) = \mathrm{e}^{\alpha-\beta\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t - \mathrm{j}\sin\beta t)\,.$$

Z těchto komplexních řešení dostaneme reálná řešení

$$\tfrac{1}{2}\bigl(x_1(t) + x_2(t)\bigr) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t = \operatorname{Re} x_1(t)\,,$$

$$\tfrac{1}{2}\bigl(x_1(t) - x_2(t)\bigr) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t = \operatorname{Im} x_1(t)\,.$$

Věta. *Bázi prostoru řešení homogenní LDR s konstantními koeficienty dostaneme z kořenů její charakteristické rovnice:*
1) *Pro každý k-násobný reálný kořen λ vezmeme*
$$\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad t\,\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad \ldots, \quad t^{k-1}\,\mathrm{e}^{\lambda t}\,.$$
2) *Pro každou dvojici k-násobných imaginárních kořenů $\alpha \pm \beta\mathrm{j}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ vezmeme*
$$\begin{array}{llll} \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, & t\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, & \ldots, & t^{k-1}\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, \\ \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t, & t\,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t, & \ldots, & t^{k-1}\,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\,. \end{array}$$

Příklad. $x' + ax = 0$, $x(0) = x_0$ (radioaktivní rozpad).
Homogenní LDR s konstantními koef., jedno řešení na $\mathbb{R}$.
Charakteristická rovnice $\lambda + a = 0$ má řešení $\lambda_1 = -a$, tomu odpovídá řešení LDR $x_1(t) = \mathrm{e}^{-at}$. Obecné řešení (jednorozměrný prostor) je $c\,\mathrm{e}^{-at}$ $(c \in \mathbb{R})$.
Dosazení počáteční podmínky: $x_0 = c\,\mathrm{e}^{-a\cdot 0}$, tj. $c = x_0$.
Řešení: $x(t) = x_0\,\mathrm{e}^{-at}$, $t \in \mathbb{R}$.

Příklad. $x'' + \omega^2 x = 0$ $(\omega > 0)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
Homogenní LDR s konstantními koef., jedno řešení na $\mathbb{R}$.
Charakteristická rovnice $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ má řešení $\lambda_{1,2} = \pm\omega\mathrm{j}$, tomu odpovídají řešení LDR $\{\cos\omega t, \sin\omega t\}$. Obecné řešení je $c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.
Dosazení počáteční podmínek: $1 = c_1\cos(\omega\cdot 0) + c_2\sin(\omega\cdot 0)$, $0 = -c_1\omega\sin(\omega\cdot 0) + c_2\omega\cos(\omega\cdot 0)$, tj. $c_1 = 1$, $c_2 = 0$.
Řešení: $x(t) = \cos\omega t$, $t \in \mathbb{R}$.

Partikulární řešení LDR najdeme *variací konstant*. Při derivování si přidáváme podmínky, dostaneme soustavu rovnic pro neznámé $c_i'(t)$ (pro každé $t \in I$ regulární soustavu lineárních rovnic):
$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= c_1 x_1(t) + \cdots + c_n x_n(t) \\ \hat{x}(t) &= c_1(t)\,x_1(t) + \cdots + c_n(t)\,x_n(t) \\ \hat{x}'(t) &= c_1(t)\,x_1'(t) + \cdots + c_n(t)\,x_n'(t) \\ &\quad + \underbrace{c_1'(t)\,x_1(t) + \cdots + c_n'(t)\,x_n(t)}_{=0} \\ \hat{x}''(t) &= c_1(t)\,x_1''(t) + \cdots + c_n(t)\,x_n''(t) \\ &\quad + \underbrace{c_1'(t)\,x_1'(t) + \cdots + c_n'(t)\,x_n'(t)}_{=0} \\ &\vdots \\ \hat{x}^{(n)}(t) &= c_1(t)\,x_1^{(n)}(t) + \cdots + c_n(t)\,x_n^{(n)}(t) \\ &\quad + c_1'(t)\,x_1^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n'(t)\,x_n^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

Příklad. $x'' + x = \frac{1}{\cos t}$, $t \in I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
LDR, funkce 1, $\frac{1}{\cos t}$ spojité na I, řešení na I.
Char. rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{j}$, báze $\{\cos t, \sin t\}$, $\tilde{x}(t) = c_1\cos t + c_2\sin t$, $\hat{x}(t) = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t$,
$$\begin{aligned} c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t &= 0 \\ -c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\cos t &= \tfrac{1}{\cos t} \end{aligned}$$
$c_1'(t) = -\operatorname{tg} t$, $c_1(t) = \ln|\cos t|$, $c_2'(t) = 1$, $c_2(t) = t$,
$x(t) = \ln(\cos t)\cdot\cos t + t\sin t + c_1\cos t + c_2\sin t$.

Metoda odhadu pro nalezení partikulárního řešení LDR s konstantními koef. a kvazipolynomiální pravou stranou:
Jsou-li P, Q polynomy stupně nejvýše m,
$$b(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\big(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t\big),$$
$(\alpha + \beta\,\mathrm{j})$ (číslo pravé strany) je k-násobný kořen charakteristické rovnice, pak existuje partikulární řešení ve tvaru
$$\hat{x}(t) = t^k\,\mathrm{e}^{\alpha t}\big(\hat{P}(t)\cos\beta t + \hat{Q}(t)\sin\beta t\big),$$
kde $\hat{P}, \hat{Q}$ jsou polynomy stupně nejvýše m.

Příklad. $x'' - 4x = \mathrm{e}^{2t} - 4\cos 2t$.
Pravá strana je spojitá na $\mathbb{R}$, řešení budou na $\mathbb{R}$.
Charakteristická rovnice: $\lambda^2 - 4 = 0$, řešení $\lambda_{1,2} = \pm 2$.
Obecné řešení přidružené hom.: $\tilde{x}(t) = c_1\,\mathrm{e}^{2t} + c_2\,\mathrm{e}^{-2t}$.
Pro $b_1(t) = \mathrm{e}^{2t}$: číslo pravé strany $2 + 0\mathrm{j} = 2$ je kořen char. rovnice násobnosti 1, partikulární řešení $\hat{x}_1(t) = At\,\mathrm{e}^{2t}$.
Pro $b_2(t) = -4\cos t$: $0 + 2\mathrm{j} = 2\mathrm{j}$ není kořen char. rovnice, partikulární řešení $\hat{x}_2(t) = B\cos 2t + C\sin 2t$.
Princip superpozice: $\hat{x}(t) = At\,\mathrm{e}^{2t} + B\cos 2t + C\sin 2t$.
Do DR: $4A\,\mathrm{e}^{2t} - 8B\cos 2t - 8C\sin 2t = \mathrm{e}^{2t} - 4\cos 2t$.
Provnáním koeficientů u jednotlivých funkcí:
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2t}: &\quad 4A = 1\,, \\ \cos 2t: &\quad -8B = -4\,, \\ \sin 2t: &\quad -8C = 0\,. \end{aligned}$$
Řešení soustavy lineárních rovnic: $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 0$.
Partikulární řešení: $\hat{x}(t) = \frac{1}{4}t\,\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}\cos 2t$.
Obecné řešení: $x(t) = \frac{1}{4}\,t\,\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}\cos 2t + c_1\,\mathrm{e}^{2t} + c_2\,\mathrm{e}^{-2t}$, $t \in \mathbb{R}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.