

## Reálná čísla

$\mathbb{N}$  ... přirozená čísla:  $\{1, 2, 3, \dots\}$   
 $\mathbb{Z}$  ... celá čísla:  $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$   
 $\mathbb{Q}$  ... racionální čísla:  $\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$   
 $\mathbb{R}$  ... reálná č.: délky, doplnění limit, suprem/infim, řezu  
 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ... iracionální čísla ( $\sqrt{2}, \pi, e, \dots$ )  
 $\mathbb{C}$  ... komplexní čísla:  $\{x + jy : x, y \in \mathbb{R}\}, j^2 = -1$

**Tvrzení.** Číslo  $\sqrt{2}$  je iracionální.

Důkaz: Sporem, předpokládejme  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$  nesoudělná. Pak  $2b^2 = a^2$ ;  $a$  je dělitelné 2; existuje  $c \in \mathbb{N}$  tak, že  $a = 2c$ ;  $b^2 = 2c^2$ ;  $b$  je dělitelné 2;  $a, b$  soudělná – spor.

**Tvrzení.** Racionální čísla jsou právě ta, která mají konečný nebo periodický dekadický rozvoj.

Důkaz:  $\Rightarrow$ : Při použití algoritmu dělení celých čísel  $a/b$  jsou možné zbytky jen  $0, 1, \dots, b-1$ , po přechodu přes desetinnou čárku se přepisují jen 0, takže se po nejvýše  $(b-1)$  krocích vše opakuje.

$\Leftarrow$ : Přenásobením číslem  $10^{\text{délka periody}}$  a odečtením dostaneme, že celočíselný násobek má konečný dekadický rozvoj.

**Tvrzení.** Nenulová čísla s konečným dekadickým rozvojem mají dva dekadické rozvoje.

**Příklady.**  $1/7 = 0,142857$ ,  $1/3 = 0,3$ ,  $1/6 = 0,1\bar{6}$ ;  $2,7 = \frac{27}{10}$ ;  $2,7\bar{3}\bar{1} = \frac{2704}{990}$ ;  $2,3 = 2,2\bar{9}$ .

(lineární) uspořádání  $\mathbb{R}$ , reálná osa

**Definice.** Reálné číslo  $x$  se nazývá:  
 kladné, pokud  $x > 0$ ;  
 záporné, pokud  $x < 0$ ;  
 nezáporné, pokud  $x \geq 0$ ;  
 nekladné, pokud  $x \leq 0$ .

**Definice.** Pro každé  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , rozeznáváme tyto typy intervalů s krajními body  $a, b$ :

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  (otevřený);  
 $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  pro  $a, b \in \mathbb{R}$  (uzavřený);  
 $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  pro  $b \in \mathbb{R}$  (zleva otevřený, zprava uzavřený);  
 $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  pro  $a \in \mathbb{R}$  (zleva uzavřený, zprava otevřený).

Body intervalu, které nejsou krajní, nazýváme vnitřní.

**Tvrzení.** V každém intervalu existuje nekonečně mnoho racionálních i iracionálních čísel (hustota  $\mathbb{Q}$  i  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  v  $\mathbb{R}$ ).

**Definice.** Rozšířená množina reálných čísel je  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , kde  $-\infty$  a  $+\infty$  se nazývají nevlastní čísla. Pro každé  $x \in \mathbb{R}$  pokládáme:

- 1)  $-\infty < x < +\infty$
- 2)  $|\infty| = |-\infty| = +\infty$
- 3)  $x + \infty = \infty, \quad \infty + \infty = \infty,$   
 $x - \infty = -\infty, \quad -\infty - \infty = -\infty,$   
 $x \cdot \infty = \begin{cases} +\infty, & x > 0, \\ -\infty, & x < 0, \end{cases} \quad \infty \cdot \infty = \infty,$   
 $\frac{x}{\infty} = 0.$

Nedefinujeme:  $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}$ .

**Poznámka.** Využití: věty o limitách, popisy intervalů:  
 $(-\infty, 0) = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\},$   
 $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$  (otevřené i s  $\pm\infty$ ).

**Definice.** Necht  $M \subset \mathbb{R}$ . Číslo  $k \in \mathbb{R}$  se nazývá:  
 horní mez množiny  $M$ , pokud  $x \leq k$  pro každé  $x \in M$ ;  
 dolní mez množiny  $M$ , pokud  $x \geq k$  pro každé  $x \in M$ .

Množina  $M$  se nazývá:  
 shora omezená, pokud má horní mez;  
 zdola omezená, pokud má dolní mez;  
 omezená, pokud má horní i dolní mez.

**Příklady.**

- 1)  $\mathbb{N}$  je zdola omezená, není shora omezená.
- 2)  $\mathbb{Z}$  není omezená ani zdola, ani shora.
- 3)  $(0, 1)$  je omezená.

**Definice.** Necht  $M \subset \mathbb{R}$  je neprázdná.  
 Supremum množiny  $M$  ( $\sup M$ )  $+\infty$  pro shora neomezenou množinu  $M$ , jinak nejmenší horní mez množiny  $M$ .  
 Infimum množiny  $M$  ( $\inf M$ ) je  $-\infty$  pro zdola neomezenou množinu  $M$ , jinak největší dolní mez množiny  $M$ .

**Příklady.**  $\sup \mathbb{N} = +\infty,$   
 $\sup(0, 1) = \min(1, +\infty) = 1, \sup(0, 1) = \min(1, +\infty) = 1.$

**Poznámka.** Jestliže existuje maximum (minimum) množiny, pak je zároveň supremem (infimem) této množiny.

**Věta.** Každá neprázdná množina reálných čísel má supremum i infimum.

**Poznámky.**

- 1)  $\sup \emptyset = -\infty, \inf \emptyset = +\infty.$
- 2)  $\max M$  ( $\min M$ ) existuje právě tehdy, když  $\sup M \in M$  ( $\inf M \in M$ ).

Řez ( $A|B$ ):  $A, B \subset \mathbb{Q}$  neprázdné,  $A \cup B = \mathbb{Q}, A < B$ .  
 Řezy s  $\max A$  nebo  $\min B$  odpovídají racionálním číslům (uvažujeme např. druhý typ), ostatní iracionálním. Rozšiřujeme relace a operace z  $\mathbb{Q}$ :

$(A_1|B_1) \leq (A_2|B_2)$  pro  $A_1 \subset A_2$ ;  
 $(A_1|B_1) + (A_2|B_2) = (\dots|B_1 + B_2)$ ;  
 $(A_1|B_1) \cdot (A_2|B_2) = (\dots|B_1 \cdot B_2)$  pro  $0 \in A_1 \cap A_2$ .  
 Platí  $\sup_{x \in M} (A_x|B_x) = (\bigcup_{x \in M} A_x|\dots)$ , pokud přidáme  $(\mathbb{Q}, \emptyset) \sim +\infty$ .

Korespondence řezů a dekadických rozvojų.

**Věta** (princip vnořených intervalů). Jsou-li  $I_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) uzavřené intervaly a  $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ , pak  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$ . Jestliže navíc délky intervalů  $I_n$  klesají k nule, pak je tento průnik jednobodový.

Důkaz: Označme  $I_n = \langle a_n, b_n \rangle$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ . Z předpokladů vyplývá, že  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$ . Množina  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  je neprázdná, shora omezená každým číslem  $b_n$ , má tedy v  $\mathbb{R}$  supremum, označme ho  $a$ . Protože  $a \leq b_n$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ , má množina  $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$  v  $\mathbb{R}$  infimum, označme ho  $b$ . Protože  $a \leq b$ , je  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \neq \emptyset$ . Jestliže délky intervalů  $I_n$  klesají k nule, pak  $a = b$ .

**Poznámka.** Podmínka uzavřenosti intervalů ve výše uvedené větě je podstatná: je-li  $I_n = (0, \frac{1}{n})$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ , pak  $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$  a  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \emptyset$ .

## Funkce

**Definice.** (Reálná) funkce (reálné proměnné)  $f$  je zobrazení  $A \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $A \subset \mathbb{R}$  je neprázdná.

Množina  $A$  je *definiční obor* funkce  $f$  ( $D(f)$ ), množina  $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$  je *obor hodnot* funkce  $f$  ( $R(f)$ ).

Graf funkce  $f$  je množina  $\{[x, f(x)] : x \in D(f)\}$ .

**Poznámka.** Pokud není zadán definiční obor, bereme maximální možný.

**Definice.** Funkce  $f : A \rightarrow B$  je:

*prostá*, pokud různým vzorům odpovídají různé obrazy;

*na  $B$* , pokud její obor hodnot je  $B$  ( $f : A \xrightarrow{\text{na}} B$ );

*vzájemně jednoznačná (bijekce)*, pokud je prostá na  $B$ .

**Příklady.**

1)  $x^2$  není prostá ( $f(1) = f(-1)$ ), je na  $\langle 0, +\infty \rangle$ .

2)  $x^3$  je prostá na  $\mathbb{R}$ .

**Poznámka.** Neostře uspořádání  $f \leq g$  a operace sčítání, odčítání, násobení a dělení funkcí definujeme „bodově“.

**Definice.** Složení funkcí  $f : A \rightarrow B$  a  $g : B \rightarrow C$  je funkce  $g \circ f : A \rightarrow C$  definovaná předpisem  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

**Příklad.**  $f(x) = 2x$ ,  $g(x) = x^2$ :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = (2x)^2 = 4x^2,$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) = 2x^2.$$

**Definice.** Funkce  $g : R(f) \rightarrow A$  je *inverzní* k funkci  $f : A \rightarrow B$ , pokud  $(g \circ f)(x) = x$  pro každé  $x \in A$ . Značíme  $g = f_{-1}$ .

**Věta.** Funkce  $f$  má inverzní funkci právě tehdy, když je prostá. Pak  $D(f_{-1}) = R(f)$ ,  $R(f_{-1}) = D(f)$ ,  $f$  je inverzní funkce k  $f_{-1}$  a graf  $f_{-1}$  je symetrický s grafem  $f$  podle osy prvního a třetího kvadrantu (přímky o rovnici  $y = x$ ).

**Příklad.**  $f(x) = e^x : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} (0, +\infty)$  je prostá, má inverzní  $f_{-1}(x) = \ln x : (0, +\infty) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}$ ;  $f_{-1} \circ f \neq f \circ f_{-1}$ .

**Definice.** Funkce  $f$  je (zdola, shora) omezená na  $A \subset D(f)$ , pokud je (zdola, shora) omezená množina  $f(A)$ .

**Poznámka.** Pokud neurčujeme  $A$ , myslíme  $D(f)$ .

**Příklady.**

1)  $x^2$  je zdola omezená ( $x^2 \geq 0$ ), není shora omezená.

2)  $\arctg x$  je omezená.

3)  $x^3$  není omezená zdola ani shora.

**Definice.** Funkce  $f$  je *rostoucí* (klesající, neklesající, nerostoucí) na množině  $A \subset D(f)$ , pokud  $f(x) < f(y)$  ( $f(x) > f(y)$ ,  $f(x) \leq f(y)$ ,  $f(x) \geq f(y)$ ) pro všechna  $x, y \in A$  taková, že  $x < y$ . Takové funkce se nazývají *monotónní*, rostoucí a klesající funkce se nazývají *ryze monotónní*.

**Příklady.**

1)  $x^2$  je klesající na  $(-\infty, 0)$ , rostoucí na  $\langle 0, +\infty \rangle$ .

2)  $\text{sign } x$  je neklesající.

3)  $\frac{1}{x}$  je klesající na  $(-\infty, 0)$  a na  $(0, +\infty)$ , není monotónní.

**Věta.** Rostoucí (klesající) funkce je prostá a má inverzní funkci, která je rovněž rostoucí (klesající).

**Definice.** Funkce  $f$  je:

*sudá*, pokud  $f(-x) = f(x)$  pro každé  $x \in D(f)$ ;

*lichá*, pokud  $f(-x) = -f(x)$  pro každé  $x \in D(f)$ .

**Příklady.** 1)  $x^2$  je sudá. 2)  $x^3$  je lichá.

**Poznámka.** Graf sudé funkce je symetrický podle osy  $y$ , graf liché funkce je symetrický podle počátku.

**Definice.** Funkce  $f$  je *periodická* s *periodou*  $p > 0$ , pokud  $f(x + p) = f(x - p) = f(x)$  pro každé  $x \in D(f)$ .

**Poznámka.** Pro periodu  $p$ , jsou i  $np$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) periody. Nejmenší perioda (pokud existuje) se nazývá *základní*.

**Příklad.** Funkce  $\sin x$  má základní periodu  $2\pi$ .

Lineární transformace a graf funkce:

1) Graf  $f(x) + c$  je posunutý o  $c$  ve směru osy  $y$ .

2) Graf  $f(x + c)$  je posunutý o  $-c$  ve směru osy  $x$ .

3) Graf  $c f(x)$  je  $c$ -krát roztažený od osy  $x$ .

4) Graf  $f(cx)$  ( $c \neq 0$ ) je  $c$ -krát stažený k ose  $y$ .

(Pro  $c < 0$  opačná orientace nebo překlopení.)

**Definice.** Množiny  $A, B$  mají stejnou *mohutnost* (kardinalitu), pokud existuje bijekce  $A \xrightarrow{\text{na}} B$ . Množiny které mají mohutnost  $\mathbb{N}$ , se nazývají *spočetné*.

**Tvrzení.**  $\mathbb{Q}$  je spočetná,  $\mathbb{R}$  je nespočetná.

Důkaz: 1)  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  v základním tvaru přiřadíme přirozeným číslům primárně vzestupně podle  $|a| + b$ , pak libovolně.

2) Pro  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  najdeme dekadický rozvoj čísla, které není v  $f(\mathbb{N})$ : jako  $n$ -tou cifru dekadického rozvoje vybereme cifru různou od  $n$ -té cifry dekadického rozvoje  $f(n)$  a od 9.

## Elementární funkce

*Mocniny*  $x^a$

$n \in \mathbb{N}$ :  $x^n = x \cdot \dots \cdot x$  ( $n \times$ ); inverzní  $\sqrt[n]{x}$  ( $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$ );  $x^0 = 1$  i pro  $x = 0$ ;  $x^{-n} = 1/x^n$ ;

$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ,  $p, q$  nesoudělná:

$D(x^{p/q})$	$q$ liché	$q$ sudé ( $x \geq 0$ )
$p \geq 0$	$\mathbb{R}$	$\langle 0, +\infty \rangle$
$p < 0$ ( $x \neq 0$ )	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(0, +\infty)$

pro  $a \notin \mathbb{Q}$  pokládáme  $x^a = e^{a \ln x}$ , tedy  $D(f) = (0, +\infty)$ .

*Exponenciální o základu*  $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ :  $a^x$  (impl.  $e^x$ );

inverzní: *logaritmus o základu*  $a$ :  $\log_a x$ ;

( $\log x = \log_{10} x$  *dekadický*,  $\ln x = \log_e x$  *přirozený*).

Pro  $x \in \mathbb{Q}$  je  $a^x$  definováno (viz mocniny),

pro  $x \notin \mathbb{Q}$  dodefinujeme monotónně, tj. např. pro  $a > 1$ :

$a^x = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < x\} = \inf\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q > x\}$ .

Pro každé  $x, y \in \mathbb{R}$  a každé  $a > 0$  platí

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Pro každé  $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$  platí

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad x, y > 0,$$

$$\log_a x^y = y \log_a x, \quad x > 0.$$

Exponenciální funkce i logaritmus lze převést na základ  $e$ :

$$a^x = e^{x \cdot \ln a}, \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

goniometrické:  $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ;  
 inverzní:  $\arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arccotg} x$ .

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$x$	$0$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	$0$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$1$

hyperbolické:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x};$$

inverzní:  $\operatorname{argsinh} x, \operatorname{argcosh} x, \operatorname{argtgh} x, \operatorname{argcotgh} x$ .

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

**Poznámka.** V  $\mathbb{C}$ :

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}), \quad \sin x = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx}).$$

### Limity a spojitost funkcí

**Definice.** Okolí bodu  $a \in \mathbb{R}$  o poloměru  $r > 0$  je

$$U(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} = (a - r, a + r).$$

Prstencové okolí bodu  $a \in \mathbb{R}$  o poloměru  $r > 0$  je

$$P(a, r) = U(a, r) \setminus \{a\} = (a - r, a) \cup (a, a + r).$$

Okolí bodů  $\pm\infty$  jsou ( $r$  je reálné číslo):

$$U(-\infty, r) = P(-\infty, r) = \{x \in \mathbb{R} : x < r\} = (-\infty, r),$$

$$U(+\infty, r) = P(+\infty, r) = \{x \in \mathbb{R} : x > r\} = (r, +\infty).$$

**Definice.** Funkce  $f$  definovaná v prstencovém okolí bodu  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  má v bodě  $a$  limitu  $b \in \overline{\mathbb{R}}$  ( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ ), jestliže platí: Ke každému okolí  $U$  bodu  $b$  existuje prstencové okolí  $P$  bodu  $a$  tak, že  $f(P) \subset U$ .

**Poznámka.** Obecněji limita v hromadném bodě definičního oboru (v každém prstencovém okolí leží bod  $D(f)$ ) je dána podmínkou  $f(P \cap D(f)) \subset U$ .

**Tvrzení.** Pro každé  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  platí:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow a} c = c$  pro každé  $c \in \mathbb{R}$ .
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ .

Důkaz: 1)  $f^{-1}(U) = \mathbb{R}$  pro každé  $U$ , např.  $P = P(a, 1)$ .

2)  $f^{-1}(U) = U$  pro každé  $U$ , např.  $P = U \setminus \{a\}$ .

**Příklad.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$  neexistuje: pro  $b \in \overline{\mathbb{R}}$  existuje  $U_b \not\subset \langle -1, 1 \rangle$ ,  $f^{-1}(U_b)$  neobsahuje prstencové okolí  $+\infty$ .

Jednostranné limity zleva/zprava pro levá/pravá prstencová okolí  $a$  (body prstencového okolí nalevo/napravo od  $a$ ).

**Příklad.**  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sign} x = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sign} x = +1$ .

**Věta.** Pro funkci  $f$  definovanou v prstencovém okolí bodu  $a \in \mathbb{R}$  je  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  právě tehdy, když  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$ .

**Poznámka.** Věty lze formulovat i pro jednostranné limity.

**Věta** (o jednoznačnosti). Každá funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.

Důkaz: Pokud má v  $a$  limitu  $b$ , tak jiné číslo  $c \in \overline{\mathbb{R}}$  není limitou: existují disjunktní okolí  $U_b, U_c$  bodů  $b, c$ ,  $f^{-1}(U_c)$  je disjunktní s  $f^{-1}(U_b)$  a neobsahuje tedy prstencové okolí  $a$ .

**Věta** (o monotonii). Je-li  $f \leq g$  na prstencovém okolí bodu  $a$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ , pak  $b \leq c$ .

Důkaz (sporem): Pro  $b > c$  existují disjunktní okolí  $U_b, U_c$  bodů  $b, c$  a prstencová okolí  $P_f \subset f^{-1}(U_b)$ ,  $P_g \subset g^{-1}(U_c)$  bodu  $a$ , pro  $x \in P_f \cap P_g$  je  $f(x) > g(x)$  – spor.

**Příklad.** Ne pro  $<: 0 < \frac{1}{x}$  na  $(0, +\infty)$ , v  $+\infty$  stejná limita.

**Věta.** Funkce s vlastní limitou v bodě  $a$  je omezená na prstencovém okolí bodu  $a$ .

Důkaz: Existuje omezené okolí  $U$  limity, k němu  $P_a$ .

**Věta.** Funkce s kladnou (zápornou) limitou v bodě  $a$  je na prstencovém okolí bodu  $a$  kladná (záporná).

Důkaz: Existuje okolí  $U$  limity neobsahující  $0$ , k němu  $P_a$ .

**Věta.**  $\lim_{x \rightarrow a} = 0$  právě tehdy, když  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ .

Důkaz:  $f(x) \in U(0, \varepsilon)$  právě tehdy, když  $|f(x)| \in U(0, \varepsilon)$ .

**Věta.** Monotónní funkce na intervalu má v jeho krajních bodech příslušné jednostranné limity (supremum a infimum funkčních hodnot).

Důkaz (pro  $f$  neklesající na  $I = (a, b)$ ):  $c = \sup f(I)$ , okolí  $U$  bodu  $c$  má levý krajní bod  $d$ , existuje  $e \in (d, c) \cap f(I)$ ,  $f^{-1}(U) \supset (f^{-1}(e), b)$  – levé prstencové okolí  $b$ .

**Příklad.**  $e^x: \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} (0, +\infty)$  je rostoucí, tedy  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \inf(0, +\infty) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \sup(0, +\infty) = +\infty$ .

**Příklad.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ 0, & a < 0, \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = \begin{cases} 0, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ +\infty, & a < 0. \end{cases}$$

**Věta** (limita součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí). Limita součtu (rozdílu, součinu, podílu) funkcí je součet (rozdíl, součin, podíl) limit, pokud je definován (včetně operací s nevládnými čísly).

Důkaz (pro součet vlastních limit): Pro  $U(b+c, \varepsilon)$  uvažujme  $f(P_f) \subset U(b, \frac{\varepsilon}{2})$  a  $f(P_g) \subset U(c, \frac{\varepsilon}{2})$ , pak  $(f+g)(P_f \cap P_g) \subset U(b+c, \varepsilon)$ .

**Příklady.**

- 1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - 3x + 1) = |\infty - \infty + 1|$  nedefinováno  
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(2 - 3x^{-1} + x^{-2}) = (+\infty) \cdot 2 = +\infty$ ,
- 2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x^2+1} = \left| \frac{-\infty}{+\infty} \right|$  nedefinováno  
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^{-1} - x^{-2}}{1 + x^{-2}} = \frac{0-0}{1+0} = 0$ ,
- 3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \left| \frac{0}{0} \right|$  nedefinováno  
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$ .

**Věta.** Je-li  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  a  $g > 0$  na prstencovém okolí bodu  $a$ , pak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = +\infty$ .

**Poznámka.**  $|\frac{1}{0\pm}| = \pm\infty$ .

**Příklady.**

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 1\pm} \frac{2}{x-1} = \left| \frac{2}{0\pm} \right| = \pm\infty$ .
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x-1)^2} = \left| \frac{-2}{0+} \right| = -\infty$ .
- 3)  $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{\ln(2-x)}{x^2-4} = \left| \frac{-\infty}{0-} \right| = +\infty$ .

**Věta (o sevření).** Je-li  $f \leq h \leq g$  na prstencovém okolí  $a$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ , pak  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ .

**Příklad.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

stačí  $x \rightarrow 0+$  (sudá) a  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , věta o sevření:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sin x &< \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x} \\ 1 &< \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \\ 1 &> \frac{\sin x}{x} > \cos x \end{aligned}$$

**Věta.** Je-li  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ,  $g$  je omezená na prstencovém okolí  $a$ , pak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$ .

Důkaz:  $|g| \leq M$ ,  $0 \leq |f(x)g(x)| \leq M|f(x)|$ , věta o sevření.

**Poznámka.**  $|0 \cdot \text{om.}| = \left| \frac{\text{om.}}{\pm\infty} \right| = 0$ .

**Příklad.**  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = |0 \cdot \text{om.}| = 0$ .

**Věta.** Je-li  $f \leq g$  na prstencovém okolí  $a$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , ( $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ ), pak  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$  ( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ).

**Věta.** Je-li  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \{\pm\infty\}$  a  $g$  je omezená na prstencovém okolí  $a$ , pak  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = b$ .

Důkaz: Pro  $+\infty$ :  $g \geq M$ ,  $f(x) + g(x) \geq f(x) + M \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ .

**Poznámka.**  $|\pm\infty + \text{om.}| = \pm\infty$ .

**Příklad.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \cos x) = |+\infty + \text{om.}| = +\infty$ .

**Tvrzení.** Jestliže  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  neexistuje, pak platí:

- 1) Je-li  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  vlastní, pak  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x))$  neexistuje.
- 2) Je-li  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  vlastní a nenulová, pak neexistují  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x))$  a  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x))$ .

Důkaz: Sporem, existovala by  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  podle věty o limitě součtu, součinu, podílu.

**Příklad.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{1-2^{-x}} = \left| \frac{\text{neex.}}{1} \right|$  neexistuje.

**Věta (limita složené funkce).** Necht' pro  $a, b, c \in \bar{\mathbb{R}}$  platí:

- (1)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ,
  - (2)  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$ ,
  - (3)  $g(b) = c$  nebo  $f(x) \neq b$  na prstencovém okolí  $a$ .
- Pak  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$ .

Důkaz:  $U_c$

(2): existuje  $P_b: P_b \xrightarrow{g} U_c$

(1): existuje  $P_a: P_a \xrightarrow{f} P_b \cup \{b\}$

(3): pro  $g(b) = c$  je  $P_b \cup \{b\} \xrightarrow{g} U_c$ ,  $P_a \xrightarrow{g \circ f} U_c$ ,

jinak existuje  $P'_a: P'_a \xrightarrow{f} P_b$ ,  $P'_a \xrightarrow{g \circ f} U_c$

**Příklad.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = \lim_{y \rightarrow 0} e^y = 1$  ( $\frac{1}{x} \neq 0$ ).

**Příklad.**  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ;  
 $g(y) = 0$  pro  $y \neq 0$ ,  $g(0) = 1$ :  $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 0$ ;  
 $(g \circ f)(x) = 1$  pro  $x \in \{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ , jinak 0;  
 $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x)$  neexistuje.

**Definice.** Funkce  $f$  je spojité v bodě  $a \in D(f)$ , pokud ke každému okolí  $U$  bodu  $f(a)$  existuje okolí  $V$  bodu  $a$  tak, že  $f(V \cap D(f)) \subset U$ . Funkce je spojité, pokud je spojité v každém bodě svého definičního oboru.

**Věta.** Funkce  $f$  definovaná v okolí bodu  $a$  je v bodě  $a$  spojité právě tehdy, když  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Poznámka.** Funkce  $f$  je spojité v izolovaných bodech  $D(f)$  (pro které je  $D(f)$  disjunktní s některým prst. okolím).

**Poznámka.** Podobně spojitosti zleva/zprava.

**Příklady.** 1)  $x$  je spojité.

2)  $\text{sign } x$  je spojité v bodech  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , není spojité v bodě 0.

3) Charakteristická funkce  $\langle 0, +\infty \rangle$  je spojité v bodech  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , zprava spojité v 0.

4) Dirichletova funkce není spojité v žádném bodě (v žádném nemá limitu):

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

**Poznámka.** Po částech spojité funkce: v každém omezeném intervalu jen konečně mnoho bodů nespojitosti, v nich konečné jednostranné limity.

**Věta.** 1) Jsou-li  $f, g$  spojité v  $a$ , pak  $f \pm g, f \cdot g, f/g$  (pokud je definována),  $|f|$  jsou spojité v  $a$ .

2) Je-li  $f$  spojité v  $a$ , pak je omezená na okolí  $a$ .

3) Je-li  $f$  spojité v  $a$ ,  $f(a) > 0$ , pak  $f(x) > 0$  na okolí  $a$ .

4) Je-li  $f$  spojité v  $a$ ,  $g$  v  $f(a)$ , pak  $g \circ f$  je spojité v  $a$ .

**Věta.** Polynomy a racionální funkce jsou spojité funkce.

Důkaz: Spojitost konstant,  $x$ , součtu, součinu a podílu.

**Věta.** Mocniny, exponenciální, goniometrické a hyperbolické funkce a funkce k nim inverzní jsou spojité.

### Posloupnosti

**Definice.** (Nekonečná) posloupnost (reálných čísel) je zobrazování  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Značíme  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ,  $a_n$  je  $n$ -tý člen.

nekonečněrozměrný aritmetický vektor  
obecněji  $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$ ,  $n_0 \in \mathbb{Z}$

## Příklady.

1)  $(2^n)_{n=1}^\infty = (2, 4, 8, \dots)$

$a_n = a_1 q^{n-1} \dots$  geometrická s kvocientem  $q$ .

2)  $(1, 3, 5, 7, \dots)$

$a_n = a_1 + (n-1)d \dots$  aritmetická s diferencí  $d$ .

3) rekurentně  $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$  pro  $n \in \mathbb{N}$ :

$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 11, \dots)$  (Fibonacciho)

Pojmy a věty jako pro funkce: omezená, monotónní (stačí vztahy mezi  $a_n, a_{n+1}$ ), limita. Posloupnost s vlastní limitou je omezená (nejen lokálně).

**Věta.** Posloupnost  $(a_n)_{n=1}^\infty$  má limitu  $a \in \bar{\mathbb{R}}$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ ), pokud pro každé okolí  $U$  bodu  $a$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pro všechna  $n > n_0$  je  $a_n \in U$ .

**Definice.** Posloupnost s vlastní limitou je konvergentní.

**Věta.**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  právě tehdy, když  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = b$  pro každou posloupnost  $(a_n)_{n=1}^\infty$  čísel z  $D(f) \setminus \{a\}$  s  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

**Příklad.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$  neexistuje:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \pi n = 0,$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1.$

**Definice.** Vybraná posloupnost (podposloupnost) z posloupnosti  $(a_n)_{n=1}^\infty$  je posloupnost  $(a_{k_n})_{n=1}^\infty$ , kde  $(k_n)_{n=1}^\infty$  je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

**Poznámka.**  $a_n = f(n), k_n = g(n): a_{k_n} = (f \circ g)(n).$

**Definice.** Číslo  $a \in \bar{\mathbb{R}}$  je hromadná hodnota posloupnosti, pokud v každém okolí  $a$  leží nekonečně mnoho jejích členů.

**Věta.** Limita posloupnosti je její hromadnou hodnotou. Hromadná hodnota posloupnosti je limitou některé její vybrané posloupnosti.

Důkaz: 1. Zřemé. 2. Okolí  $U_n$  hromadné hodnoty smřšťující se k ní,  $a_{k_n} \in U_n$  tak, aby  $(k_n)_{n=1}^\infty$  byla rostoucí.

**Příklad.** Posl.  $((-1)^n)_{n=1}^\infty$  má hromadné hodnoty  $\pm 1$ .

**Věta.** Každá posloupnost má alespoň jednu hromadnou hodnotu (omezená posloupnost vlastní).

Důkaz:  $-\infty$  nebo  $+\infty$ , pokud není omezená. Pro omezenou sestrojíme posloupnost vnořených (poloviční délky) uzavřených intervalů obsahujících nekonečně mnoho členů posloupnosti, jejich průnik obsahuje hromadnou hodnotu.

**Věta.** Supremum a infimum množiny hromadných hodnot posloupnosti jsou hromadné hodnoty této posloupnosti.

Důkaz: Okolí  $U$  obsahuje hrom. hodnotu a její okolí  $U' \subset U$ .

limes superior ( $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ )

limes inferior ( $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ )

**Věta.** Pro posloupnost je ekvivalentní:

1) Má limitu.

2) Má jedinou hromadnou hodnotu.

3) Limes inferior a limes superior posloupnosti jsou stejné.

4) Každá vybraná posloupnost má stejnou limitu.

## Vlastnosti spojitých funkcí

**Věta** (Weierstrass). Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá největší a nejmenší hodnoty.

Důkaz: Pro  $m = \sup f(I)$  existuje posloupnost  $(a_n)_{n=1}^\infty$  taková, že  $f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m$ , ta má v  $I$  hromadnou hodnotu  $a$ , k ní konverguje vybraná posloupnost  $(a_{k_n})_{n=1}^\infty$ , ze spojitosti  $f$  vyplývá  $f(a_{k_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a)$ , tedy  $m = f(a)$ .

**Příklady.**

1)  $f(x) = \frac{1}{x}$  na  $(0, 1)$  (ryze monotónní funkce na otevřeném intervalu) nenabývá maxima ani minima.

2)  $f(x) = -x - 1$  na  $\langle -1, 0 \rangle$ ,  $f(0) = 0, f(x) = 1 - x$  na  $(0, 1)$  nenabývá extrémů.

**Věta** (o mezihodnotě). Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $I$  a nabývá-li v něm hodnot  $m$  a  $M, m < M$ , pak v tomto intervalu nabývá všech hodnot z intervalu  $\langle m, M \rangle$ .

Důkaz:  $c \in (m, M), m, M$  se nabývají v krajních bodech intervalu  $I_1$ , sestrojíme posloupnost vnořených (poloviční délky) intervalů s hodnotami v krajních bodech kolem  $c$ , jejich průnik obsahuje  $a$ , pro které  $f(a) = c$ .

**Důsledky.**

1) Pro spojitou nekonstantní funkci je obrazem intervalu interval (uzavřeného uzavřený).

2) Spojitá funkce na intervalu je prostá (má inverzní funkci) právě tehdy, když je ryze monotónní.

Důkaz: 2) Např. pro  $x_1 < x_2 < x_3, f(x_1) < f(x_2) > f(x_3), f(x_1), f(x_3) < c < f(x_2)$  ex. vzory  $c$  v  $(x_1, x_2)$  i v  $(x_2, x_3)$ .

**Poznámka.** Metoda bisekce pro hledání nulového bodu spojitě funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle, f(a)f(b) < 0$ , používá metodu důkazu věty o mezihodnotě.

**Věta.** Inverzní funkce k ryze monotónní funkci na intervalu je spojitá.

Důkaz:  $f$  na  $I, b \in D(f_{-1})$  např. ne krajní,  $a = f_{-1}(b), U = (c, d) \subset I$  okolí  $a$ , existuje okolí  $V$  bodu  $b$  mezi  $f(c), f(d), f_{-1}(V \cap D(f_{-1})) \subset U$ .

**Příklad.**  $f(x) = x$  na  $\langle 0, 1 \rangle, f(x) = x - 1$  na  $(2, 3)$  je rostoucí (i spojitá), inverzní není spojitá v 1.

## Derivace funkce

„Okamžitá“ změna funkce jako limita průměrných změn.

**Definice.** Derivace funkce  $f$  v bodě  $a$  je  $\frac{df}{dx}(a) = f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ .

**Poznámky.**

1)  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

2) Podobně jednostranné derivace.

3) Derivace funkce v bodě:  $f'(a)$  (číslo, i nevlastní). Derivace funkce:  $f': a \mapsto f'(a)$  (funkce, jen vlastní hod.). Derivace:  $': f \mapsto f'$  (operátor).

4) Funkce  $f$  má derivaci na intervalu  $I$ , pokud  $f'$  existuje na  $I$  (v případných krajních bodech  $I$  příslušná jednostranná).

**Příklad.** Pro funkci  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  je

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \left| \frac{1}{0^+} \right| = +\infty.$$

**Věta.**

0)  $(c)' = 0 \quad x \in \mathbb{R} \text{ (} c \in \mathbb{R} \text{ je konstanta).}$

1)  $(x^a)' = ax^{a-1} \quad x \in \mathbb{R} \text{ (pro } a \in \mathbb{N}),$   
 $x \neq 0 \text{ (pro } a \in \mathbb{Z}),$   
 $x > 0 \text{ (pro } a \notin \mathbb{Q}).$

2)  $(e^x)' = e^x \quad x \in \mathbb{R}.$

3)  $(\sin x)' = \cos x \quad x \in \mathbb{R}.$   
 $(\cos x)' = -\sin x \quad x \in \mathbb{R}.$

Důkaz: 0)  $(c)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$

1) pro  $a \in \mathbb{N}$ :  $(x^n)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [(x+h)^n - x^n] =$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (x^n + nx^{n-1}h + \dots + h^n - x^n) =$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} (nx^{n-1} + \dots + h^{n-1}) = nx^{n-1}.$

2)  $(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$

3) pro  $\sin x$ :  $(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x+h/2) \sin h/2}{h} =$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x+h/2) \cdot \lim_{h/2 \rightarrow 0} \frac{\sin h/2}{h/2} = \cos x \cdot 1 = \cos x.$

**Příklady.**

1)  $(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2, x \in \mathbb{R}.$

2)  $(\sqrt[3]{x})' = (x^{1/3})' = \frac{1}{3} x^{1/3-1} = 1/(3 \sqrt[3]{x^2}), x \neq 0.$

**Věta.** Funkce je spojitá v každém bodě, ve kterém má vlastní derivaci.

Důkaz:  $f(x) = f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot (x-a) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a).$

**Příklady.**

1)  $\text{sign}$  je nespojitá v 0,

$\text{sign}'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sign } h - \text{sign } 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|h|} = \left| \frac{1}{0^+} \right| = +\infty.$

2)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  je spojitá v 0,  $f'(0) = +\infty.$

3)  $f(x) = |x|$  je spojitá v 0,  $f'(0)$  neexistuje:

$f'_{\pm}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \pm 1 = \pm 1.$

**Poznámka.** Existuje funkce spojitá na  $\mathbb{R}$ , která nemá v žádném bodě derivaci.

**Věta** (o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu). *Mají-li funkce  $f, g$  vlastní derivace v bodě  $a$ , pak:*

1)  $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a);$

2)  $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a);$

3) *je-li  $g(a) \neq 0$ , pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Důkaz:

$$\frac{(f \pm g)(x) - (f \pm g)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \pm \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a) \pm g'(a);$$

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} =$$

$$= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)g(a) + f(a)g'(a);$$

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} =$$

$$= \frac{1}{g(a)g(x)} \left[ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right]$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{1}{g(a)^2} [f'(a)g(a) - f(a)g'(a)].$$

**Poznámky.**

1) Podobně pro derivace funkcí (nejen v bodě).

2) Pro  $c \in \mathbb{R}$  je  $(cf)' = (c)'f + cf' = cf'$  („derivace násobku je násobek derivace“).

3) Zobrazení  $' : f \rightarrow f'$  je lineární.

4)  $(f_1 + f_2 + \dots + f_n)' = f_1' + f_2' + \dots + f_n',$

$(f_1 f_2 \dots f_n)' = f_1' f_2 \dots f_n + f_1 f_2' \dots f_n + \dots + f_1 f_2 \dots f_n'.$

**Příklady.**

1)  $(3x^2 + 2x + 7)' = 6x + 2.$

2)  $(x^2 e^x \sin x)' = 2x e^x \sin x + x^2 e^x \sin x + x^2 e^x \cos x.$

3)  $(\text{tg } x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$   
 $= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$

**Věta** (o derivaci složené funkce). *Má-li  $f$  vlastní derivaci v  $a$ ,  $g$  vlastní derivaci v  $f(a) = b$ , pak  $g \circ f$  má v  $a$  derivaci*

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a).$$

Důkaz: Označme  $f(x) = y$ . Funkce

$$t(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(b)}{y-b}, & y \neq b, \\ g'(b), & y = b, \end{cases}$$

je spojitá v  $b$ , v okolí  $b$  je  $g(y) - g(b) = t(y)(y - b)$ , platí

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} =$$

$$= \frac{g(y) - g(b)}{x - a} = \frac{t(y)(y - b)}{x - a} =$$

$$= t(y) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a (\Rightarrow y \rightarrow b)} g'(b) f'(a).$$

**Poznámky.**

1) Schematicky pro  $f(x) = y, g(y) = z: \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$

2)  $(f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)' = f_n' \dots f_2' f_1'.$

**Příklady.**

1)  $(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x.$

2)  $(e^{\cos x^3})' = e^{\cos x^3} \cdot (-\sin x^3) \cdot 3x^2.$

3)  $(f(ax))' = f'(ax) \cdot a.$

**Poznámka.** Obecnější vzorce pro  $a \in \mathbb{R}$  (na  $\mathbb{R}$ ):

$(e^{ax})' = a e^{ax}, (\sin ax)' = a \cos ax, (\cos ax)' = -a \sin ax.$

Derivací  $(f_{-1} \circ f)(x) = x$  dostaneme  $f'_{-1}(f(x)) \cdot f'(x) = 1.$

**Věta** (o derivaci inverzní funkce). *Je-li funkce  $f$  spojitá a ryze monotónní na intervalu  $I$  a existuje-li nenulová derivace funkce  $f$  v  $a \in I$ , pak*

$$f'_{-1}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Důkaz: Označme  $y = f(x)$ ,  $b = f(a)$ .  $f(I)$  je otevřený interval, existuje spojitá  $f_{-1}$  na  $f(I)$ .

$$\frac{f_{-1}(y) - f_{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} \xrightarrow{y \rightarrow b (\Leftrightarrow x \rightarrow a)} \frac{1}{f'(a)}.$$

**Poznámka.** Obvykle vycházíme z funkce, jejíž derivaci chceme spočítat, takže podmínky monotonie a nenulovosti derivace ověřujeme pro inverzní funkci.

**Příklad.**  $\ln x$  je inverzní k  $e^y$ , která je spojitá, rostoucí a má nenulovou derivaci. Pro  $x \in D(\ln) = (0, +\infty)$  je

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

**Věta.**

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad (\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (\operatorname{arccos} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

**Příklad.** Důkaz vzorce o derivaci  $x^a$  pro  $a \notin \mathbb{Q}$ :

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = a x^{a-1}.$$

**Definice.** Derivaci řádu  $n$  ( $n$ -tou derivaci) funkce  $f$  značíme  $f^{(n)}$  nebo  $\frac{d^n f}{dx^n}$  a definujeme rekurentně

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(n)} = (f^{(n-1)})' \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

**Příklad.** Pro  $f(x) = 1/x = x^{-1}$  dostáváme

$$f'(x) = (-1)x^{-2},$$

$$f''(x) = ((-1)x^{-2})' = (-1)(-2)x^{-3},$$

$$f'''(x) = ((-1)(-2)x^{-3})' = (-1)(-2)(-3)x^{-4},$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

**Poznámky.**

1) Derivace řádu  $n$  je lineární zobrazení, takže

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_k)^{(n)} = f_1^{(n)} + f_2^{(n)} + \dots + f_k^{(n)}.$$

2) Derivace součinu dvou funkcí se počítají následovně:

$$(fg)' = f'g + fg',$$

$$(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg'',$$

$$(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg''',$$

$$\vdots$$

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

## Aplikace derivací

### Geometrické aplikace

$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  ... směrnice sečny body  $[a, f(a)], [x, f(x)]$

$f'(a)$  ... směrnice tečny v  $[a, f(a)]$

tečna:  $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) = T_1(x)$$

směrový vektor tečny (kolmý k normále):  $(1, f'(a))$

normála:

$$x + f'(a)y = a + f'(a)f(a)$$

$$x = a, \quad \text{pro } f'(a) = 0,$$

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a) \quad \text{pro } f'(a) \neq 0.$$

**Příklad.** Určete tečnu a normálu grafu funkce  $f(x) = e^x$  v bodě  $[1, ?]$ .

$$f(1) = e, \quad f'(x) = e^x, \quad f'(1) = e$$

$$\text{tečna: } y = f(1) + f'(1)(x - 1) = e + e(x - 1) = ex$$

$$\text{normála: } y = e + e(x - 1) = -\frac{1}{e}x + (e + e^{-1})$$

### Věty o střední hodnotě

**Věta (Rolleova).** Necht pro funkci  $f$  platí

- (1) je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ ;
- (2) má derivaci v každém bodě intervalu  $(a, b)$ ;
- (3)  $f(a) = f(b)$ .

Pak  $f'(c) = 0$  pro některý bod  $c \in (a, b)$ .

Důkaz: pro konstantní je  $f' = 0$  na  $(a, b)$ ;

nekonstantní nabývá minima nebo maxima uvnitř  $\langle a, b \rangle$ ;

například pro maximum v bodě  $c \in (a, b)$ :

$$f'(c) = f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0,$$

$$f'(c) = f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

**Příklady.**

- 1) Funkce  $f(x) = x$  na  $\langle 0, 1 \rangle$ ,  $f(1) = 0$  nesplňuje (1).
- 2) Funkce  $f(x) = |x|$  na  $\langle -1, 1 \rangle$  nesplňuje (2).
- 3) Funkce  $f(x) = x$  na  $\langle 0, 1 \rangle$  nesplňuje (3).

**Věta (Lagrangeova, o přírůstku funkce).** Necht funkce  $f$  je spojitá na  $\langle a, b \rangle$  a má derivaci v každém bodě  $(a, b)$ . Pak existuje  $c \in (a, b)$  tak, že

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Důkaz: funkce  $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$  splňuje podmínky Rolleovy věty, existuje  $c \in (a, b)$ :

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Tvrzení.** Je-li funkce  $f$  spojitá v bodě  $a$  zprava a existuje-li  $f'(a+)$ , pak

$$f'_+(a) = f'(a+).$$

Důkaz: podle Lagrangeovy věty pro  $x > a$  taková, že  $(a, x) \subset D(f)$ , existuje  $c_x \in (a, x)$ ; pro  $x \rightarrow a+$  je  $c_x \rightarrow a+$ ;

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a+} f'(c_x) = f'(a+)$$

**Poznámka.** Podobně pro derivaci zleva, oboustrannou.

**Příklad.** Pro  $f(x) = \arcsin x$  je

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \frac{1}{0+} \right| = +\infty.$$

**Věta (Cauchyova).** Necht funkce  $f, g$  jsou spojité na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , mají vlastní derivaci na  $(a, b)$  a  $g'(x) \neq 0$  na  $(a, b)$ . Pak existuje  $c \in (a, b)$  tak, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

**Důkaz:** funkce  $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$  splňuje podmínky Rolleovy věty, existuje  $c \in (a, b)$ :  
 $0 = h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c)$ ,  
 protože  $g'(x) \neq 0$  na intervalu  $(a, b)$ , je  $g'(c) \neq 0$  a také  $g(b) \neq g(a)$

### l'Hospitalovo pravidlo

**Věta (l'Hospitalovo pravidlo).** Necht pro funkce  $f, g$  platí:

(1)  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$  nebo  $\lim_{x \rightarrow a+} |g(x)| = +\infty$ ,

(2) existuje  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \bar{\mathbb{R}}$ .

Pak

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Důkaz:** pro  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$ :

$f', g'$  existují a  $g'(x) \neq 0$  na některém  $(a, b)$ , položíme  $f(a) = g(a) = 0$  (pak  $f, g$  jsou spojité na  $\langle a, b \rangle$ ); podle

Cauchyovy věty pro  $\langle a, x \rangle$  ( $x \in (a, b)$ ) existuje  $c_x \in (a, x)$ :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \xrightarrow[x \rightarrow a+]{c_x \rightarrow a+} \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

### Poznámky.

- Podobně pro limitu zleva či oboustrannou.
- l'Hospitalovo pravidlo lze použít opakovaně.

### Příklady.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left| \frac{0}{0} \right| \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left| \frac{+\infty}{+\infty} \right| \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{(1/2)x^{-1/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \left| \frac{+\infty}{+\infty} \right| \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \left| \frac{+\infty}{+\infty} \right| \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = |0 \cdot (-\infty)| = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \left| \frac{-\infty}{+\infty} \right| \stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x = \exp[\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + 1/x)] = \exp[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+1/x)}{1/x}] = \stackrel{l'H}{=} \exp[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/(1+1/x) \cdot (-1)/x^2}{-1/x^2}] = \exp[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+1/x}] = \exp 1 = e.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x) = |\infty - \infty| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{e^x} = -\infty.$$

**Poznámka.** Pokud limita podílu derivací neexistuje, nelze l'Hospitalovo pravidlo použít. To neznamená, že limita podílu funkcí neexistuje:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = \left| \frac{\text{omez.}}{+\infty} \right| = 0$ , ale limita podílu derivací  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{1}$  neexistuje.

**Poznámka.** l'Hospitalovo pravidlo lze použít i pro výpočet limit posloupností, pokud najdeme vhodnou funkci. Například  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^n/n = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x/x = +\infty$ .

### Taylorův polynom

**Věta (Taylorova).** Necht funkce  $f$  má spojité derivace do řádu  $n \geq 0$  na  $\langle a, x \rangle$ ,  $f^{(n+1)}$  existuje v každém bodě  $(a, x)$ . Pak existuje  $c \in (a, x)$  tak, že

$$f(x) = f(a) + \underbrace{\frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{T_n(x)} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

$T_n(x)$ : Taylorův polynom funkce  $f$  v bodě  $a$  řádu  $n$ , zbytek v Lagrangeově tvaru.

### Poznámky.

1) Podobně pro  $\langle x, a \rangle$ .

2)  $n = 0$ :  $f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$  (Lagrange).

3)  $f^{(n+1)}$  spojitá,  $x$  blízko  $a \dots c$  blízko  $a \dots f^{(n+1)}(c)$  blízko  $f^{(n+1)}(a) \dots T_{n+1}$  přesnějš

**Důkaz:**

$$\begin{aligned} T_n(a) &= f(a) \\ T'_n(a) &= f'(a) \\ &\vdots \\ T_n^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) \end{aligned}$$

$$f(x) = T_n(x) + M(x-a)^{n+1}$$

$$g(t) = f(t) - T_n(t) - M(t-a)^{n+1}, \quad t \in \langle a, x \rangle$$

Rolle  $(n+1)$ -krát:

$$\exists c_1 \in (a, x): \quad \begin{array}{ll} g(x) = 0 & g(a) = 0 \\ g'(c_1) = 0 & g'(a) = 0 \end{array}$$

$\vdots$

$$\begin{array}{ll} \exists c_n \in (a, c_{n-1}): & g^{(n)}(c_n) = 0 \quad g^{(n)}(a) = 0 \\ \exists c \in (a, c_n): & g^{(n+1)}(c) = 0 \end{array}$$

$$f^{(n+1)}(c) - 0 - M \cdot (n+1)! = 0$$

$$M = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

### Příklady.

$$e^x \sim 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

$$\cos x \sim 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

$$\sin x \sim x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

**Poznámka.** Taylorův polynom sudé (liché) funkce v 0 je funkce sudá (lichá).

**Příklad.** Spočítejte číslo  $e$  s přesností  $10^{-3}$ , víte-li, že  $e < 3$ .

$$f(x) = e^x, \quad a = 0, \quad e = f(1) \approx T_n(1)$$

$$\text{chyba } \left| \frac{e^c}{(n+1)!} 1^{n+1} \right| \leq \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3} \text{ pro } n \geq 6$$

$$T_6(1) = 2,718\ 0\bar{5}, \text{ chyba } 0,000\ 226\dots, \text{ odhad } 0,000\ 595\dots$$



## Asymptotické chování funkcí a posloupností

**Definice.** Necht funkce  $g$  je definována v prstencovém okolí bodu  $a \in \mathbb{R}$ .

1) Funkce  $f$  je třídy  $O(g)$  ( $f = O(g)$ ,  $f \in O(g)$ ) pro  $x \rightarrow a$ , pokud existuje číslo  $M$  a prstencové okolí  $P$  bodu  $a$  tak, že  $|f(x)| \leq M|g(x)|$  pro každé  $x \in P$ .

2) Funkce  $f$  je třídy  $\Theta(g)$  ( $f = \Theta(g)$ ,  $f \in \Theta(g)$ ) pro  $x \rightarrow a$ , pokud existují kladná čísla  $m, M$  a prstencové okolí  $P$  bodu  $a$  tak, že  $m \cdot g(x) \leq f(x) \leq M \cdot g(x)$  pro každé  $x \in P$ .

**Poznámka.** Podobně pro jednostranné limity (a okolí) a pro limity posloupností, obvykle  $x \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow 0+$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

**Věta.**

1) Je-li  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$ , pak  $f = O(g)$  pro  $x \rightarrow a$ .

2) Je-li  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, +\infty)$  a  $g$  je kladná na prstencovém okolí bodu  $a$ , pak  $f = \Theta(g)$  pro  $x \rightarrow a$ .

Důkaz: 1) Vlastní limita ... omezenost  $M$  na prstencovém okolí  $P$  bodu  $a$ , tj.  $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M$  na  $P$ .

2) Limita  $b$  ... existuje  $m \in (0, b)$ ,  $M \in (b, 0)$  a prstencové okolí  $P$  bodu  $a$  tak, že  $m \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M$  a  $g(x) > 0$  na  $P$ .

**Příklad.**  $f(x) = 2x^2 + 5x$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2 \in (0, +\infty)$ ,  $f = \Theta(x^2)$  pro  $x \rightarrow +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 5 \in (0, +\infty)$ ,  $f = \Theta(x)$  pro  $x \rightarrow 0$

**Věta.** Uvažujme  $x \rightarrow a$  pro  $a \in \bar{\mathbb{R}}$ ,  $g, g_1, g_2$  funkce na prstencovém okolí  $a$ .

1) Třída  $O(g)$  tvoří lineární prostor (je uzavřena na násobek a součet).

2) Je-li  $f_1 = O(g_1)$  a  $f_2 = O(g_2)$ , pak  $f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$ .

Důkaz:

1)  $f_1, f_2 = O(g)$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ; pro  $i \in \{1, 2\}$  existuje číslo  $M_i$  a prstencové okolí  $P_i$  bodu  $a$  tak, že  $|f_i(x)| \leq M_i |g(x)|$  na  $P_i$ ;  $|c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)| \leq |c_1| |f_1(x)| + |c_2| |f_2(x)| \leq (|c_1| M_1 + |c_2| M_2) |g(x)|$  na  $P_1 \cap P_2$ .

2) Pro  $i \in \{1, 2\}$  existuje číslo  $M_i$  a prstencové okolí  $P_i$  bodu  $a$  tak, že  $|f_i(x)| \leq M_i |g_i(x)|$  na  $P_i$ ;  $|f_1(x) f_2(x)| \leq M_1 M_2 |g_1(x) g_2(x)|$  na  $P_1 \cap P_2$ .

**Příklad.**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (1 - \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (1 - (1 - \frac{1}{2} x^2 + O(x^3))) =$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (\frac{1}{2} x^2 + O(x^3)) = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{2} + O(x)) = \frac{1}{2}$ .

**Poznámka.**

$\ln n < n^a < a^n < n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} < n^n$  ( $a > 1$ ).

### Průběh funkce

## Monotonie a extrém

**Věta** (o monotonii). Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $I$  a má-li v každém vnitřním bodě  $I$  derivaci, pak:

1) Je-li  $f'(x) > 0$  uvnitř  $I$ , pak  $f$  je rostoucí v  $I$ .

2) Je-li  $f'(x) < 0$  uvnitř  $I$ , pak  $f$  je klesající v  $I$ .

3) Je-li  $f'(x) \geq 0$  uvnitř  $I$ , pak  $f$  je neklesající v  $I$ .

4) Je-li  $f'(x) \leq 0$  uvnitř  $I$ , pak  $f$  je nerostoucí v  $I$ .

Důkaz:  $x, y \in I$ ,  $x < y$

Lagrange:  $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$ ,  $c \in (x, y)$

1)  $f(x) - f(y) < 0 \dots f(x) < f(y) \dots$  rostoucí

2)–4) podobně

**Poznámky.**

1) Je-li  $f' = 0$  na intervalu, pak  $f$  je konstantní.

2) Je-li  $f' = g'$  na intervalu, pak  $f, g$  se liší o konstantu.

**Příklad.**  $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$

$f' > 0$  na  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \dots f$  rostoucí na  $(-\infty, -1)$ ,  $(1, +\infty)$

$f' < 0$  na  $(-1, 1) \dots f$  klesající na  $(-1, 1)$

**Příklad.**  $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f' > 0$  na  $(-\infty, 0), (0, +\infty)$

$\dots f$  rostoucí na  $(-\infty, 0), (0, +\infty) \dots$  rostoucí na  $\mathbb{R}$

**Věta.** Je-li  $f'(a) > 0$ , pak existuje okolí  $U$  bodu  $a$  tak, že pro  $x, y \in U$ ,  $x < a < y$ , je  $f(x) < f(a) < f(y)$  ( $f$  je rostoucí v bodě  $a$ ).

Důkaz:

$0 < f'(a) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, & f(x) < f(a) \text{ vlevo} \\ \lim_{y \rightarrow a+} \frac{f(y) - f(a)}{y - a}, & f(y) > f(a) \text{ vpravo} \end{cases}$

**Poznámky.**

1)  $f'(a) < 0 \dots f$  je klesající v bodě  $a$ .

2) Pro  $f'(a) = 0$  se nic netvrdí.

**Definice.** Funkce  $f$  má v bodě  $a$  lokální minimum (lokální maximum), jestliže  $f(x) \geq f(a)$  ( $f(x) \leq f(a)$ ) na některém prstencovém okolí bodu  $a$ .

**Poznámky.**

1) Lokální extrém: lok. minimum nebo lok. maximum.

2) Ostrý lokální extrém: ostrá nerovnost.

**Věta.** Má-li funkce  $f$  v bodě  $a$  lokální extrém, pak buď  $f'(a)$  neexistuje nebo  $f'(a) = 0$  ( $a$  je stacionární bod  $f$ ).

Důkaz:  $f'(a) > 0 \dots f$  rostoucí v  $a \dots$  není lokální extrém  
 $f'(a) < 0 \dots f$  klesající v  $a \dots$  není lokální extrém

**Příklad.**  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  (viz dříve)

$f'(x) = 3x^2 - 3$ , existuje všude, nulová v  $\pm 1$

$f(-1) = 3 \dots$  ostré lokální maximum

$f(1) = -1 \dots$  ostré lokální minimum

**Příklad.**  $f(x) = |x|$

$f'(x) = \text{sign } x$  pro  $x \neq 0$ ,  $f'(0)$  neexistuje

$f(0) = 0$  ostré lokální minimum

**Příklad.**  $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$  existuje všude, nulová v  $0$

$f(0) = 0$  není lokální extrém

**Věta.** Necht  $f'(a) = 0$ .

1) Je-li  $f''(a) > 0$ , pak  $f$  má v  $a$  ostré lokální minimum.

2) Je-li  $f''(a) < 0$ , pak  $f$  má v  $a$  ostré lokální maximum.

Důkaz: 1)  $f''(a) > 0 \dots f'$  rostoucí v  $a \dots f'(x) < f'(a) = 0 < f'(y)$  pro  $x < a < y$  v některém okolí  $\dots f$  klesající vlevo, rostoucí vpravo  $\dots$  v  $a$  ostré lok. minimum  
 2) podobně nebo přechodem k  $-f$

**Příklad.**  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  (viz dříve)  
 $f'(x) = 3x^2 - 3, x_{1,2} = \pm 1, f''(x) = 6x$   
 $f''(-1) = -6 < 0 \dots$  ostré lokální maximum  
 $f''(1) = 6 > 0 \dots$  ostré lokální minimum

**Příklad.**  $f(x) = x^3$   
 $f'(x) = 3x^2, x_{1,2} = 0, f''(x) = 6x$   
 $f''(0) = 0 \dots$  kritérium nerozhodne, není l. e.

**Příklad.**  $f(x) = x^4$   
 $f'(x) = 4x^3, x_{1,2,3} = 0, f(0) = 0$  ostré lok. minimum  
 $f''(x) = 12x^2, f''(0) = 0 \dots$  kritérium nerozhodne, je l. e.  
 $f^{(3)}(x) = 24x, f^{(3)}(0) = 0$   
 $f^{(4)}(x) = 24, f^{(4)}(0) = 24 > 0$

**Poznámka.** Pro  $f'(a) = \dots = f^{(2n-1)}(a) = 0$ :

- 1)  $f^{(2n)}(a) > 0 \dots$  ostré lokální minimum,
- 2)  $f^{(2n)}(a) < 0 \dots$  ostré lokální maximum.

**Věta.** Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá maxima (minima) buď v bodě, ve kterém má lokální maximum (minimum), nebo v některém krajním bodě intervalu.

Důkaz: Extrém ve vnitřním bodě je lokální.

**Poznámka.** Porovnáváme hodnoty v bodech, kde derivace není nebo je nulová, v krajních bodech intervalu, které do něj patří. Ověříme limity v nepatřících krajních bodech.

**Příklad.**  $f(x) = x^2 + 2x$  na  $\langle -2, +\infty \rangle$ .  $f'(x) = 2x + 2$ , nemá derivaci:  $\emptyset$ ,  
 stacionární body:  $-1, f(-1) = -1$ ,  
 patřící krajní body:  $-2, f(-2) = 0$ ,  
 nepatřící krajní body:  $+\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  
 $\min f = f(-1) = -1, \max f$  neexistuje.

### Konvexita, konkavita, inflexní body

Konvexita: 1) spojnice grafu nad grafem, 2) tečna pod grafem, 3) směrnice sečen rostou.

**Definice.** Funkce  $f$  je konvexní na intervalu  $I$ , jestliže pro každé  $x, y, z \in I, x < y < z$ , platí

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

(konkávni pro  $\geq$ , ryze konv. pro  $<$ , ryze konk. pro  $>$ ).

**Věta.** Je-li  $f$  spojitá na intervalu  $I$  a má-li v každém vnitřním bodě  $I$  druhou derivaci, pak:

- 1) Je-li  $f''(x) \geq 0$  uvnitř  $I$ , pak  $f$  je konvexní.
- 2) Je-li  $f''(x) \leq 0$  uvnitř  $I$ , pak  $f$  je konkávni.

Důkaz: 1)  $x < y < z$ :  $f'$  je neklesající, Lagrange  $\dots$  existují  $c \in (x, y), d \in (y, z)$ :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \leq f'(d) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

**Poznámka.** Podobně pro ostré nerovnosti s „ryze“.

**Definice.** Bod  $[a, f(a)]$  je inflexním bodem grafu funkce  $f$  (funkce  $f$  má v bodě  $a$  inflexi), pokud je funkce  $f$  spojitá v bodě  $a$ , existuje  $f'(a)$  a funkce  $f$  je na některém jednostranném okolí  $a$  ryze konvexní a na některém jednostranném okolí  $a$  ryze konkávni.

**Věta.**

- 1) Má-li  $f$  v  $a$  inflexi, pak  $f''(a)$  neexistuje nebo  $f''(a) = 0$ .
- 2) Je-li  $f''(a) = 0, f'''(a) \neq 0$ , pak  $f$  má v  $a$  inflexi.

**Poznámka.**  $f''(a) = \dots = f^{(2n)}(a) = 0, f^{(2n+1)}(a) \neq 0 \dots$  inflexe v  $a$ .

**Příklad.**  $f(x) = x^3 - 3x + 1$   
 $f'(x) = 3x^2 - 3, f''(x) = 6x, x_1 = 0$   
 $f'''(x) = 6, f'''(0) \neq 0 \dots$  0 je inflexní bod  
 nebo:  $f'' < 0$  pro  $x < 0, f'' > 0$  pro  $x > 0$

### Asymptoty

$$f(x) \sim px + q$$

**Definice.** Má-li funkce  $f$  v bodě  $a \in \mathbb{R}$  alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, nazýváme přímkou o rovnici  $x = a$  asymptotou grafu funkce  $f$  v bodě  $a$ . Asymptota grafu funkce  $f$  v bodě  $a \in \{\pm\infty\}$  je přímka o rovnici  $y = px + q$  taková, že:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - px - q) = 0.$$

**Příklad.**  $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}x, D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\lim_{x \rightarrow 1 \pm} f(x) = \pm\infty \dots x = 1$  je asymptota v 1

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - \frac{1}{2}x) = 0 \dots y = \frac{1}{2}x$  je asymptota v  $\pm\infty$

**Věta.** Graf funkce  $f$  má v  $a \in \{\pm\infty\}$  asymptotu o rovnici  $y = px + q$  právě tehdy, když

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = p, \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - px) = q.$$

**Příklad.**  $f(x) = x \sin x$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$  neex.  $\dots$  as. v  $+\infty$  neex.

**Příklad.**  $f(x) = x^2$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x = \lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty \dots$  as. v  $+\infty$  neex.

**Příklad.**  $f(x) = \ln x$

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)/x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$  (l'H)

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x - 0 \cdot x) = +\infty \dots$  as. v  $+\infty$  neex.

**Příklad.**  $f(x) = x + |x| + 1 + \frac{1}{x-1}, D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\lim_{x \rightarrow 1 \pm} f(x) = \pm\infty \dots$  asymptota  $x = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 1$

$\dots$  asymptota  $y = 2x + 1$  v  $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

$\dots$  asymptota  $y = 1$  v  $-\infty$

**Poznámky.**

1) Je-li  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R}$  pro  $a \in \{\pm\infty\}$ , pak asymptota v  $a$  má rovnici  $y = b$ .

2) Existují-li asymptota v  $a \in \{\pm\infty\}$  o rovnici  $y = px + q$  a  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ , pak  $p = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ .

**Příklad.**  $f(x) = \frac{1}{x} \sin x^2$   
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \dots$  asymptota  $y = 0$  v  $\pm\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{x^2} \sin x^2 + 2 \cos x^2\right) \dots$  neex.

### Shrnutí vyšetřování průběhu funkce

$f$ : definiční obor, sudost, lichost, perioda, spojitost, limity v hraničních bodech  $D(f)$ , v bodech nespojitosti, asymptoty.  
 $f'$ : monotonie, (lokální) extrém, obor hodnot, tečny grafu v hraničních bodech  $D(f)$ ,  $D(f')$ .  
 $f''$ : konvexita/konkavita, inflexní body (včetně tečen).  
 Graf.

**Příklad.**  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3|x|$

**Příklad.**  $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}$

### Neurčitý integrál

**Definice.** Funkce  $F$  se nazývá *primitivní funkce* k funkci  $f$  na intervalu  $I$ , jestliže  $F' = f$  na  $I$ .

#### Poznámky.

- 1) V krajních bodech jednostranné derivace.
- 2) Lze zobecnit: na sjednocení intervalů;  $F' = f$  až na konečnou (či jinou) množinu.
- 3) Ne všechny funkce mají primitivní.

**Věta** (vlastnost mezihodnoty pro derivaci). *Nechť  $f$  je derivací  $F$  na intervalu  $I$ ,  $a, b \in I$ ,  $f(a) < d < f(b)$ . Pak existuje  $c$  mezi  $a, b$  takové, že  $f(c) = d$ .*

**Důkaz:**  $G(x) = F(x) - dx$  má vlastní derivaci  $\dots$  je spojitá  $\dots$  nabývá minima v  $c \dots G'_{(\pm)}(a) < 0 < G'_{(\pm)}(b)$ , tj.  $c$  mezi  $a, b \dots G'(c) = 0 \dots f(c) = d$ .

**Příklad.**  $\text{sign } x$  není derivací žádné funkce.

**Věta.** *Spojitá funkce na intervalu má primitivní funkci.*

**Poznámka.** Primitivní funkce k  $e^{-x^2}$  existuje, ale nelze ji vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

#### Věta.

- 1) *Je-li  $F$  primitivní funkce k  $f$  na  $I$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , pak  $F + c$  je primitivní funkce k  $f$  na  $I$ .*
- 2) *Jsou-li  $F_1, F_2$  primitivní funkce k  $f$  na  $I$ , pak  $F_1 - F_2$  je konstantní na  $I$ .*

**Důkaz:**

- 1)  $(F + c)' = F' + 0 = F' = f$
- 2)  $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0 \dots F_1 - F_2$  konst. na  $I$

**Příklad.** Na disjunktních intervalech mohou být konstanty různé, např. pro  $f(x) = \text{sign } x, x \neq 0$ :

$$F(x) = \begin{cases} -x + c_1, & x < 0, \\ x + c_2, & x > 0. \end{cases}$$

**Definice.** Množinu všech primitivních funkcí k funkci  $f$  na intervalu  $I$  nazýváme *neurčitým integrálem*  $f$  na  $I$  (pokud je neprázdná).

$$\int f = \int f(x) dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\} = F + c.$$

Tabulkové integrály:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad \text{intervaly } D(x^a) \ (a \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c, \quad x \in (-\infty, 0), \ x \in (0, +\infty)$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c, \quad x \in \mathbb{R} \ (a \neq 0)$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c, \quad x \in \mathbb{R} \ (a \neq 0)$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + c, \quad x \in \mathbb{R} \ (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \text{arctg } x + c, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arcsin } x + c, \quad x \in (-1, 1)$$

#### Příklady.

- 1)  $\int x^6 dx = \frac{1}{7} x^7 + c, x \in \mathbb{R}$ .
- 2)  $\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + c, x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty)$ .
- 3)  $\int \sqrt[4]{x} dx = \frac{4}{5} x \sqrt[4]{x} + c, x \in (0, +\infty)$ .
- 4)  $\int \sqrt[5]{x} dx = \frac{5}{6} x \sqrt[5]{x} + c, x \in \mathbb{R}$ .

**Věta** (linearita). *Jsou-li  $F_1, \dots, F_n$  primitivní funkce k  $f_1, \dots, f_n$  na  $I$ ,  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ , pak  $c_1 F_1 + \dots + c_n F_n$  je primitivní funkce k  $c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$  na  $I$ .*

**Důkaz:**

$$(c_1 F_1 + \dots + c_n F_n)' = c_1 F_1' + \dots + c_n F_n' = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$$

#### Příklad.

$$\int \frac{(x+3)^2}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 + 6x + 9 \ln |x| + c, x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty)$$

**Věta** (integrace per partes). *Nechť na intervalu  $I$  existují  $u', v', \int u'v$ . Pak*

$$\int uv' = uv - \int u'v \text{ na } I.$$

**Důkaz:**  $(uv - \int u'v)' = u'v + uv' - u'v = uv'$ .

**Příklad.**  $\int (x+1) \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x+1 & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{array} \right| =$   
 $= -(x+1) \cos x - \int -\cos x dx = -(x+1) \cos x + \sin x + c,$   
 $x \in \mathbb{R}$

**Příklad.**  $\int x^2 e^{2x} dx = \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4}\right) e^{2x} + c, x \in \mathbb{R}$

**Poznámka.** Podobně  $P(x) e^{ax}, P(x) \sin ax, P(x) \cos ax$  ( $P$  polynom,  $a \neq 0$ ).

**Příklad.**  $I = \int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^x & v' = \sin x \\ u' = e^x & v = -\cos x \end{array} \right| =$   
 $= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^x & v' = \cos x \\ u' = e^x & v = \sin x \end{array} \right| =$   
 $= -e^x \cos x + e^x \sin x - I$   
 $I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c, x \in \mathbb{R}$

**Poznámka.** Podobně  $e^{ax} \sin bx$ ,  $e^{ax} \cos bx$  ( $a, b \neq 0$ ).

**Příklad.**  $\int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + c$ ,  $x \in (0, +\infty)$

**Příklad.**  $\int \ln x \, dx = \int \ln x \cdot 1 \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} \quad v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int 1 \, dx = x(\ln x - 1) + c$ ,  $x \in (0, \infty)$

**Poznámka.** Podobně  $x^a \ln x$  ( $a \neq -1$ ).

**Věta (substituce).** Necht  $(\alpha, \beta) \xrightarrow{\varphi} (a, b) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ ,  $\varphi'$  existuje na  $(\alpha, \beta)$ ,  $F(x)$  je primitivní funkce k  $f(x)$  na  $(a, b)$ .

1)  $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt = F(\varphi(t)) + c$  na  $(\alpha, \beta)$ .

2) Je-li  $\varphi: (\alpha, \beta) \xrightarrow{na} (a, b)$  prostá a  $G$  je primitivní funkce k  $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$  na  $(\alpha, \beta)$ , pak

$$\int f(x) \, dx = G(\varphi_{-1}(x)) + c \text{ na } (a, b).$$

Důkaz: 1)  $\frac{d}{dt} F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ .

2)  $G(t)$  i  $F(\varphi(t))$  jsou primitivní k  $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \dots G(t) = F(\varphi(t)) + c$ ; existuje  $\varphi_{-1}(x) \dots G(\varphi_{-1}(x)) = F(x) + c$  je primitivní k  $f$ .

Používáme (v obou směrech) zápis:

$$\int f(x) \, dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) \, dt \end{array} \right| = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt$$

**Příklady.**

1)  $\int \sin^3 t \cdot \cos t \, dt = \left| \begin{array}{l} \sin t = x \\ \cos t \, dt = dx \end{array} \right| = \int x^3 \, dx = \frac{1}{4} x^4 + c = \frac{1}{4} \sin^4 t + c$ ,  $x \in \mathbb{R}$

2)  $\int x e^{-x^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} -x^2 = t \\ x \, dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \dots = -\frac{1}{2} e^t + c$ ,  $x \in \mathbb{R}$

3)  $\int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} \, dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \ln^2 x + c$ ,  $x \in (0, +\infty)$

**Příklady.**

1)  $\int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} x = e^t \\ dx = e^t \, dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \ln^2 x + c$ ,  $x \in (0, +\infty)$

2)  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t \, dt \end{array} \right| = \int dt = t + c = \arcsin x + c$ ,  $x \in (-1, 1)$ ,  $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

**Poznámky.**

1)  $\int f(ax+b) \, dx = \left| \begin{array}{l} ax+b = t \\ a \, dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$  ( $a \neq 0$ ).

2)  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \left| \begin{array}{l} f(x) = t \\ f'(x) \, dx = dt \end{array} \right| = \ln |f(x)| + c$ .

**Příklady.**

1)  $\int (x+1)^4 \, dx = \frac{1}{5} (x+1)^5 + c$ ,  $x \in \mathbb{R}$

2)  $\int \frac{1}{(3x-1)^2} \, dx = \frac{-1}{3(3x-1)}$ ,  $x \in (-\infty, \frac{1}{3})$ ,  $x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$

3)  $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + c$ ,  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

4)  $\int \frac{x-2}{x^2-4x+5} \, dx = \frac{1}{2} \ln(x^2-4x+5) + c$ ,  $x \in \mathbb{R}$

5)  $\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c$ ,  $x \in \mathbb{R}$

## Integrace racionálních funkcí

### Rozklad racionální funkce

**Definice.** Racionální (lomená) funkce je podíl dvou polynomů  $\frac{P}{Q}$ , kde  $Q$  je nenulový. Ryze lomená funkce je podíl dvou polynomů  $\frac{P}{Q}$ , kde  $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$  ( $\operatorname{st} 0 = -1$ ). Parciální zlomky jsou funkce ve tvaru

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, \quad A, B, a, p, q \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

kde  $(x^2+px+q)$  nemá reálný kořen, tj.  $p^2-4q < 0$ .

**Poznámka.** V  $\mathbb{C}$  jen první typ parciálních zlomků.

**Věta.** Nenulový polynom lze (jednoznačně) napsat ve tvaru

$$a(x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_r)^{k_r} (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

kde  $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s \in \mathbb{N}$ ,

$a, a_1, \dots, a_r, p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s \in \mathbb{R}$ ,

$a_1, \dots, a_r$  jsou různé reálné kořeny,

$x^2+p_ix+q_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) jsou různé a nemají reálné kořeny.

**Věta.** Racionální funkce se dá (jednoznačně) rozložit na součet polynomu a parciálních zlomků. Jmenovatelé těchto zlomků dělí jmenovatel dané racionální funkce.

Důkaz: (částečný) Dělením polynomů dostaneme součet polynomu a ryze lomené funkce  $P_1+L_1$ . Pro jiný zápis  $P_2+L_2$  je  $P_1-P_2=L_2-L_1$  polynom i ryze lomená funkce, tj. nulová funkce a tedy  $P_2=P_1$ ,  $L_2=L_1$ . Pro ryze lomenou funkci  $P/Q$  a  $k$ -násobný kořen  $a$  polynomu  $Q$  ( $k > 0$ ) je  $Q(x) = (x-a)^k Q_2(x)$  pro některý polynom  $Q_2$  s  $Q_2(a) \neq 0$ .

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{\frac{P(a)}{Q(a)}}{(x-a)^k} = \frac{P(x) - \frac{P(a)}{Q(a)} Q_2(x)}{(x-a)^k Q_2(x)}.$$

Čitatel má za kořen  $a$ , je tedy roven  $(x-a)P_2(x)$ ,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{\frac{P(a)}{Q(a)}}{(x-a)^k} = \frac{P_2(x)}{(x-a)^{k-1} Q_2(x)}.$$

Snížili jsme stupeň jmenovatele, pokračujeme dokud je  $a$  kořen jmenovatele a pak pro další kořeny.

Postup:

1) Dělení (polynom + ryze lomená funkce).

2) Rozklad jmenovatele na součin kořenových činitelů a ireducibilních kvadratických polynomů.

3) Rozpis na parciální zlomky s „neurčitými koeficienty“.

4) Určení koeficientů (soustava lineárních rovnic, zakrývací pravidlo).

**Příklad.**  $\frac{2x^2+x-24}{x^2-2x-8} = 2 + \frac{2}{x-4} + \frac{3}{x+2}$ .

**Příklad.**  $\frac{-2x+5}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x+2}$ .

### Integrace parciálních zlomků

1) Mocnina lineárního polynomu ve jmenovateli:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \left| \begin{array}{l} x-a = t \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^n}$$

2) Mocnina kvadratického polynomu ve jmenovateli:

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x + p) + (B - \frac{Ap}{2})}{(x^2 + px + q)^n} dx$$

2a) V čitateli derivace kvadratického polynomu:

$$\int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 + px + q = t \\ (2x + p) dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^n}$$

2b) V čitateli konstanta: převedeme na  $\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = I_n$ .

Pro  $n > 1$  upravíme

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^n} = \int \frac{t^2 + 1 - t^2}{(t^2 + 1)^n} dt = I_{n-1} + \int \frac{-t^2 dt}{(t^2 + 1)^n} \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = t & v' = \frac{-t}{(t^2+1)^n} \\ u' = 1 & v = \frac{1}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} \end{array} \right| = \\ &= I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}, \end{aligned}$$

dostaneme rekurentní vzorec:

$$I_n = \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$I_1 = \arctg t + c.$$

**Příklad.**  $\int \frac{5}{x^2-2x+5} dx = 5 \int \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \frac{5}{4} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{4}\right)^2+1} =$   
 $= \left| \frac{x-1}{2} = t \right| = \frac{5}{2} \int \frac{dt}{t^2+1}.$

**Příklad.**  $\int \frac{2}{(x^2-6x+10)^2} dx = \int \frac{2}{((x-3)^2+1)^2} dx =$   
 $= \left| x-3 = t \right| = 2I_2 = \frac{t}{t^2+1} + I_1 = \frac{t}{t^2+1} + \arctg t + c =$   
 $= \frac{x-3}{x^2-6x+10} + \arctg(x-3) + c, \quad x \in \mathbb{R}.$

### Integrace dalších typů funkcí

1)  $\int R(e^{ax}) dx = \left| \begin{array}{l} e^{ax} = t \\ x = \frac{1}{a} \ln t \\ dx = \frac{1}{at} dt \end{array} \right| = \int R(t) \frac{1}{at} dt$   
 $x \in \mathbb{R} \leftrightarrow t \in (0, +\infty) \quad (a \neq 0)$

**Příklad.**  $\int \frac{e^{4x}+2e^{2x}+3}{e^{4x}-1} dx = \left| e^{2x} = t \right| = \int \frac{t^2+2t+3}{2t(t^2-1)} dt,$   
 $\int \frac{e^{4x}+2e^{2x}+3}{e^{4x}-1} dx = \left| e^x = t \right| = \int \frac{t^4+2t^2+3}{t(t^4-1)} dt.$

2)  $\int \frac{R(\ln x)}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right| = \int R(t) dt$

**Příklad.**  $\int \frac{2}{x(\ln^2+4)} dx = \left| \ln x = t \right| = \int \frac{2}{t^2+4} dt.$

3)  $\int R(\sin x, \cos x) dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \\ x = 2 \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2}{t^2+1} dt \end{array} \right|$   
 $x \in (-\pi, \pi) \leftrightarrow t \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}$$

Někdy nutno spojovat přes sousední intervaly.

**Příklad.**  $\int \frac{2}{5-3 \cos x} dx = \int \frac{2}{4t^2+1} = \operatorname{arctg}(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}) + c + k\pi$   
 pro  $x \in (-\pi, \pi) + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ , limity v  $\pi + 2k\pi$ .

3a) „sudé mocniny“ ( $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ ):

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x) dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = y \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{1}{t^2+1} dt \end{array} \right|$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \leftrightarrow t \in \mathbb{R}$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{t^2}{t^2 + 1}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{t^2 + 1}$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{t}{t^2 + 1}$$

3b) „lichá“ v sin nebo v cos:

$$\int R(\sin^2 x, \cos x) \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right|$$

$$\int R(\sin x, \cos^2 x) \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \\ \cos^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right|$$

**Příklad.**  $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \left| \sin x = t \right| = \int \frac{dt}{(1-t^2)^2}.$

3c)  $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$ : pro liché  $m$  či  $n$  viz 3b); pro sudá  $m, n$  přechod k dvojnásobnému argumentu

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

**Příklad.**  $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x dx = \left| \cos x = t \right| = \int (t^6 - t^4) dt.$

**Příklad.**  $\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x\right) dx =$   
 $= \int \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x\right) dx.$

4)  $n > 1, ad - bc \neq 0$ :

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \\ x = R_1(t) \\ dx = R'_1(t) dt \end{array} \right|$$

**Příklad.**  $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx = \int \frac{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} dx =$   
 $= \left| \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t \right| = \int \frac{1-t}{1+t} \cdot \frac{4t}{(t^2-1)^2} dt.$

5)  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, a \neq 0$ : vytknutím  $a$ , doplněním na čtverec a lineární substitucí upravíme na integrál ve tvaru  $\int R(x, \sqrt{\pm x^2 \pm a^2}) dx, a > 0$ . Lze použít goniometrické, Eulerovy nebo hyperbolické substituce.

5a)  $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx, x \in (-a, a)$ :

- $x = a \sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$ ;
- upravíme  $\sqrt{a^2 - x^2} = (a+x)\sqrt{(a-x)/(a+x)}$  a použijeme substituci pro typ 4 (Eulerova substituce).

**Příklad.**  $\int \sqrt{4-x^2} dx = \left| x = 2 \sin t \right| = \int 4 \cos^2 t dt =$   
 $= 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + c, \quad x \in (-2, 2).$

5b)  $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx, x \in (-\infty, -a), x \in (a, +\infty)$ :

- $x = a/(\sin t)$ ;
- $\sqrt{x^2 - a^2} + x = t$  (Eulerova substituce);
- $x = a \cosh t, \sqrt{x^2 + a^2} = a|\sinh t|$ .

**Příklad.**  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = |\sqrt{x^2 - 1} + x = t| = \int \frac{dt}{t}$ .

5c)  $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx, x \in \mathbb{R}$ :

- $x = a \operatorname{tg} t$ ;
- $\sqrt{x^2 + a^2} + x = t$ , (Eulerova substituce);
- $x = a \sinh t, \sqrt{x^2 + a^2} = a \cosh t$ .

**Příklad.**

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 + 4}} = \int \frac{dt}{t}$ .

### Určitý integrál

**Definice.** Dělení intervalu  $\langle a, b \rangle$  je konečná množina  $D \subset \langle a, b \rangle$  obsahující  $a, b$ .

Značíme  $D = \{x_0, \dots, x_n\}, a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

**Definice.** Pro omezenou funkci  $f$  na  $\langle a, b \rangle$  a dělení  $D$  intervalu  $\langle a, b \rangle$  zavádíme *dolní* a *horní integrální součet*:

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^n \inf f(\langle x_{i-1}, x_i \rangle) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$\bar{S}(f, D) = \sum_{i=1}^n \sup f(\langle x_{i-1}, x_i \rangle) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Přidáme-li k dělení další bod, dolní součet se nezmenší a horní se nezvětší. Pro libovolná dělení  $D_1, D_2$  dostaneme:

$$\underline{S}(f, D_1) \leq \underline{S}(f, D_1 \cup D_2) \leq \bar{S}(f, D_1 \cup D_2) \leq \bar{S}(f, D_2).$$

Každý dolní součet je menší nebo roven každému hornímu součtu, supremum dolních integrálních součtů je menší nebo rovno infimu horních integrálních součtů.

**Definice.** Je-li pro omezenou funkci  $f$  na  $\langle a, b \rangle$  supremum dolních integrálních součtů rovno infimu horních integrálních součtů, nazýváme tuto hodnotu *určitý (Riemannův) integrál* funkce  $f$  na  $\langle a, b \rangle$ . Čísla  $a, b$  se nazývají *dolní a horní mez integrálu*.

Značení:  $\int_a^b f, \int_a^b f(x) dx, (R)\text{-}\int_a^b f, (R)\text{-}\int_a^b f(x) dx$ .

**Poznámka.** Pro  $n(D) = \max\{x_i - x_{i-1} : i \in \{1, \dots, n\}\}$

$$\lim_{n(D) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}), \quad c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle.$$

**Věta.** Pro omezenou funkci  $f$  na  $\langle a, b \rangle$  existuje  $\int_a^b f$  právě tehdy, když existuje posloupnost  $(D_n)_{n=1}^\infty$  dělení  $\langle a, b \rangle$  taková, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}(f, D_n).$$

V takovém případě je integrál roven těmito limitám.

Důkaz:  $\Rightarrow$ : existují  $(D'_n)_{n=1}^\infty, (D''_n)_{n=1}^\infty$ :  
 $\underline{S}(f, D'_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f, \bar{S}(f, D''_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f$ ,  
 $\underline{S}(f, D'_n) \leq \underline{S}(f, D'_n \cup D''_n) \leq \bar{S}(f, D'_n \cup D''_n) \leq \bar{S}(f, D''_n)$ ,  
 $(D'_n \cup D''_n)_{n=1}^\infty$  je hledaná posloupnost dělení.  
 $\Leftarrow$ :  $\sup_D \underline{S}(f, D) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n) =$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n) \geq \inf_D \bar{S}(f, D) \geq \sup_D \underline{S}(f, D)$ ,  
 $\dots$  všude rovnosti.

**Příklad.**  $\int_a^b c dx = c(b - a)$

$$\underline{S}(c, D_n) = \bar{S}(c, D_n) = \sum_{i=1}^n c(x_i - x_{i-1}) = c(b - a).$$

**Příklad.**  $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ :

$$D_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\},$$

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n^2 - n}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2},$$

$$\bar{S}(f, D_n) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n^2 + n}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

**Příklad.**  $\int_0^2 \operatorname{sign} x dx = 2$ :

$$D_n = \{0, \frac{1}{n}, 2\}, \underline{S}(f, D_n) = 2 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2, \bar{S}(f, D_n) = 2.$$

**Poznámka.** Hodnota integrálu nezávisí na hodnotách funkce v konečně mnoha bodech.

**Poznámka.** Lebesgueův integrál – dělení v oboru hodnot:

$$\sum_i d_i \cdot \lambda(f^{-1}(\langle y_{i-1}, y_i \rangle)), \quad d_i \in \langle y_{i-1}, y_i \rangle.$$

Nezávisí na hodnotách funkce ve spočetně mnoha bodech.

**Příklad.**  $d(x) = 1$  pro  $x \in \mathbb{Q}$ , jinak 0.

$$(R)\text{-}\int_0^1 d(x) dx \text{ neex.}: \underline{S}(f, D) = 0, \bar{S}(f, D) = 1.$$

$$(L)\text{-}\int_0^1 d(x) dx = (L)\text{-}\int_0^1 0 dx = 0, \text{ nebo}$$

$$0 \cdot \lambda(\langle 0, 1 \rangle \setminus \mathbb{Q}) + 1 \cdot \lambda(\langle 0, 1 \rangle \cap \mathbb{Q}) = 0 \quad (\lambda(\mathbb{Q}) = 0).$$

**Věta.** Monotónní funkce na uzavřeném intervalu má určitý integrál.

Důkaz:  $D_n = \{a, a + \frac{b-a}{n}, \dots, b\}$  (ekvidistantní na  $n$  částí),  
 $\bar{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) = \frac{b-a}{n} \cdot |f(b) - f(a)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

**Věta.** Z každého pokrytí uzavřeného intervalu otevřenými lze vybrat konečné pokrytí.

Důkaz: Sporem. Střed intervalu je pokryt některým otevřeným intervalem, zůstanou nejvýše 2 nepokryté uzavřené intervaly, alespoň jeden se nedá pokrýt konečně mnoha danými intervaly, ten vezmeme a postup opakujeme. Dostaneme posloupnost  $(I_n)_{n=1}^\infty$  vněšených uzavřených intervalů, jejichž délky klesají k nule.  $\bigcap_{n=1}^\infty I_n = \{c\}$ ,  $c$  je pokryto některým otevřeným intervalem, který ale pokrývá všechny dostatečně krátké  $I_n$  – spor.

**Věta.** Je-li funkce  $f$  spojitá na uzavřeném intervalu  $I$ , pak pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  tak, že  $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$  pro  $y, z \in I$  taková, že  $|y - z| < \delta$  (stejnomořná spojitost).

Důkaz:  $\varepsilon > 0$ ;

$$\text{pro } x \in I \text{ ex. } \delta_x > 0: |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pro } y \in U(x, \delta_x) \cap I;$$

$$|f(y) - f(z)| < \varepsilon \text{ pro } y, z \in U(x, \delta_x) \cap I;$$

$\{U(x, \delta_x) : x \in I\}$  je pokrytí  $I$ , vezmeme konečné;

označme  $\delta$  nejmenší vzdálenost (různých) krajních bodů;

pro  $y, z \in I, 0 < z - y < \delta$  je  $\langle y, z \rangle$  nejvýše 1 krajní bod;

pokud 0, pak  $y$  je pokryto  $U(x, \delta_x) \ni z$ ;

pokud 1, pak je pokryt  $U(x, \delta_x) \ni y, z$ .

**Věta.** Spojitá funkce na uzavřeném intervalu má určitý integrál.

Důkaz:  $f$  na  $\langle a, b \rangle$ ;

pro  $\frac{1}{n}$  ex.  $\delta_n: |f(y) - f(z)| < \frac{1}{n}$  pro  $|y - z| < \delta_n, y, z \in \langle a, b \rangle$ ;  
ex.  $D_n$  s intervaly kratšími než  $\delta_n$ ;  
 $0 \leq \bar{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) < \frac{1}{n} (b - a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

**Věta.** Necht  $f, g$  jsou omezené na  $\langle a, b \rangle$ ,  $\int_a^b f, \int_a^b g$  existují,  $c \in \mathbb{R}$ . Pak:

1)  $\int_a^b cf = c \int_a^b f$ .

2)  $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ .

3) Je-li  $f \leq g$  na  $\langle a, b \rangle$ , pak  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ .

4)  $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ .

Důkaz:

1)  $c \geq 0$ :

$$\sup \underline{S}(cf, D) = \sup c \underline{S}(f, D) = c \sup \underline{S}(f, D) = c \int_a^b f,$$

$$\inf \bar{S}(cf, D) = \inf c \bar{S}(f, D) = c \inf \bar{S}(f, D) = c \int_a^b f;$$

$c < 0$ :

$$\sup \underline{S}(cf, D) = \sup c \bar{S}(f, D) = c \inf \bar{S}(f, D) = c \int_a^b f,$$

$$\inf \bar{S}(cf, D) = \inf c \underline{S}(f, D) = c \sup \underline{S}(f, D) = c \int_a^b f.$$

2)  $\sup/\inf$  int. součtů  $f, g$  jsou limity pro společ.  $(D_n)_{n=1}^\infty$ ;

$$\inf f(I) + \inf g(I) \leq (f + g)(x), \text{ pro } x \in I,$$

$$\inf f(I) + \inf g(I) \leq \inf (f + g)(I),$$

$$\underline{S}(f, D_n) + \underline{S}(g, D_n) \leq \underline{S}(f + g, D_n) \leq \bar{S}(f + g, D_n) \leq \bar{S}(f, D_n) + \bar{S}(g, D_n) \text{ (podobně), limita pro } n \rightarrow \infty.$$

3)  $\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(g, D), \sup \underline{S}(f, D) \leq \sup \underline{S}(g, D)$ .

4)  $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ ,

ex.  $(D_n)_{n=1}^\infty: \underline{S}(f, D_n), \bar{S}(f, D_n) \rightarrow \int_a^b f$ ,

$$0 \leq \bar{S}(f_+, D_n) - \underline{S}(f_+, D_n) \leq \bar{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$$\int_a^b f_+ \text{ ex., } \int_a^b f_- = \int_a^b (f_+ - f) \text{ ex., } \int_a^b |f| = \int_a^b (f_+ + f_-) \text{ ex.,}$$

$$-|f| \leq f \leq |f| \dots - \int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

**Příklad.**  $\int_0^1 (d(x) - \frac{1}{2}) dx$  neexistuje,  $\int_0^1 |d(x) - \frac{1}{2}| dx = \frac{1}{2}$ .

**Poznámka.** Omezené integrovatelné funkce na  $\langle a, b \rangle$  tvoří lineární prostor, zobrazení  $\int_a^b: f \mapsto \int_a^b f$  je lineární.

**Věta.** Necht  $a < b < c, f$  je omezená na  $\langle a, b \rangle$ . Pak  $\int_a^c f$  existuje právě tehdy, když existují  $\int_a^b f$  a  $\int_b^c f$ . V takovém případě  $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ .

Důkaz:  $D'$  dělení  $\langle a, b \rangle, D''$  dělení  $\langle b, c \rangle$ ,

$D = D' \cup D''$  je dělení  $\langle a, c \rangle$  obsahující  $b$ ,

$$\underline{S}(f, D') + \underline{S}(f, D'') = \underline{S}(f, D),$$

$$\bar{S}(f, D') + \bar{S}(f, D'') = \bar{S}(f, D),$$

suprema a infima dostaneme jako vhodné limity:

$$\sup_{D'} \underline{S}(f, D') + \sup_{D''} \underline{S}(f, D'') = \sup_D \underline{S}(f, D)$$

$$\inf_{D'} \bar{S}(f, D') + \inf_{D''} \bar{S}(f, D'') = \inf_D \bar{S}(f, D)$$

stejně sčítance pod sebou právě tehdy, když stejné součty.

**Definice.** Definujeme  $\int_a^a f = 0, \int_b^a f = -\int_a^b f$  pro  $a < b$ .

**Poznámka.** Rovnost v předešlé větě pro libovolná  $a, b, c$ .

**Poznámka.** Po částech spojitě funkce (konečně mnoho bodů nespojitosti s konečnými jednostrannými limitami) i po částech monotónní funkce jsou integrovatelné.

**Věta.** Necht  $f$  je omezená na  $\langle a, b \rangle, \int_a^b f$  existuje,  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  pro  $x \in \langle a, b \rangle$ . Pak

1)  $F$  je spojitá.

2)  $F'(x) = f(x)$  v bodech spojitosti funkce  $f$ .

Důkaz:  $F$  je definována (aditivita na definičním oboru)

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt,$$

1)  $|f| \leq M$  na  $\langle a, b \rangle$ ,

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq \text{sign } h \int_x^{x+h} |f(t)| dt \leq \text{sign } h \int_x^{x+h} M dt = M \cdot |h| \xrightarrow{h \rightarrow 0(\pm)} 0.$$

2)  $\left| \frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) - f(x) \right| =$

$$= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dt \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \leq$$

$(f$  spoj. v  $x$ : pro  $\varepsilon > 0$  je  $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$  na okolí  $x$ )

$$\leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varepsilon dt = \frac{1}{h} \cdot h\varepsilon = \varepsilon.$$

**Důsledek.** Funkce spojitá na intervalu má na tomto intervalu primitivní funkci.

Důkaz:  $a \in I, F(x) = \int_a^x f(t) dt$  (případně  $+F(a)$ ).

**Poznámka.** Derivace integrálu podle horní meze (pro  $f$  spojitou):  $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ .

**Poznámka.** Po částech spojitá  $f$ : jednostranné derivace  $F$  jsou rovny příslušným jednostranným limitám  $f$ .

**Příklad.**  $f(x) = \text{sign } x$ :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \int_0^x 1 dt = x, & x \geq 0 \\ \int_0^x -1 dt = -x, & x \leq 0 \end{cases} = |x|,$$

$$F'_-(0) = -1 = f(0-), F'_+(0) = 1 = f(0+).$$

**Věta** (Newtonova–Leibnizova formule). Necht  $f$  je omezená na  $\langle a, b \rangle, \int_a^b f$  existuje a  $F$  je primitivní funkce k  $f$  na  $\langle a, b \rangle$ . Pak

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b-) - F(a+).$$

Důkaz:  $|f| \leq M$  na  $\langle a, b \rangle, a_n = a + \frac{1}{n} \in \langle a, b \rangle$  pro  $n \geq n_0$ , pro  $x \in (a, a_n)$  (Lagrange):

$$|F(x) - F(a_n)| = |f(c_{x,n}) \cdot (x - a_n)| \leq \frac{M}{n},$$

$$F((a, a_n)) \subset (F(a_n) - \frac{M}{n}, F(a_n) + \frac{M}{n}) = I_n,$$

$$(I_n)_{n=n_0}^\infty \text{ uzavřené vnořené intervaly délek } \frac{2M}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$$\bigcap_{n=n_0}^\infty I_n = \{F(a+)\}, F(a+) \text{ existuje (podobně } F(b-));$$

$$D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\},$$

$$F(b+) - F(a-) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = (\text{Lagrange})$$

$$= \sum_{i=1}^n F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\underline{S}(f, D) \leq F(b+) - F(a-) \leq \bar{S}(f, D)$$

$$\sup_D \underline{S}(f, D) \leq F(b+) - F(a-) \leq \inf_D \bar{S}(f, D)$$

**Příklady.**

1)  $\int_0^1 x dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$ .

2)  $\int_0^\pi x \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = x & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{matrix} \right| =$

$$= [-x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi - 0 + [\sin x]_0^\pi = \pi + (0 - 0) = \pi.$$

3)  $\int_0^1 x \sqrt{x^2 + 1} dx = \left| \begin{matrix} x^2 + 1 = t \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{matrix} \right| = \int_1^2 \sqrt{t} dt = \frac{\sqrt{8}-1}{3}$ .

4)  $\int_0^\pi \sin x \cos x dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{matrix} \right| = \int_0^0 t dt = 0$ .

**Poznámka.** Newtonův int.:  $(N)\text{-}\int_a^b f(x) = F(b-) - F(a+)$ .  
Existuje-li Riemannův i Newtonův integrál, jsou stejné.

**Příklady.**

- 1)  $r(x) = \frac{1}{b}$  pro  $x = \frac{a}{b}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{N}$  nesoudělná, jinak 0,  
 $(N)\text{-}\int_{-1}^1 r(x) dx$  neex.,  $(R)\text{-}\int_{-1}^1 r(x) dx = 0$ .
- 2)  $(N)\text{-}\int_0^1 e^{-x^2} dx$  ex.,  $(R)\text{-}\int_0^1 e^{-x^2} dx$  ex.,  $F$  nelze „dobře“  
vyjádřit.
- 3)  $(N)\text{-}\int_0^1 x^{-1/2} dx = 2$ ,  $(R)\text{-}\int_0^1 x^{-1/2} dx$  neex.
- 4)  $(N)\text{-}\int_1^\infty x^{-2} dx = 1$ ,  $(R)\text{-}\int_1^\infty x^{-2} dx$  neex.

**Nevlastní integrál**

I neomezené funkce či intervaly, nevlastní hodnoty.

**Definice.** Necht  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ( $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ ) není omezená nebo  $(a, b)$  není omezený,  $\int_c^d f$  existuje pro každý  $\langle c, d \rangle \subset (a, b)$ . Definujeme *nevlastní integrál*:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^e f(x) dx + \lim_{d \rightarrow b-} \int_e^d f(x) dx,$$

pokud je výraz vpravo definován pro některé  $e \in (a, b)$ . Je-li konečný, řekneme, že integrál *konverguje*.

**Poznámka.** Výběr  $e$  není podstatný, pro  $e'$  je:

$$\lim_{c \rightarrow a+} \int_c^{e'} f = \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^e f + \int_e^{e'} f,$$

$$\lim_{d \rightarrow b-} \int_{e'}^d f = \lim_{d \rightarrow b-} \int_e^d f - \int_e^{e'} f.$$

**Příklady.**

- 1)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctg x]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$ , konverguje.
- 2)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^{\infty} = \infty - 0 = \infty$ , existuje, nekonverguje.
- 3)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_{-\infty}^{\infty} = \infty - \infty$ , neexistuje.

**Poznámka.** Základní vlastnosti (linearita, monotonie, odhad absolutní hodnoty integrálem z absolutní hodnoty) platí i pokud připustíme nevlastní integrály (pokud existují výrazy s případnými nevlastními hodnotami).

**Příklady.**

- 1)  $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \left| \begin{matrix} u = x & v' = e^{-x} \\ u' = 1 & v = -e^{-x} \end{matrix} \right| = \dots = [e^{-x}(-x-1)]_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-1}{e^x} - (-1) = 0 + 1 = 1$ .
- 2)  $\int_1^{+\infty} x^{-2} e^{-1/x} dx = \left| \begin{matrix} -x^{-1} = t \\ x^{-2} dx = dt \end{matrix} \right| = \int_{-1}^0 e^t dt = [e^t]_{-1}^0 = 1 - \frac{1}{e}$ .
- 3)  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x} = \int_1^{+\infty} (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}) dx = [\ln \frac{x}{x+1}]_0^{+\infty} = \ln 2$ , nelze  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx = \infty - \infty$ .

**Poznámka.** Nevlastní integrál alternativně:  $(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle a_n, b_n \rangle$  skoro disjunktní,  $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ ,  $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ ,  $\int_a^b f = \sum_n \int_{a_n}^{b_n} f_+ - \sum_n \int_{a_n}^{b_n} f_-$ . Konvergence integrálu funkce pak znamená konvergenci integrálu její absolutní hodnoty, což pro Newtonův integrál neplatí, např. pro  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .

**Věta.** 1) Jestliže  $|f| \leq g$  na  $(a, b)$ ,  $\int_a^b g$  konverguje a  $f$  je po částech spojitá, pak  $\int_a^b f$  konverguje.

2) Jestliže  $f \leq g$  na  $(a, b)$ ,  $\int_a^b f = +\infty$  a  $g$  je po částech spojitá, pak  $\int_a^b g = +\infty$ .

$$\int_0^1 x^a dx = \begin{cases} [\ln x]_0^1 = 0 - (-\infty) = \infty, & a = -1 \\ \left[ \frac{x^{a+1}}{a+1} \right]_0^1 = \begin{cases} \frac{1}{a+1} - \frac{\infty}{a+1} = \infty, & a < -1 \\ \frac{1}{a+1} - 0 = \frac{1}{a+1}, & a > -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\int_1^\infty x^a dx = \begin{cases} [\ln x]_1^\infty = \infty - 0 = \infty, & a = -1 \\ \left[ \frac{x^{a+1}}{a+1} \right]_1^\infty = \begin{cases} \infty - \frac{1}{a+1} = \infty, & a > -1 \\ 0 - \frac{1}{a+1} = \frac{-1}{a+1}, & a < -1 \end{cases} \end{cases}$$

**Tvrzení.** Necht  $P, Q$  jsou nenulové polynomy,  $Q$  nemá v  $\langle a, +\infty \rangle$  kořeny. Pak  $\int_a^{+\infty} \frac{P}{Q}$  konverguje právě tehdy, když  $\text{st } Q \geq \text{st } P + 2$ .

Důkaz:  $n = \text{st } P - \text{st } Q \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)x^n} = A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ např. } A > 0$$

existuje  $b > a, 0$  tak, že  $\frac{P(x)}{Q(x)x^n} \in (\frac{1}{2}A, \frac{3}{2}A)$  pro  $x > b$

$$\frac{1}{2}Ax^n < \frac{P(x)}{Q(x)} < \frac{3}{2}Ax^n \quad (\frac{P}{Q} = \Theta(x^n))$$

$\int_b^\infty \frac{3}{2}Ax^n$  konv. pro  $n < -1$ ,  $\int_b^\infty \frac{1}{2}Ax^n = \infty$  pro  $n \geq -1$

$\int_b^\infty \frac{P}{Q}$  a  $\int_a^\infty \frac{P}{Q}$  konv. právě pro  $n < -1$ , tj.  $n \leq -2$

**Příklady.**  $\int_0^\infty \frac{x^2+4x+5}{x^4+1} dx$  konv.,  $\int_0^\infty \frac{x^2+4x+5}{x^3+1} dx = +\infty$ .

**Tvrzení.** Necht  $P, Q$  jsou nenulové polynomy,  $c \in \langle a, b \rangle$  je jediný kořen polynomu  $Q$  násobnosti větší než polynomu  $P$ . Pak  $\int_a^b \frac{P}{Q} \in \{\pm\infty\}$  pro  $n$  sudé nebo  $c \in \{a, b\}$ , jinak neexistuje.

Důkaz:  $\frac{P}{Q}$  se v okolí  $c$  chová jako  $\frac{\pm 1}{(x-c)^n}$ .

**Příklady.**  $\int_{-2}^0 \frac{x^2+4x+5}{x^3+1} dx$  neex.,  $\int_{-2}^0 \frac{x^2+4x+5}{(x+1)^3} dx = +\infty$ .

**Příklad** (Laplaceova transformace). Necht funkce  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  je po částech spojitá a má omezený exponenciální růst, tj. existují konstanty  $M, a \in \mathbb{R}$  tak, že  $|f(t)| \leq M e^{at}$  ( $f = O(e^{at})$ ). Laplaceovým obrazem funkce  $f$  je funkce  $F$  daná předpisem

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Je definována pro  $p > a$  ( $\text{Re } p > a$  v  $\mathbb{C}$ ):

$$|f(t) e^{-pt}| \leq M e^{(a-p)t},$$

$$\int_0^\infty M e^{(a-p)t} dt = \left[ \frac{M}{a-p} e^{(a-p)t} \right]_0^\infty = 0 - \frac{M}{a-p} \text{ konverguje.}$$

**Příklad.**

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Konverguje pro  $x > 0$ :

$$|t^{x-1} e^{-t}| \leq t^{x-1}, \int_0^1 t^{x-1} dt \text{ konverguje pro } x > 0;$$

pro  $n \geq x - 1$  je  $|t^{x-1} e^{-t}| \leq t^n e^{-t}$ ,  $\int_1^\infty t^n e^{-t} dt =$   
 $= (\text{per partes}) = [P_n(t) e^{-t}]_1^\infty = 0 - P_n(1) e^{-1}$  konverguje.

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 0 - (-1) = 1.$$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \left| \begin{matrix} u = t^x & v' = e^{-t} \\ u' = xt^{x-1} & v = -e^{-t} \end{matrix} \right| =$$

$$= [-t^x e^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty xt^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x).$$

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = \dots = (n-1)! \Gamma(1) = (n-1)!$$



## Aplikace určitého integrálu

**Definice.** Střední hodnota funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  je

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

pokud integrál konverguje.

**Příklad.** Střídavé napětí  $u(t) = U_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$  má na odporu  $R$  okamžitý výkon  $p(t) = \frac{1}{R} u^2(t) = \frac{U_0^2}{R} \sin^2 \frac{2\pi t}{T}$ . Jeho střední hodnota (například na intervalu  $\langle 0, T \rangle$ ) je  $\frac{U_0^2}{2R}$  což pro stejnosměrný proud odpovídá napětí  $U_e = \frac{\sqrt{2}}{2} U_0$  (efektivní napětí střídavého proudu).

**Věta** (o střední hodnotě). Spojitá spojité funkce na uzavřeném intervalu nabývá své střední hodnoty.

Důkaz:  $f$  na  $\langle a, b \rangle$  má primitivní  $F$ , podle Lagrangeovy věty je  $\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c) = f(c)$  pro některé  $c \in (a, b)$ .

**Poznámka.** Aritmetický průměr  $(f(i))_{i=1}^n$  je střední hodnota  $f$ , pokud použijeme Lebesgueův integrál vzhledem k součtu Diracových měr  $\mu = \sum_{i=1}^n \delta_i$  ( $\delta_i(M) = 1$  pro  $i \in M$ , jinak 0):  $(\int_1^n f d\mu) / (\int_1^n 1 d\mu) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(i)$ .

**Věta.** Necht funkce  $f \leq g$  jsou po částech spojité na  $(a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Obsah  $\{[x, y] : a < x < b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$  je

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

Důkaz:  $\langle c, d \rangle \subset (a, b)$ :

ex.  $(D_{f,n})_{n=1}^\infty : \underline{S}(f, D_{f,n}), \bar{S}(f, D_{f,n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_c^d f,$

ex.  $(D_{g,n})_{n=1}^\infty : \underline{S}(g, D_{g,n}), \bar{S}(g, D_{g,n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_c^d g,$

pro  $D_n = D_{f,n} \cup D_{g,n}$ :

$$\underline{S}(g, D_n) - \bar{S}(f, D_n) \leq P \leq \bar{S}(g, D_n) - \underline{S}(f, D_n),$$

$$\int_c^d (g - f) \leq P \leq \int_c^d (g - f);$$

limity  $c \rightarrow a+, d \rightarrow b-$ .

**Příklad.** Obsah plochy uvnitř elipsy  $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$  je  $4 \int_0^a b \sqrt{1 - (x/a)^2} dx = \pi ab$ .

**Věta.** Necht funkce  $f$  má po částech spojitou derivaci na  $(a, b)$ . Délka grafu funkce  $f$  je

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Důkaz: Pro uzavřený interval (pak případně limity): délka = supremum délek po částech lineárních interpolací,

$$l(D) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)(x_i - x_{i-1})]^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} (x_i - x_{i-1}), c_i \in (x_{i-1}, x_i),$$

$$\underline{S}(\sqrt{1 + (f')^2}, D) \leq l(D) \leq \bar{S}(\sqrt{1 + (f')^2}, D),$$

integrál i supremum délek interpolací jako limity

**Příklad.** Délka astroidy  $(x/r)^{2/3} + (y/r)^{2/3} = 1$  je  $4 \int_0^r \sqrt{1 + [((r^{2/3} - x^{2/3})^{3/2})']^2} dx = 6r$ .

**Věta.** Necht funkce  $f$  je po částech spojité na  $(a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Objem  $\{[x, y, z] : a < b < a, y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$  je

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Důkaz: Pro uzavřený interval (pak případně limity): pro dělení  $D$  uvažujeme vepsané/opsané válce:

$$\underline{S}(\pi f^2, D) \leq V \leq \bar{S}(\pi f^2, D)$$

$$\pi \int_a^b f^2 \leq V \leq \pi \int_a^b f^2$$

**Příklad.** Objem kužele ( $f(x) = \frac{r}{v} x$  na  $\langle 0, v \rangle$ ) je  $\pi \int_0^v r^2 x^2 / v^2 dx = \frac{1}{3} \pi r^2 v$ .

**Příklad.** Objem koule ( $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  na  $\langle -r, r \rangle$ ) je  $2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi r^3$ .

**Věta.** Necht funkce  $f$  má po částech spojitou derivaci na  $(a, b)$ . Obsah plochy vzniklé rotací grafu  $f$  kolem osy  $x$  je

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Důkaz (náznak pro uzavřený interval):

supremum pro po částech lineární interpolace  $f$ ,

obsah pláště komolého kužele:  $2\pi \frac{r_1+r_2}{2} s$ ,

$$\sum_{i=1}^n 2\pi f(c_i) \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} =$$

$$\sum_{i=1}^n 2\pi f(c_i) \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} (x_i - x_{i-1}) \sim$$

$$\sim S(2\pi f \sqrt{1 + (f')^2}, D) \rightarrow 2\pi \int_a^b f \sqrt{1 + (f')^2}$$

**Příklad.** Obsah sféry ( $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  na  $\langle -r, r \rangle$ ) je  $2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + [\frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-1/2}(-2x)]^2} dx = 4\pi r^2$ .

Souřadnice těžiště v rovině:

$$x_T = \frac{M_y}{m}, \quad y_T = \frac{M_x}{m}.$$

Momenty lineárních útvarů ( $\lambda$  je lineární hustota):

$$M_y = \lambda \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

$$M_x = \lambda \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

**Příklad.** Těžiště čtvrtkružnice ( $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  na  $\langle 0, r \rangle$ ) má souřadnice  $x_T = y_T = \frac{2}{\pi} r$ .

Momenty plošných útvarů ( $f \geq 0$ ,  $\sigma$  je plošná hustota):

$$M_y = \sigma \int_a^b x f(x) dx, \quad M_x = \frac{\sigma}{2} \int_a^b f^2(x) dx.$$

**Příklad.** Těžiště plochy pod obloukem kosinusoidy ( $f(x) = \cos x$  na  $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ ) má souřadnice  $x_T = 0, y_T = \frac{\pi}{8}$ .

## Numerická integrace

Chyby: metody, výpočtu.

Metody: na 1 pokus, iterační (posloupnost konv. k řešení).

Řád: popisuje rychlost konv. při zlepšování parametru.

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx (b-a)(w_1 f(x_1) + \dots + w_k f(x_k)).$$

Aproximujeme střední hodnotu funkce váženým průměrem hodnot v uzlech  $x_i \in \langle a, b \rangle$  s váhami  $w_i$  ( $w_1 + \dots + w_k = 1$ ).

Uzly dle metody, váhy pro největší řád, integrují se přesně polynomy menšího stupně.  $M_n = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f^{(n)}(x)|$ .

## Gaussova metoda

Optimální volba uzlů, řád je dvojnásobek jejich počtu. Řešíme soustavu rovnic pro střední hodnoty mocnin.

Pro  $k = 1$  je  $w_1 = 1$ ,  $x_1 = \frac{a+b}{2}$ , odhad chyby  $M_2(b-a)^3/24$ .

Pro  $k = 2$  na  $\langle -1, 1 \rangle$  je  $w_{1,2} = \frac{1}{2}$ ,  $x_{1,2} = \pm\sqrt{1/3}$  řešením

$$\begin{aligned} x^0 : & 1 = w_1 + w_2 \\ x^1 : & 0 = w_1 x_1 + w_2 x_2 \\ x^2 : & \frac{1}{3} = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 \\ x^3 : & 0 = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 \end{aligned}$$

Odhad chyby je  $M_4(b-a)^5/4320$ .

## Newtonovy–Cotesovy metody

Uzly z ekvidistantního dělení  $\langle a, b \rangle$ , včetně (uzavřená metoda) nebo bez (otevřená metoda) krajních bodů  $a, b$ . Řád metody je počet uzlů zaokrouhlený na sudé číslo nahoru.

**Poznámka.** Někdy nekonvergují (pro rostoucí počet uzlů).

## Složené metody

Interval  $\langle a, b \rangle$  rozdělíme na  $n$  částí délek  $(b-a)/n = h$  s krajními body  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , na každé použijeme vybranou metodu. Zlepšujeme zvětšováním  $n$ .

**Obdélníková metoda** používá otevřenou Newtonovu–Cotesovu metodu pro jeden uzel (uprostřed, váha je 1):

$$R(h) = h \left[ f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) \right].$$

**Věta.** Má-li  $f$  na  $\langle a, b \rangle$  spojitou druhou derivaci, pak

$$|I - R(h)| \leq \frac{M_2}{24} (b-a)h^2, \quad M_2 = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f''(x)|.$$

Důkaz:  $\langle x_0, x_1 \rangle$ ,  $s_1 = (x_0 + x_1)/2$ . Taylorova věta:

$$f(x) = f(s_1) + f'(s_1)(x - s_1) + \frac{f''(c_x)}{2}(x - s_1)^2$$

pro některý bod  $c_x \in (x_0, x_1)$ . Chyba integrace je

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx - h f(s_1) \right| &= \left| \int_{x_0}^{x_1} (f(x) - f(s_1)) dx \right| \\ &= \left| \underbrace{f'(s_1) \int_{x_0}^{x_1} (x - s_1) dx}_{=0} + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(c_x) (x - s_1)^2 dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} |f''(c_x)| (x - s_1)^2 dx \leq \frac{M_2}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x - s_1)^2 dx \\ &= \left| \frac{x - s_1 = t}{dx = dt} \right| = M_2 \int_0^{h/2} t^2 dt = M_2 \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^{h/2} = \frac{M_2}{24} h^3. \end{aligned}$$

Stejný odhad je na ostatních podintervalech:

$$|I - R(h)| \leq \frac{M_2}{24} h^3 n = \frac{M_2}{24} (b-a)h^2.$$

**Poznámka.** Pokud bychom použili hodnotu (např.) v levém krajním bodě (pro funkci danou tabulkou), dostali bychom metodu řádu 1 s odhadem chyby  $\frac{M_1}{2}(b-a)h$ .

**Lichoběžníková metoda** používá uzavřenou Newtonovu–Cotesovu metodu pro 2 uzly (váhy jsou 1/2):

$$T(h) = h \left[ \frac{1}{2} f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(b) \right].$$

**Věta.** Je-li  $P$  lineární interpolace funkce  $f$  se spojitou druhou derivací na intervalu  $\langle x_0, x_1 \rangle$  (tj.  $P$  je lineární funkce,  $P(x_0) = f(x_0)$ ,  $P(x_1) = f(x_1)$ ), pak pro  $x \in \langle x_0, x_1 \rangle$  je

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M_2}{2} |(x - x_0)(x - x_1)|.$$

Důkaz: Pro  $x \in (x_0, x_1)$  má funkce

$$g(t) = f(t) - P(t) - (f(x) - P(x)) \frac{(t - x_0)(t - x_1)}{(x - x_0)(x - x_1)}.$$

tři nulové body  $x_0, x_1, x$ . Podle Rolleovy věty má  $g'$  dva nulové body v  $(x_0, x_1)$  a  $g''$  nulový bod  $c_x \in (x_0, x_1)$ :

$$\begin{aligned} 0 = g''(c_x) &= f''(c_x) - (f(x) - P(x)) \frac{2}{(x - x_0)(x - x_1)} \\ f(x) - P(x) &= \frac{f''(c_x)}{2} (x - x_0)(x - x_1), \\ |f(x) - P(x)| &\leq \frac{M_2}{2} |(x - x_0)(x - x_1)|. \end{aligned}$$

**Poznámka.** Je-li  $P$  polynomiální interpolace funkce  $f$  se spojitou derivací řádu  $n + 1$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  pro různé body  $x_0, \dots, x_n \in \langle a, b \rangle$ , pak pro  $x \in \langle a, b \rangle$  je

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x - x_0) \dots (x - x_n)|.$$

**Věta.** Má-li  $f$  na  $\langle a, b \rangle$  spojitou druhou derivaci, pak

$$|I - T(h)| \leq \frac{M_2}{12} (b-a)h^2, \quad M_2 = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f''(x)|.$$

Důkaz:  $\langle x_0, x_1 \rangle$ ,  $s_1 = (x_0 + x_1)/2$ . Chyba integrace je

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^{x_1} (f(x) - P(x)) dx \right| &\leq \int_{x_0}^{x_1} |f(x) - P(x)| dx \\ &\leq \frac{M_2}{2} \int_{x_0}^{x_1} |(x - x_0)(x - x_1)| dx = \left| \frac{x - s_1 = t}{dx = dt} \right| \\ &= \frac{M_2}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{h^2}{4} - t^2 \right) dt = M_2 \left[ \frac{1}{4} h^2 t - \frac{1}{3} t^3 \right]_0^{h/2} \\ &= M_2 \left( \frac{1}{8} h^3 - \frac{1}{24} h^3 \right) = \frac{M_2}{12} h^3. \end{aligned}$$

Stejný odhad je na ostatních podintervalech:

$$|I - T(h)| \leq \frac{M_2}{12} h^3 n = \frac{M_2}{12} (b-a)h^2.$$

**Poznámka.** Odhad chyby obdélníkové metody je lepší než u lichoběžníkové, přestože se používá horší polynom. Využití středu intervalu odpovídá totiž aproximaci tečnou.

**Simpsonova metoda** používá uzavřenou Newtonovu–Cotesovu metodu pro 3 uzly. Rozděluje tedy každý podinterval na dva. Pro lepší srovnání označme  $n$  (sudý) počet všech takto vzniklých podintervalů. Hodnoty vah získáme integrací kvadratické interpolace, kterou dostaneme lineární kombinací Lagrangeových polynomů  $P_i$ ,  $P_i(x_j) = \delta_{i,j}$ :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} P(x) dx &= \left| \frac{(x - x_1) = ht}{dx = h dt} \right| = h \int_{-1}^1 \tilde{P}(t) dt \\ &= h \int_{-1}^1 (f(x_0) P_0(t) + f(x_1) P_1(t) + f(x_2) P_2(t)) dt \\ &= h \int_{-1}^1 \left( f(x_0) \frac{(t-0)(t-1)}{(-1-0)(-1-1)} + f(x_1) \frac{(t+1)(t-1)}{(0+1)(0-1)} + \right. \\ &\quad \left. + f(x_2) \frac{(t+1)(t-0)}{(1+1)(1-0)} \right) dt \\ &= h \left[ \frac{1}{3} f(x_0) + \frac{4}{3} f(x_1) + \frac{1}{3} f(x_2) \right]. \end{aligned}$$

Sečtením přes dvojice podintervalů dostaneme

$$S(h) = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

**Věta.** Má-li  $f$  na  $\langle a, b \rangle$  spojitou čtvrtou derivaci, pak

$$|I - S(h)| \leq \frac{M_4}{180} (b-a)h^4, \quad M_4 = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f^{(4)}(x)|.$$

**Poznámka.** Simpsonova metoda je řádu 4 a je tedy přesná i pro polynomy stupně 3.

### Richardsonova extrapolace

Pro metodu  $F$  řádu  $p$  konvergující k  $F(0)$  je

$$F(h) = F(0) + ah^p + O(h^q),$$

kde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q > p$ . Uvažujeme  $h > 0$  a proložme body  $[h^p, F(h)]$  a  $[(2h)^p, F(2h)]$  přímkou:

$$P(x) = F(h) + \frac{F(2h) - F(h)}{(2^p - 1)h^p} (x - h^p).$$

Richardsonova extrapolace je

$$P(0) = F(h) + \frac{F(h) - F(2h)}{2^p - 1} = F_1(h) \approx F(0).$$

**Věta.** Necht  $F(h) = F(0) + ah^p + O(h^q)$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $p < q$ . Pak  $F_1(h) = F(0) + O(h^q)$ .

Důkaz:  $O(h^q)$  je uzavřeno na lineární kombinaci:

$$F(2h) = F(0) + a2^p h^p + O(h^q)$$

$$F_1(h) = F(0) + ah^p + \frac{a(1 - 2^p)h^p}{2^p - 1} + O(h^q) = F(0) + O(h^q).$$

**Příklady.** Uvedené metody mají chyby jen sudých řádů:

$$T_1(h) = T(h) + \frac{1}{3} (T(h) - T(2h)) = S(h) \quad \text{řádu } 4,$$

$$S_1(h) = S(h) + \frac{1}{15} (S(h) - S(2h)) \quad \text{řádu } 6.$$

**Poznámky.** Odstraníme chybu nejnižšího řádu.

1) Dostaneme přesnější metodu.

2) Přičítaná hodnota dobře odhaduje chybu (nemusí to být horní odhad), což můžeme použít v iteračním postupu: Spočteme pro  $h$ , opakovaně počítáme pro poloviční krok a odhadujeme chybu, dokud nedosáhneme požadované přesnosti. Pro lichoběžníkovou a Simpsonovu metodu stačí dopočítat hodnoty jen v nových bodech (můžeme mít dokonce uloženy součty pro předcházející krok).

### Rombergova metoda

Začneme s lichoběžníkovou metodou, při přechodu k polovičnímu kroku dopočítáme všechny dostupné Richardsonovy extrapolace (v  $k$ -tém sloupci je metoda řádu  $2k$ ), odhadujeme chyby hodnot pod diagonálou:

$$\begin{array}{ccccccc} T(h) & & & & & & \\ T(h/2) & T_1(h/2) & & & & & \\ T(h/4) & T_1(h/4) & T_2(h/4) & & & & \\ T(h/8) & T_1(h/8) & T_2(h/8) & T_3(h/8) & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \end{array}$$

**Příklad.** Spočtete  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$  s přesností  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

Pro uvedené složené metody ( $R, T, S$ ) můžeme využít odhady chyb, ve kterých přepíšeme  $h = (b-a)/n$ .

$$M_2 = \max_{x \in (0,1)} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} (x^2 - 1) \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

$$M_4 = \max_{x \in (0,1)} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} (x^4 - 6x^2 + 3) \right| = \frac{3}{\sqrt{2\pi}}.$$

$$\varepsilon > \frac{M_2(b-a)^3}{24n_R^2} \quad n_R > \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{24\varepsilon}} \doteq 128,9 \quad n_R \geq 129$$

$$\varepsilon > \frac{M_2(b-a)^3}{12n_T^2} \quad n_T > \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{12\varepsilon}} \doteq 182,3 \quad n_T \geq 183$$

$$\varepsilon > \frac{M_4(b-a)^5}{180n_S^4} \quad n_S > \sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{180\varepsilon}} \doteq 7,2 \quad n_S \geq 8$$

Skutečné chyby jsou o něco menší:

metoda	$R$	$T$	$S$
$10^6 \cdot$ chyba	-0,606	0,602	-0,660

Stačilo by:

metoda	$R$	$T$	$S$	Romberg	Gauss
dělení	101	143	8	4	1
hodnot	101	144	9	5	3

Iterační proces by skončil:

metoda	$R$	$T$	$S$
dělení	128	256	8
hodnot	255	257	9

### Číselné řady

$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ,  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

**Definice.** (Nekonečná číselná) řada je výraz  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , kde  $(a_k)_{k=1}^{\infty}$  je posloupnost čísel. Číslo  $a_k$  je  $k$ -tý člen,  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  je  $n$ -tý částečný součet,  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  je součet (pokud existuje, píšeme  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ ).

Řekneme, že řada konverguje, je-li  $s \in \mathbb{C}$ ; diverguje, je-li  $s \in \{\pm\infty, \infty\}$ ; osciluje, pokud  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  neexistuje.

**Příklady.**

- $\sum_{k=1}^{\infty} 1$  diverguje:  $s_n = n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ .
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  osciluje:  $s_n = 1$  pro  $n$  liché,  $s_n = 0$  pro  $n$  sudé.
- $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 2^{-n}) = 1$  konverguje.
- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot k$  osciluje v  $\mathbb{R}$ , diverguje v  $\mathbb{C}$ .

**Poznámka.** Caesarův součet  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_n = \frac{1}{2}$  pro 2).

**Příklad.** Aritmetická řada s diferencí  $d$  je řada ve tvaru  $\sum_{k=1}^{\infty} (a + (k-1)d) = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \dots$ . Částečné součty  $s_n = \frac{1}{2} n(a_1 + a_n)$ , speciálně  $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$ .

**Definice.** Geometrická řada s kvocientem  $q$  je řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots$ .

**Věta.**  $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^k = \frac{a_1}{1-q}$  pro  $|q| < 1$ , pro  $|q| \geq 1$  a  $a_1 \neq 0$  řada nekonverguje.

Důkaz:

$$\begin{aligned}
s_n &= a_1(1 + q + \dots + q^{n-1}) \\
qs_n &= a_1(q + \dots + q^{n-1} + q^n) \\
(1-q)s_n &= a_1(1 - q^n) \\
s_n &= \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, \quad (q \neq 1)
\end{aligned}$$

**Příklad.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3^n} = \frac{4/3}{1-1/3} = 2$  ( $a_1 = \frac{4}{3}, q = \frac{1}{3}$ ).

**Příklad.**  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$ .

**Věta.** Komplexní řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje právě tehdy, když konvergují obě řady  $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k$  a  $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$ . V takovém případě  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + j \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$ .

**Věta.** Jestliže  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$  konvergují,  $c \in \mathbb{C}$ , pak

- 1)  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ .
- 2)  $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

**Věta** (nutná podmínka konvergence). Jestliže  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje, pak  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

Důkaz:  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k - \lim_{k \rightarrow \infty} s_{k-1} = s - s = 0$ .

**Věta.** Řada s nezápornými členy má součet.

Důkaz:  $(s_n)_{n=1}^{\infty}$  je neklesající, tj.  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  existuje.

**Příklad.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} = +\infty$  pro  $a \leq 0$ : nekonverguje (členy nejdou k nule), má součet (členy jsou nezáporné).

**Věta** (srovnávací kr.). Nechť  $0 \leq a_k \leq b_k$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ .

- 1) Konverguje-li  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ , pak i  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje.
- 2) Diverguje-li  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , pak i  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  diverguje.

Důkaz:  $\sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k$ , limity pro  $n \rightarrow \infty$  existují (předcházející věta), věta o monotonii pro limity.

**Příklady.**

1)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + 1 = 2$ , konverguje.

2)  $a \geq 2$ :  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$ , konverguje.

3) Harmonická řada:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = +\infty.
\end{aligned}$$

4)  $a \leq 1$ :  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^a \geq \sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ , diverguje.

**Definice.** Řada  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje absolutně, pokud konverguje  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ .

**Věta.** Absolutně konvergentní řada konverguje.

Důkaz:

1)  $a_k \in \mathbb{R}$ :  $a^+ = \max\{a, 0\}$ ,  $a^- = \max\{-a, 0\}$

$a = a^+ - a^-$ ,  $|a| = a^+ + a^-$ ,  $0 \leq a^+, a^- \leq |a|$

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konverguje ...

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+, \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$  konvergují (srovnávací kritérium) ...

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$  konv.

2)  $a_k \in \mathbb{C}$ :  $0 \leq |\operatorname{Re} a_k|, |\operatorname{Im} a_k| \leq |a_k|$

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konverguje ...

$\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Re} a_k|, \sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im} a_k|$  konvergují (srovnávací kr.) ...

$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$  konvergují podle 1) ...

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + j \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$  konverguje

**Poznámka.** Geometrická řada konverguje absolutně (když konverguje).

**Věta** (podílové kritérium). Nechť  $a_k \neq 0$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ .

1) Je-li  $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ , pak  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje (absolutně).

2) Je-li  $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ , pak  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  nekonv.

Důkaz:

1)  $|a_k| \leq |a_{k-1}|q \leq \dots \leq |a_1|q^{k-1}$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_1|q^{k-1}$  konv.

2)  $|a_k| \geq |a_{k-1}| \geq \dots \geq |a_1|$ ,  $a_k \not\rightarrow 0$

**Poznámka.** Stačí, aby byly nerovnosti splněny pro dostatečně velká  $k$ , tj. počínaje některým  $k_0$ .

**Věta** (limitní tvar podílového kritéria).

1) Je-li  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ , pak  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konv. (abs.).

2) Je-li  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$ , pak  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  nekonverguje.

**Příklady.**

1)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$  konverguje:  $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{k+1} \rightarrow 0$ .

2)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}$  diverguje:  $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k+1}{2} \rightarrow +\infty$ .

3)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  - kr. nerozhodne:  $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k}{k+1} \nearrow 1$  (diverguje - nestačí, aby podíly byly menší než 1).

4)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  - kr. nerozhodne:  $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \nearrow 1$  (konv.).

**Věta** (odmocninové kritérium).

1) Je-li  $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ , pak  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje (absolutně);

2) Je-li  $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$ , pak  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  nekonv.

Důkaz:

1)  $|a_k| \leq q^k$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$  konverguje

2)  $|a_k| \geq 1$ ,  $a_k \not\rightarrow 0$

**Věta** (limitní tvar odmocninového kritéria).

1) Je-li  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ , pak  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konv. (abs.).

2) Je-li  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ , pak  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  nekonverguje.

**Příklad.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$  kr. nerozhodne:  $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{k}{k+1} \nearrow 1$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right]^{-1} = e^{-1} \neq 0$  - diverguje.

**Poznámka.** V limitních tvarech podílového a odmocnino-  
vého kritéria stačí  $\limsup < 1$  nebo  $\liminf > 1$ .

**Příklad.**  $a_{2k-1} = 2^{-k}$ ,  $a_{2k} = 2^{1-k}$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \dots = 3,$$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \in \left\{ 2, \frac{1}{4} \right\} - \text{podílové kritérium nerozhodne,}$$

$$\sqrt[k]{|a_k|} \rightarrow 2^{-1/2} < 1 - \text{konverguje podle odmocninového kr.}$$

**Věta** (integrální kritérium). *Nechť  $f$  je nezáporná nerostoucí funkce na  $\langle 1, +\infty \rangle$ . Pak  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  konverguje právě tehdy, když konverguje  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ .*

Důkaz:  $f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1)$ ,  
 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \geq \int_1^{+\infty} f(x) dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - f(1)$

**Příklady.**

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  diverguje:  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{+\infty} = +\infty$ .
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$  konverguje pro  $a > 1$ :  $\int_1^{+\infty} x^{-a} dx = \frac{1}{a-1}$ .

**Příklad.** Jaká je chyba  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{6} \pi^2$ , pokud sečteme prvních 100 členů?

$$\sum_{k=101}^{\infty} a_k \geq \int_{101}^{+\infty} x^{-2} dx = [-x^{-1}]_{101}^{+\infty} = \frac{1}{101} = 0,0099$$

$$\sum_{k=101}^{\infty} a_k \leq \int_{100}^{+\infty} x^{-2} dx = [-x^{-1}]_{100}^{+\infty} = \frac{1}{100} = 0,0100$$

**Věta** (Leibnizovo kr.). *Je-li  $(a_k)_{k=1}^{\infty}$  nerostoucí posloupnost s nulovou limitou, pak  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$  konverguje.*

Důkaz:  $s_1 \geq s_3 \geq \dots \searrow s'$ ,  $s_2 \leq s_4 \leq \dots \nearrow s'' \leq s'$ ,  
 $s' - s'' = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ .

**Poznámka.** Jiná formulace: Alternující řada (střídají se znaménka) s  $|a_k| \searrow 0$  konverguje.

**Příklad.**  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots (= \ln 2)$  konverguje: střídají se znaménka,  $|a_k| = \frac{1}{k} \searrow 0$ . Ne absolutně:  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$  (podle integrálního kritéria).

**Příklad.**  $a_{2k-1} = 1/k$ ,  $a_{2k} = -1/2^k$ . Střídají se znaménka,  $|a_k| \rightarrow 0$ , ale ne monotónně.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty - \frac{1}{2} = +\infty$  (rozdíl harmonické a geometrické řady).

**Definice.** Přerovnáním řady  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  nazýváme každou řadu  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}$ , kde  $f$  je bijekce na  $\mathbb{N}$ .

**Věta.** *Jestliže řada konverguje absolutně, pak každé její přerovnání konverguje (absolutně) a má stejný součet.*

Důkaz:

- $a_k \geq 0$ : označme  $m_n = \max\{f(1), \dots, f(n)\}$   
 $\sum_{k=1}^n a_{f(k)} \leq \sum_{k=1}^{m_n} a_k$ , tedy  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$   
opačná nerovnost: první řada je přerovnáním druhé pro  $f_{-1}$   
důsledek: přerovnání abs. konv. řady je abs. konv.
- $a_k \in \mathbb{R}$ :  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
- $a_k \in \mathbb{C}$ : rozkladem na reálnou a imaginární část

**Tvrzení.** *Jestliže reálná řada konverguje neabsolutně, pak každé  $c \in \mathbb{R}$  je součtem některého jejího přerovnání.*

Důkaz:  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$ , pro  $c \in \mathbb{R}$  opakujeme:  
1) bereme nezáp. členy, dokud součet nebude (poprvé)  $> c$   
2) bereme záporné členy, dokud součet nebude (poprvé)  $< c$   
Pro  $c = +\infty$  ( $c = -\infty$ ) použijeme v  $n$ -tém kroku  $n$  ( $-n$ ).

**Věta.** *Jestliže  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konverguje absolutně, pak  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$  konvergují (absolutně) a jejich součet je roven součtu původní řady.*

Důkaz:  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k-1}|, \sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \dots$  konv.  
 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k-1} + a_{2k}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

**Důsledek.** *Rozdělením absolutně konvergentní řady na konečně mnoho přeskádaných částí se součet nezmění.*

**Poznámka.** Neabsolutně konvergentní reálná řada má nekonečně součty nezáporných i záporných členů, jejich součet není definován.

## Diferenciální rovnice

(Obyčejná) dif. rovnice řádu  $n$ :  $F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$ .

Speciální tvar:  $x^{(n)} = f(t, x, \dots, x^{(n-1)})$ .

*Řešení na intervalu  $I$ :* funkce  $x: I \rightarrow \mathbb{R}$  taková, že pro každé  $t \in I$  je  $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ .

*Maximální řešení:* neexistuje řešení na větším intervalu.

*Cauchyova úloha:* navíc počáteční podmínky:

$$x(t_0) = x_{0,0}, x'(t_0) = x_{0,1}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{0,n-1}.$$

Počáteční podmínky „obvykle“ vyberou jedno z pole řešení.

*Jednoznačnost* Cauchyovy úlohy: řešení splývají na okolí  $t_0$ .

## Separovatelné diferenciální rovnice 1. řádu

$$\boxed{x' = g(t)h(x), \quad x(t_0) = x_0}$$

**Věta.** *Nechť  $I, J$  jsou otevřené intervaly, funkce  $g$  je spojitá na  $I \ni t_0$ , funkce  $h$  je spojitá na  $J \ni x_0$ . Pak  $x' = g(t)h(x)$ ,  $x(t_0) = x_0$ , má řešení na intervalu  $I' \subset I$  obsahujícím  $t_0$ . Je-li navíc  $h'$  spojitá na  $J$ , pak je toto řešení jednoznačné.*

Postup řešení:

- $h(x_1) = 0 \dots x(t) = x_1, t \in I$  je stacionární řešení
- $h(x_1) \neq 0 \dots h(x) \neq 0$  na okolí  $x_1$

$$x'(t) = g(t)h(x(t))$$

$$\int \frac{x'(t)}{h(x(t))} dt = \int g(t) dt$$

$$\left| \begin{array}{l} x(t) = y \\ x'(t) dt = dy \end{array} \right| : \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t) dt$$

$$H_1(y) = G(t) + c$$

$$x(t) = y = \dots$$

- Počáteční podmínka: dopočítat  $c$  nebo

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{h(y)} = \int_{t_0}^t g(u) du$$

- Interval řešení: graf řešení se „zarazí“ o hranici  $I \times J$ .

**Poznámka.** Separaci proměnných lze použít pouze pro nestacionární řešení!!!

**Příklad.**  $x' = -\lambda x$ ,  $x(0) = x_0 > 0$  (radioaktivní rozpad).  
 $g(t) = -\lambda$ ,  $h(x) = x$ ,  $h'(x) = 1$  spoj. na  $\mathbb{R} \dots$  ex. a jedn.;  
 stacionární řešení:  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$  (nevyhovuje);  
 nestacionární řešení:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda x \\ \int \frac{dx}{x} &= \int -\lambda dt \\ \ln|x| &= -\lambda t + \ln|c| \quad (c > 0) \\ |x| &= |c|e^{-\lambda t} \\ x(t) &= ce^{-\lambda t} \quad (c \neq 0) \end{aligned}$$

dosazení počáteční podmínky:  $x_0 = ce^{-\lambda \cdot 0}$ , tj.  $c = x_0$ ;  
 řešení:  $x(t) = x_0 e^{-\lambda t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Příklad.**  $x' = \frac{x^2-1}{2t}$ .

$g(t) = \frac{1}{t}$ , spojitá na  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, +\infty)$ ,  $h(x) = \frac{x^2-1}{2}$ ,  
 $h'(x) = x$  spojitá na  $\mathbb{R}$ , ... existence a jednoznačnost;  
 stacionární řešení:  $x_{1,\pm}(t) = \pm 1$ ,  $t \in (-\infty, 0)$ ,  $x_{2,\pm}(t) = \pm 1$ ,  
 $t \in (0, +\infty)$ ;  
 nestacionární řešení:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{x^2-1}{2t} \\ \int \frac{2}{x^2-1} dx &= \int \frac{dt}{t} \\ \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| &= \ln|t| + \ln|c| \quad (c > 0) \\ \frac{x-1}{x+1} &= ct \quad (c \neq 0) \\ x(t) &= \frac{1+ct}{1-ct} \end{aligned}$$

intervaly řešení:  $t \neq 0$ ,  $t \neq \frac{1}{c}$ ;

pro počáteční podmínky:

- a)  $x(0) = 2$ : nelze ( $t \neq 0$ );
- b)  $x(1) = -1$ : stac.  $x(t) = -1$ ,  $t \in (0, +\infty)$ ;
- c)  $x(1) = 0$ :  $c = -1$ ,  $x(t) = \frac{1-t}{1+t}$ ,  $t \in (0, +\infty)$ ;
- d)  $x(-\frac{1}{2}) = 3$ :  $c = -1$ ,  $x(t) = \frac{1-t}{1+t}$ ,  $t \in (-1, 0)$ ;
- e)  $x(1) = -1$ :  $c = 3$ ,  $x(t) = \frac{1+3t}{1-3t}$ ,  $t \in (\frac{1}{3}, 0)$ .

**Příklad.**  $x' = 3x^{2/3}$ .

$g(t) = 1$ ,  $h(x) = 3x^{2/3}$  spojitá na  $\mathbb{R} \dots$  existence,  
 navíc  $h'(x) = 2x^{-1/3}$  spojitá na  $\mathbb{R} \setminus \{0\} \dots$  jedn. pro  $x \neq 0$ ;  
 stacionární řešení:  $x(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;  
 nestacionární řešení:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x^{2/3} \\ \int \frac{1}{3} x^{-2/3} dx &= \int dt \\ x^{1/3} &= t - c \\ x(t) &= (t - c)^3, \quad t \in (-\infty, c), \quad t \in (c, +\infty) \end{aligned}$$

Řešení se v bodech nejednoznačnosti dají spojovat, obecné řešení je

$$x_{c,d}(t) = \begin{cases} (t-c)^3, & t \leq c, & c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \\ 0, & c < t < d, & d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \\ (t-d)^3, & d \leq t, & c \leq d. \end{cases}$$

Pro počáteční podmínku  $x(1) = 1$  dostaneme maximální jednoznačné řešení  $x(t) = t^3$ ,  $t \in (0, +\infty)$ , maximální (nejednoznačná) řešení jsou

$$x_c(t) = \begin{cases} (t-c)^3, & t \leq c, \\ 0, & c < t < d, \quad c \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}. \\ t^3, & 0 \leq t, \end{cases}$$

**Příklad.**  $x' = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{x}{e^x}$ .

separace:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{x}{e^x} \\ \int \frac{e^x}{x} dx &= \int \frac{1}{\ln t} dt \end{aligned}$$

integrály nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí

**Příklad.**  $x' = \frac{1}{t} \cdot \frac{x+1}{x-1}$ ,  $x(1) = 0$ .

$g(t) = \frac{1}{t}$ , spojitá na  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, +\infty)$ ,  $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ,  $h'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$  spojitá  $(-\infty, 1)$ ,  $(1, +\infty)$ , ... ex. a jedn.;  
 stacionární řešení:

$x_{1,2}(t) = -1$ ,  $t \in (-\infty, 0)$ ,  $t \in (0, +\infty)$  (nevyhovují);  
 nestacionární řešení:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{t} \cdot \frac{x+1}{x-1} \\ \int \frac{x-1}{x+1} dx &= \int \frac{dt}{t} \\ x - 2 \ln|x+1| &= \ln t + c \end{aligned}$$

pro poč. podmínku:  $0 - 0 = 0 + c$ , tj.  $c = 0$  ( $t > 0$ ,  $|x| < 1$ ),  
 $x(t) - 2 \ln(x(t) + 1) - \ln t = 0$ , je zadaná *implicitně*;

lze počítat derivace v 1:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{1}{t} \cdot \frac{x(t)+1}{x(t)-1}, & x'(1) &= -1, \\ x''(t) &= -\frac{1}{t} \cdot \frac{x(t)+1}{x(t)-1} + \frac{1}{t} \cdot \frac{-2x'(t)}{(x(t)-1)^2}, & x''(1) &= 3. \end{aligned}$$

### Lineární diferenciální rovnice (LDR)

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

$a_{n-1}, \dots, a_0$  jsou *koefficienty*,  $b$  je *pravá strana*.

(Přidružená) *homogenní* LDR:  $b(t) = 0$ .

Předpoklady:  $a_{n-1}, \dots, a_0, b$  spojitá na intervalu  $I \ni t_0$ .

**Věta.** *Cauchyova úloha má právě jedno řešení na I.*

$C(I)$ : lineární prostor funkcí spojitých na  $I$ .

$C^n(I)$ : lineární prostor funkcí se spoj.  $n$ -tou derivací na  $I$ .

Lineární diferenciální operátor  $D: C^n(I) \rightarrow C(I)$ :

$$x \mapsto x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x.$$

**Věta.** 1) *Je-li  $x$  řešení LDR a  $\tilde{x}$  řešení přidružené homogenní rovnice, pak  $x + \tilde{x}$  je řešení dané LDR.*

2) *Jsou-li  $x_1, x_2$  řešení LDR, pak  $x_1 - x_2$  je řešení přidružené homogenní rovnice.*

3) *Jsou-li  $x_1, x_2$  řešení pro pravé strany  $b_1, b_2$ , pak  $x_1 + x_2$  je řešení pro pravou stranu  $b_1 + b_2$  (princip superpozice).*

**Poznámka.** Obecné řešení LDR lze zapsat ve tvaru  $x(t) = \hat{x}(t) + \tilde{x}(t)$ , kde  $\hat{x}(t)$  je libovolné (*partikulární*) řešení a  $\tilde{x}(t)$  je obecné řešení přidružené homogenní rovnice.

**Věta.** Množina řešení homogenní LDR řádu  $n$  tvoří lineární prostor dimenze  $n$ .

Důkaz:  $D: x \mapsto x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0$  je lineární, množina řešení je jeho jádro, tj. lineární prostor.

$x(t_0)$	$x'(t_0)$	$\dots$	$x^{(n-1)}(t_0)$	řešení C. úlohy
1	0	$\dots$	0	$\rightarrow x_0(t)$
0	1	$\dots$	0	$\rightarrow x_1(t)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$\dots$	1	$\rightarrow x_{n-1}(t)$
$x_{0,0}$	$x_{0,1}$	$\dots$	$x_{0,n-1}$	$\rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} x_{0,i}x_i(t)$

$\dots$  lineární obal  $\{x_0(t), \dots, x_{n-1}(t)\}$  je celý prostor řešení

$$A_0 x_0(t) + \dots + A_{n-1} x_{n-1}(t) = 0 \xrightarrow{t=t_0} A_0 = 0$$

$$' : A_0 x'_0(t) + \dots + A_{n-1} x'_{n-1}(t) = 0 \xrightarrow{t=t_0} A_1 = 0 \quad \dots$$

$\dots$  funkce  $x_0(t), \dots, x_{n-1}(t)$  jsou lineárně nezávislé

### Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Homogenní LDR 1. řádu  $x' + a(t)x = 0$  je separovatelná:  $x' = -a(t)x$ . Stacionární řešení je  $x_s(t) = 0, t \in I$ . Nestacionární řešení dostaneme separací proměnných

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= -a(t)\tilde{x}(t) \\ \int \frac{\tilde{x}(t)}{\tilde{x}(t)} dt &= \int -a(t) dt \\ \ln |\tilde{x}(t)| &= -A(t) + \ln |c| \quad (c > 0) \\ |\tilde{x}(t)| &= |c| e^{-A(t)} \\ \tilde{x}(t) &= c e^{-A(t)} \quad (c \neq 0) \end{aligned}$$

Přidáme stacionární řešení:  $\tilde{x}(t) = c e^{-A(t)}, t \in I (c \in \mathbb{R})$ .

Partikulární řešení LDR 1. řádu  $x' + a(t)x = b(t)$  najdeme *variací konstanty*, tj. ve tvaru obecného řešení přidružené homogenní rovnice, ve kterém konstantu nahradíme funkcí:  $\hat{x}(t) = c(t) e^{-A(t)}$ . Dostaneme:

$$\begin{aligned} c'(t) e^{-A(t)} + c(t) e^{-A(t)} a(t) + a(t) c(t) e^{-A(t)} &= b(t) \\ c'(t) &= b(t) e^{A(t)} \end{aligned}$$

integrací najdeme některou funkci  $c(t)$ .

**Příklad.**  $x' + \frac{1}{t}x = 1, x(1) = 2$ .

$a(t) = \frac{1}{t}$  spojitá na  $(-\infty, 0)$  a  $(0, +\infty)$ ,  $b(t) = 1$  spojitá na  $\mathbb{R} \dots$  existence a jednoznačnost na  $(0, +\infty) \ni 1$ ; řešení přidružené homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} \int \frac{\tilde{x}'(t)}{\tilde{x}(t)} dt &= \int -\frac{dt}{t} \\ \ln |\tilde{x}(t)| &= -\ln |t| + \ln |c| \\ |\tilde{x}(t)| &= \left| \frac{c}{t} \right| \\ \tilde{x}(t) &= \frac{c}{t} \end{aligned}$$

partikulární řešení ve tvaru  $\hat{x}(t) = c(t)t^{-1}$ :

$$\begin{aligned} c'(t)t^{-1} + c(t)(-t^{-2}) &= -c(t)t^{-2} + 1 \\ c'(t) &= t \\ c(t) &= \frac{1}{2}t^2 \\ \hat{x}(t) &= c(t)t^{-1} = \frac{1}{2}t \\ x(t) &= \hat{x}(t) + \tilde{x}(t) = \frac{1}{2}t + \frac{c}{t} \end{aligned}$$

pro počáteční podmínku:  $2 = \frac{1}{2} + \frac{c}{1}$ , tj.  $c = \frac{3}{2}$ :

$$x(t) = \frac{1}{2}t + \frac{3}{2t}, \quad t \in (0, +\infty).$$

### Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Funce  $e^{\lambda t}$  vyhovuje homogenní LDR s konstantními koeficienty právě tehdy, když  $e^{\lambda t}(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0) = 0$ .

*Charakteristická rovnice* pro LDR s konstantními koeficienty:  $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$ .

Má-li reálný polynom imaginární kořen, pak má za kořen i číslo k němu komplexně sdružené (stejně násobnosti).

Pro imaginární kořeny  $\alpha \pm \beta j$  dostaneme komplexní řešení

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\alpha + \beta j} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + j \sin \beta t), \\ x_2(t) &= e^{\alpha - \beta j} = e^{\alpha t}(\cos \beta t - j \sin \beta t). \end{aligned}$$

Z těchto komplexních řešení dostaneme reálná řešení

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t)) &= e^{\alpha t} \cos \beta t = \operatorname{Re} x_1(t), \\ \frac{1}{2}(x_1(t) - x_2(t)) &= e^{\alpha t} \sin \beta t = \operatorname{Im} x_1(t). \end{aligned}$$

**Věta.** Bázi prostoru řešení homogenní LDR s konstantními koeficienty dostaneme z kořenů její charakteristické rovnice:

1) Pro každý  $k$ -násobný reálný kořen  $\lambda$  vezmeme

$$e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}.$$

2) Pro každou dvojici  $k$ -násobných imaginárních kořenů  $\alpha \pm \beta j$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) vezmeme

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \cos \beta t, t e^{\alpha t} \cos \beta t, \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \cos \beta t, \\ e^{\alpha t} \sin \beta t, t e^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \sin \beta t. \end{aligned}$$

**Příklad.**  $x' + ax = 0, x(0) = x_0$  (radioaktivní rozpad).

Homogenní LDR s konstantními koef., jedno řešení na  $\mathbb{R}$ . Charakteristická rovnice  $\lambda + a = 0$  má řešení  $\lambda_1 = -a$ , tomu odpovídá řešení LDR  $x_1(t) = e^{-at}$ . Obecné řešení (jednorozměrný prostor) je  $c e^{-at}$  ( $c \in \mathbb{R}$ ).

Dosazení počáteční podmínky:  $x_0 = c e^{-a \cdot 0}$ , tj.  $c = x_0$ .

Řešení:  $x(t) = x_0 e^{-at}, t \in \mathbb{R}$ .

Partikulární řešení LDR najdeme *variací konstant*. Při derivování si přidáváme podmínky, dostaneme soustavu rovnic pro neznámé  $c'_i(t)$  (pro každé  $t \in I$  regulární soustavu lineárních rovnic):

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) \\ \hat{x}(t) &= c_1(t) x_1(t) + \dots + c_n(t) x_n(t) \\ \hat{x}'(t) &= c_1(t) x'_1(t) + \dots + c_n(t) x'_n(t) \\ &\quad + \underbrace{c'_1(t) x_1(t) + \dots + c'_n(t) x_n(t)}_{=0} \\ \hat{x}''(t) &= c_1(t) x''_1(t) + \dots + c_n(t) x''_n(t) \\ &\quad + \underbrace{c'_1(t) x'_1(t) + \dots + c'_n(t) x'_n(t)}_{=0} \\ &\quad \vdots \\ \hat{x}^{(n)}(t) &= c_1(t) x_1^{(n)}(t) + \dots + c_n(t) x_n^{(n)}(t) \\ &\quad + c'_1(t) x_1^{(n-1)}(t) + \dots + c'_n(t) x_n^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

**Příklad.**  $x'' + x = \frac{1}{\cos t}, t \in I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

LDR, funkce  $\frac{1}{\cos t}$  spojitě na  $I$ , řešení na  $I$ .

Char. rovnice  $\lambda^2 + 1 = 0, \lambda_{1,2} = \pm j$ , báze  $\{\cos t, \sin t\}$ ,

$\tilde{x}(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \hat{x}(t) = c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t,$

$$\begin{aligned} c'_1(t) \cos t + c'_2(t) \sin t &= 0 \\ -c'_1(t) \sin t + c'_2(t) \cos t &= \frac{1}{\cos t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c'_1(t) &= -\operatorname{tg} t, c_1(t) = \ln |\cos t|, c'_2(t) = 1, c_2(t) = t, \\ x(t) &= \ln(\cos t) \cdot \cos t + t \sin t + c_1 \cos t + c_2 \sin t. \end{aligned}$$

**Metoda odhadu** pro nalezení partikulárního řešení LDR s konstantními koef. a kvazipolynomiální pravou stranou:

Jsou-li  $P, Q$  polynomy stupně nejvýše  $m$ ,

$$b(t) = e^{\alpha t} (P(t) \cos \beta t + Q(t) \sin \beta t),$$

$(\alpha + \beta j)$  (číslo pravé strany) je  $k$ -násobný kořen charakteristické rovnice, pak existuje partikulární řešení ve tvaru

$$\hat{x}(t) = t^k e^{\alpha t} (\hat{P}(t) \cos \beta t + \hat{Q}(t) \sin \beta t),$$

kde  $\hat{P}, \hat{Q}$  jsou polynomy stupně nejvýše  $m$ .

**Příklad.**  $x'' - 4x = e^{2t} - 4 \cos 2t$ .

Pravá strana je spojitá na  $\mathbb{R}$ , řešení budou na  $\mathbb{R}$ .

Charakteristická rovnice:  $\lambda^2 - 4 = 0$ , řešení  $\lambda_{1,2} = \pm 2$ .

Obecné řešení přidružené hom.:  $\tilde{x}(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$ .

Pro  $b_1(t) = e^{2t}$ : číslo pravé strany  $2 + 0j = 2$  je kořen char. rovnice násobnosti 1, partikulární řešení  $\hat{x}_1(t) = At e^{2t}$ .

Pro  $b_2(t) = -4 \cos t$ :  $0 + 2j = 2j$  není kořen char. rovnice, partikulární řešení  $\hat{x}_2(t) = B \cos 2t + C \sin 2t$ .

Princip superpozice:  $\hat{x}(t) = At e^{2t} + B \cos 2t + C \sin 2t$ .

Do DR:  $4A e^{2t} - 8B \cos 2t - 8C \sin 2t = e^{2t} - 4 \cos 2t$ .

Provnáním koeficientů u jednotlivých funkcí:

$$\begin{aligned} e^{2t} : \quad 4A &= 1, \\ \cos 2t : \quad -8B &= -4, \\ \sin 2t : \quad -8C &= 0. \end{aligned}$$

Řešení soustavy lineárních rovnic:  $A = \frac{1}{4}$ ,  $B = \frac{1}{2}$ ,  $C = 0$ .

Partikulární řešení:  $\hat{x}(t) = \frac{1}{4} t e^{2t} + \frac{1}{2} \cos 2t$ .

Obecné řešení:  $x(t) = \frac{1}{4} t e^{2t} + \frac{1}{2} \cos 2t + c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  ( $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ).

### Numerické řešení diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\boxed{x' = f(t, x), \quad x(a) = x_0, \quad t \in \langle a, b \rangle}$$

$h = (b - a)/n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ... *krok diskretizace*

$t_i = t_0 + ih$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

$x_i$  ... numerické řešení v  $t_i$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

(globální diskretizační) chyba v  $t_i$ :  $x(t_i) - x_i$

lokální diskretizační chyba v  $t_i$ :  $\tilde{x}_{i-1}(t_i) - x_i$ , kde  $\tilde{x}_{i-1}$  je řešení pro počáteční podmínku  $x(t_{i-1}) = x_{i-1}$  ( $i > 0$ )

metoda je řádu  $p$ : chyba je  $O(h^p)$

odhad chyby *metodou polovičního kroku*: spočítáme  $y_i$  pro krok  $h/2$ , chyba  $y_{2i}$  je přibližně  $c_i = (y_{2i} - x_i)/(2^p - 1)$ .

*Richardsonova extrapolace*:  $y_{2i} + c_i$ .

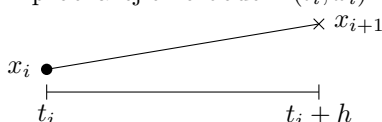
**Eulerova metoda** (1. řádu) vychází z aproximace derivace (dopředným) diferenčním podílem

$$\begin{aligned} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} &\approx x'(t_i) = f(t_i, x_i), \\ \frac{x_{i+1} - x_i}{h} &= f(t_i, x_i), \\ x_{i+1} &= x_i + h f(t_i, x_i). \end{aligned}$$

Lokální diskretizační chyba se odvodí z Taylorovy věty:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i(t_{i+1}) &= x_i + h \tilde{x}'_i(t_i) + O(h^2) \\ &= x_i + h f(t_i, x_i) + O(h^2) = x_{i+1} + O(h^2). \end{aligned}$$

Geometricky to odpovídá nalezení  $x_{i+1}$  na tečně grafu řešení procházejícího bodem  $(t_i, x_i)$ .



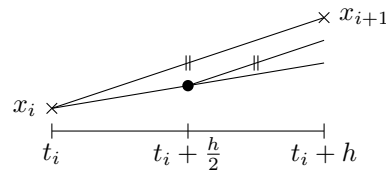
**Poznámka.** Obecná Rungeova–Kuttova metoda: podle Lagrangeovy věty pro některé  $c_i \in (t_i, t_{i+1})$  platí

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + h x'(c_i) = x(t_i) + h f(c_i, x(c_i)),$$

$f(c_i, x(c_i))$  aproximujeme váženým průměrem hodnot  $f$  ve vybraných bodech ( $f(t_i, x_i)$  pro Eulerovu metodu).

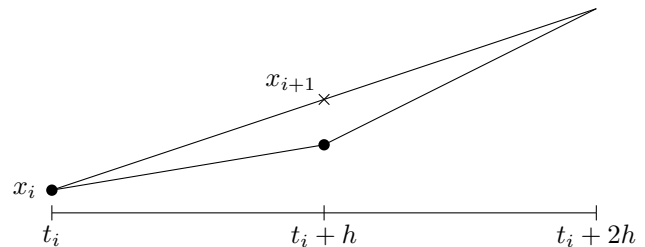
**Metoda středního bodu** (2. řádu): použijeme hodnotu  $f$  v bodě získaném Eulerovou metodou s polovičním krokem.

$$x_{i+1} = x_i + h f\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} f(t_i, x_i)\right).$$



**Heunova metoda** (2. řádu): použijeme průměr hodnot  $f$  v  $(t_i, x_i)$  a v bodě získaném Eulerovou metodou.

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{2} h [f(t_i, x_i) + f(t_i + h, x_i + h f(t_i, x_i))].$$



**Nyströmová metoda** (2. řádu) vychází z aproximace derivace symetrickým diferenčním podílem

$$\begin{aligned} \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h} &\approx x'(t) = f(t, x(t)) \\ \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2h} &= f(t_i, x_i) \\ x_{i+1} &= x_{i-1} + 2h f(t_i, x_i) \end{aligned}$$