

Reálná čísla

\mathbb{N} ... přirozená čísla: $\{1, 2, 3, \dots\}$
 \mathbb{Z} ... celá čísla: $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$
 \mathbb{Q} ... racionální čísla: $\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$
 \mathbb{R} ... reálná č.: délky, doplnění limit, supremum/infim, řezy
 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$... iracionální čísla ($\sqrt{2}, \pi, e, \dots$)
 \mathbb{C} ... komplexní čísla: $\{x + jy : x, y \in \mathbb{R}\}, j^2 = -1$

Tvrzení. Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.

Důkaz: Sporem, předpokládejme $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$ nesoudělná. Pak $2b^2 = a^2$; a je dělitelné 2; existuje $c \in \mathbb{N}$ tak, že $a = 2c$; $b^2 = 2c^2$; b je dělitelné 2; a, b soudělná – spor.

Tvrzení. Racionální čísla jsou právě ta, která mají konečný nebo periodický dekadický rozvoj.

Důkaz: \Rightarrow : Při použití algoritmu dělení celých čísel a/b jsou možné zbytky jen $0, 1, \dots, b-1$, po přechodu přes desetinnou čárku se připisují jen 0, takže se po nejvýše $(b-1)$ krocích vše opakuje.

\Leftarrow : Přenásobením číslem $10^{\text{délka periody}}$ a odečtením dostaneme, že celočíselný násobek má konečný dekadický rozvoj.

Tvrzení. Nenulová čísla s konečným dekadickým rozvojem mají dva dekadické rozvoje.

Příklady. $1/7 = 0,142857$, $1/3 = 0,\bar{3}$, $1/6 = 0,1\bar{6}$; $2,7 = 2\frac{7}{10}$; $2,7\bar{3}1 = \frac{2704}{990}$; $2,3 = 2,2\bar{9}$.

(lineární) uspořádání \mathbb{R} , reálná osa

Definice. Reálné číslo x se nazývá:

kladné, pokud $x > 0$;
záporné, pokud $x < 0$;
nezáporné, pokud $x \geq 0$;
nekladné, pokud $x \leq 0$.

Definice. Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, rozeznáváme tyto typy intervalů s krajními body a, b :

$\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (otevřený);
 $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ pro $a, b \in \mathbb{R}$ (uzavřený);
 $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ pro $b \in \mathbb{R}$ (zleva otevřený, zprava uzavřený);
 $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ pro $a \in \mathbb{R}$ (zleva uzavřený, zprava otevřený).

Body intervalu, které nejsou krajní, nazýváme vnitřní.

Tvrzení. V každém intervalu existuje nekonečně mnoho racionálních i iracionálních čísel (hustota \mathbb{Q} i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ v \mathbb{R}).

Definice. Rozšířená množina reálných čísel je $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, kde $-\infty$ a $+\infty$ se nazývají nevlastní čísla. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ pokládáme:

- 1) $-\infty < x < +\infty$
- 2) $|-\infty| = |+\infty| = +\infty$
- 3) $x + \infty = \infty, \quad \infty + \infty = \infty,$
 $x - \infty = -\infty, \quad -\infty - \infty = -\infty,$
 $x \cdot \infty = \begin{cases} +\infty, & x > 0, \\ -\infty, & x < 0, \end{cases} \quad \infty \cdot \infty = \infty,$
 $\frac{x}{\infty} = 0.$

Nedefinujeme: $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}$.

Poznámka. Využití: věty o limitách, popisy intervalů:

$(-\infty, 0) = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\},$
 $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ (otevřené i s $\pm\infty$).

Definice. Necht $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $z \in \bar{\mathbb{R}}$ se nazývá: horní závora M , pokud $M \leq z$ ($x \leq z$ pro každé $x \in M$); dolní závora M , pokud $z \leq M$ ($z \leq x$ pro každé $x \in M$). Množina M se nazývá: shora omezená, pokud má reálnou horní závora; zdola omezená, pokud má reálnou dolní závora; omezená, pokud je shora i zdola omezená.

Příklady.

- 1) \mathbb{N} je zdola omezená, není shora omezená.
- 2) \mathbb{Z} není omezená ani zdola, ani shora.
- 3) $(0, 1)$ je omezená.

Definice. Necht $M \subset \mathbb{R}$.

Maximum M ($\max M$) je největší prvek M .
Minimum M ($\min M$) je nejmenší prvek M .
Supremum M ($\sup M$) je nejmenší horní závora M .
Infimum M ($\inf M$) je největší dolní závora M .

Příklady.

$\max \mathbb{N}$ neexistuje, $\sup \mathbb{N} = +\infty,$
 $\max(0, 1) = 1, \sup(0, 1) = \min(1, +\infty) = 1,$
 $\max(0, 1)$ neexistuje, $\sup(0, 1) = \min(1, +\infty) = 1$
 $\sup \emptyset = -\infty, \inf \emptyset = +\infty$

Poznámky.

- 1) Jestliže existuje maximum (minimum) množiny, pak je zároveň supremem (infimem) této množiny.
- 2) $\max M$ ($\min M$) existuje právě tehdy, když $\sup M \in M$ ($\inf M \in M$).

Věta. Každá množina reálných čísel má supremum i infimum (jediné).

Řez $(A|B)$: $A, B \subset \mathbb{Q}$ neprázdné, $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A < B$.

Řezy s $\max A$ nebo $\min B$ odpovídají racionálním číslům (uvažujeme např. druhý typ), ostatní iracionálním. Rozšiřujeme relace a operace z \mathbb{Q} :

$(A_1|B_1) \leq (A_2|B_2)$ pro $A_1 \subset A_2$;
 $(A_1|B_1) + (A_2|B_2) = (\dots|B_1 + B_2)$;
 $(A_1|B_1) \cdot (A_2|B_2) = (\dots|B_1 \cdot B_2)$ pro $0 \in A_1 \cap A_2$.

Platí $\sup_{x \in M} (A_x|B_x) = (\bigcup_{x \in M} A_x|\dots)$, pokud přidáme $(\mathbb{Q}, \emptyset) \sim +\infty$.

Korespondence řezů a dekadických rozvoju.

Věta (princip vnořených intervalů). Jsou-li I_n ($n \in \mathbb{N}$) uzavřené intervaly a $I_1 \supset I_2 \supset \dots$, pak $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. Jestliže navíc délky intervalů I_n klesají k nule, pak je tento průnik jednobodový.

Důkaz: Označme $I_n = \langle a_n, b_n \rangle$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z předpokladů vyplývá, že $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$. Množina $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ je neprázdná, shora omezená každým číslem b_n , má tedy v \mathbb{R} supremum, označme ho a . Protože $a \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, má množina $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ v \mathbb{R} infimum, označme ho b . Protože $a \leq b$, je $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \neq \emptyset$. Jestliže délky intervalů I_n klesají k nule, pak $a = b$.

Poznámka. Podmínka uzavřenosti intervalů ve výše uvedené větě je podstatná: je-li $I_n = (0, \frac{1}{n})$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \emptyset$.

Funkce

Definice. (Reálná) funkce (reálné proměnné) f je zobrazení $A \rightarrow \mathbb{R}$, kde $A \subset \mathbb{R}$ je neprázdná.

Množina A je *definiční obor* funkce f ($D(f)$), množina $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ je *obor hodnot* funkce f ($R(f)$).

Graf funkce f je množina $\{[x, f(x)] : x \in D(f)\}$.

Poznámka. Pokud není zadán definiční obor, bereme maximální možný.

Definice. Funkce $f : A \rightarrow B$ je:

prostá, pokud různým vzorům odpovídají různé obrazy;

na B , pokud její obor hodnot je B ($f : A \xrightarrow{\text{na}} B$);

vzájemně jednoznačná (bijekce), pokud je prostá na B .

Příklady.

1) x^2 není prostá ($f(1) = f(-1)$), je na $\langle 0, +\infty \rangle$.

2) x^3 je prostá na \mathbb{R} .

Poznámka. Neostře uspořádání $f \leq g$ a operace sčítání, odčítání, násobení a dělení funkcí definujeme „bodově“.

Definice. Složení funkcí $f : A \rightarrow B$ a $g : B \rightarrow C$ je funkce $g \circ f : A \rightarrow C$ definovaná předpisem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Příklad. $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = (2x)^2 = 4x^2,$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) = 2x^2.$$

Definice. Funkce $g : R(f) \rightarrow A$ je *inverzní* k funkci $f : A \rightarrow B$, pokud $(g \circ f)(x) = x$ pro každé $x \in A$. Značíme $g = f_{-1}$.

Věta. Funkce f má inverzní funkci právě tehdy, když je prostá. Pak $D(f_{-1}) = R(f)$, $R(f_{-1}) = D(f)$, f je inverzní funkce k f_{-1} a graf f_{-1} je symetrický s grafem f podle osy prvního a třetího kvadrantu (přímky o rovnici $y = x$).

Příklad. $f(x) = e^x : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} (0, +\infty)$ je prostá, má inverzní $f_{-1}(x) = \ln x : (0, +\infty) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}$; $f_{-1} \circ f \neq f \circ f_{-1}$.

Definice. Funkce f je (zdola, shora) omezená na $A \subset \mathbb{R}$, pokud je (zdola, shora) omezená množina $f(A)$.

Poznámka. Pokud neurčujeme A , myslíme $D(f)$.

Příklady.

1) x^2 je zdola omezená ($x^2 \geq 0$), není shora omezená.

2) $\arctg x$ je omezená.

3) x^3 není omezená zdola ani shora.

Definice. Funkce f je *rostoucí (klesající, neklesající, nerostoucí)* na množině $A \subset D(f)$, pokud $f(x) < f(y)$ ($f(x) > f(y)$, $f(x) \leq f(y)$, $f(x) \geq f(y)$) pro všechna $x, y \in A$ taková, že $x < y$. Takové funkce se nazývají *monotonní*, rostoucí a klesající funkce se nazývají *ryze monotonní*.

Příklady.

1) x^2 je klesající na $(-\infty, 0)$, rostoucí na $\langle 0, +\infty \rangle$.

2) $\text{sign } x$ je neklesající.

3) $\frac{1}{x}$ je klesající na $(-\infty, 0)$ a na $(0, +\infty)$, není monotonní.

Věta. Rostoucí (klesající) funkce je prostá a má inverzní funkci, která je rovněž rostoucí (klesající).

Definice. Funkce f je:

sudá, pokud $f(-x) = f(x)$ pro každé $x \in D(f)$;

lichá, pokud $f(-x) = -f(x)$ pro každé $x \in D(f)$.

Příklady. 1) x^2 je sudá. 2) x^3 je lichá.

Poznámka. Graf sudé funkce je symetrický podle osy y , graf liché funkce je symetrický podle počátku.

Definice. Funkce f je *periodická* s *periodou* $p > 0$, pokud $f(x+p) = f(x-p) = f(x)$ pro každé $x \in D(f)$.

Poznámka. Pro periodu p , jsou i np ($n \in \mathbb{N}$) periody. Nejmenší perioda (pokud existuje) se nazývá *základní*.

Příklad. Funkce $\sin x$ má základní periodu 2π .

Lineární transformace a graf funkce:

1) Graf $f(x) + c$ je posunutý o c ve směru osy y .

2) Graf $f(x + c)$ je posunutý o $-c$ ve směru osy x .

3) Graf $c f(x)$ je c -krát roztážený od osy x .

4) Graf $f(cx)$ ($c \neq 0$) je c -krát stažený k ose y .

(Pro $c < 0$ opačná orientace nebo překlopení.)

Definice. Množiny A, B mají stejnou *mohutnost* (kardinalitu), pokud existuje bijekce $A \xrightarrow{\text{na}} B$. Množiny které mají mohutnost \mathbb{N} , se nazývají *spočetné*.

Tvrzení. \mathbb{Q} je spočetná, \mathbb{R} je nespočetná.

Důkaz: 1) $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ v základním tvaru přiřadíme přirozeným číslům primárně vzestupně podle $|a| + b$, pak libovolně.

2) Pro $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ najdeme dekadický rozvoj čísla, které není v $f(\mathbb{N})$: jako n -tou cifru dekadického rozvoje vybereme cifru různou od n -té cifry dekadického rozvoje $f(n)$ a od 9.

Elementární funkce

Mocniny x^a

$a \in \mathbb{N}$: $x^a = x \cdot \dots \cdot x$ ($a \times$); inverzní $\sqrt[a]{x}$ ($\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$); $x^0 = 1$ i pro $x = 0$; $x^{-a} = 1/x^a$;

$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p, q nesoudělná:

$D(x^{p/q})$	q liché	q sudé ($x \geq 0$)
$p \geq 0$	\mathbb{R}	$\langle 0, +\infty \rangle$
$p < 0$ ($x \neq 0$)	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(0, +\infty)$

pro $a \notin \mathbb{Q}$ pokládáme $x^a = e^{a \ln x}$, tedy $D(f) = (0, +\infty)$.

Exponenciální o základu $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$: a^x (impl. e^x);

inverzní: *logaritmus o základu* a : $\log_a x$;

($\log x = \log_{10} x$ *dekadický*, $\ln x = \log_e x$ *přirozený*).

Pro $x \in \mathbb{Q}$ je a^x definováno (viz mocniny),

pro $x \notin \mathbb{Q}$ dodefinujeme monotónně, tj. např. pro $a > 1$:

$a^x = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < x\} = \inf\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q > x\}$.

Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ a každé $a > 0$ platí

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Pro každé $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ platí

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad x, y > 0,$$

$$\log_a x^y = y \log_a x, \quad x > 0.$$

Exponenciální funkce i logaritmy lze převést na základ e :

$$a^x = e^{x \cdot \ln a}, \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

goniometrické: $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$;
 inverzní: $\arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arccotg} x$.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

hyperbolické:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x};$$

inverzní: $\operatorname{argsinh} x, \operatorname{argcosh} x, \operatorname{argtgh} x, \operatorname{argcotgh} x$.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Poznámka. V \mathbb{C} :

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}), \quad \sin x = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx}).$$

Limity a spojitost funkcí

Definice. Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $r > 0$ je

$$U(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} = (a - r, a + r).$$

Prstencové okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ o poloměru $r > 0$ je

$$P(a, r) = U(a, r) \setminus \{a\} = (a - r, a) \cup (a, a + r).$$

Okolí bodů $\pm\infty$ jsou (r je reálné číslo):

$$U(-\infty, r) = P(-\infty, r) = \{x \in \mathbb{R} : x < r\} = (-\infty, r),$$

$$U(+\infty, r) = P(+\infty, r) = \{x \in \mathbb{R} : x > r\} = (r, +\infty).$$

Definice. Funkce f definovaná v prstencovém okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ má v bodě a limitu $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$), jestliže platí: Ke každému okolí U bodu b existuje prstencové okolí P bodu a tak, že $f(P) \subset U$.

Poznámka. Obecněji limita v hromadném bodě definičního oboru (v každém prstencovém okolí leží bod $D(f)$) je dána podmínkou $f(P \cap D(f)) \subset U$.

Tvrzení. Pro každé $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí:

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ pro každé $c \in \mathbb{R}$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} x = a$.

Důkaz: 1) $f^{-1}(U) = \mathbb{R}$ pro každé U , např. $P = P(a, 1)$.

2) $f^{-1}(U) = U$ pro každé U , např. $P = U \setminus \{a\}$.

Příklad. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ neexistuje: pro $b \in \overline{\mathbb{R}}$ existuje $U_b \not\subset \langle -1, 1 \rangle$, $f^{-1}(U_b)$ neobsahuje prstencové okolí $+\infty$.

Jednostranné limity zleva/zprava pro levá/pravá prstencová okolí a (body prstencového okolí nalevo/napravo od a).

Příklad. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sign} x = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sign} x = +1$.

Věta. Pro funkci f definovanou v prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ právě tehdy, když $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$.

Důkaz: \Rightarrow : pro $P(a, \delta)$ bereme jednostranná prstencová okolí $(a - \delta, a)$, $(a, a + \delta)$

\Leftarrow : pro $(a - \delta_-, a)$, $(a, a + \delta_+)$, $\delta = \min\{\delta_-, \delta_+\}$ bereme $P(a, \delta)$

Poznámka. Věty lze formulovat i pro jednostranné limity.

Věta (o jednoznačnosti). Každá funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.

Důkaz: Pokud má v a limitu b , tak jiné číslo $c \in \overline{\mathbb{R}}$ není limitou: existují disjunktní okolí U_b, U_c bodů b, c , $f^{-1}(U_c)$ je disjunktní s $f^{-1}(U_b)$ a neobsahuje tedy prstencové okolí a .

Věta (o monotonii). Je-li $f \leq g$ na prstencovém okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, pak $b \leq c$.

Důkaz (sporem): Pro $b > c$ existují disjunktní okolí U_b, U_c bodů b, c a prstencová okolí $P_f \subset f^{-1}(U_b)$, $P_g \subset g^{-1}(U_c)$ bodu a , pro $x \in P_f \cap P_g$ je $f(x) > g(x)$ – spor.

Příklad. Ne pro $<: 0 < \frac{1}{x}$ na $(0, +\infty)$, v $+\infty$ stejná limita.

Věta. Funkce s vlastní limitou v $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je omezená na prstencovém okolí a .

Důkaz: Existuje omezené okolí U limity, k němu P .

Věta. Funkce s kladnou (zápornou) limitou v $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je na prstencovém okolí a kladná (záporná).

Důkaz: Existuje okolí U limity neobsahující 0 , k němu P .

Věta. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ právě tehdy, když $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$.

Důkaz: $f(x) \in U(0, \varepsilon)$ právě tehdy, když $|f(x)| \in U(0, \varepsilon)$.

Věta. Monotonní funkce na intervalu má v jeho krajních bodech příslušné jednostranné limity (supremum a infimum funkčních hodnot).

Důkaz (pro f nekles. na $I = (a, b)$, $\rightarrow b^-$): $c = \sup f(I)$, pro $U(c, \varepsilon)$ existuje $d \in I$ s $f(d) > c - \varepsilon$, (d, b) je levé prstencové okolí b s $f((d, b)) \subset U(c, \varepsilon)$.

Příklad. $e^x : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} (0, +\infty)$ je rostoucí, tedy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \inf(0, +\infty) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \sup(0, +\infty) = +\infty.$$

Příklad.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ 0, & a < 0, \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = \begin{cases} 0, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ +\infty, & a < 0. \end{cases}$$

Věta (limita součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí). Limita součtu (rozdílu, součinu, podílu) funkcí je součet (rozdílu, součin, podíl) limit, pokud je definován (včetně operací s nevládnými čísly).

Důkaz (pro součet vlastních limit): Pro $U(b+c, \varepsilon)$ uvažujme $f(P_f) \subset U(b, \frac{\varepsilon}{2})$ a $f(P_g) \subset U(c, \frac{\varepsilon}{2})$, pak $(f+g)(P_f \cap P_g) \subset U(b+c, \varepsilon)$.

Příklady.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - 3x + 1) = |\infty - \infty + 1|$ nedefinováno
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(2 - 3x^{-1} + x^{-2}) = (+\infty) \cdot 2 = +\infty,$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{x^2 + 1} = \left| \frac{-\infty}{+\infty} \right|$ nedefinováno
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^{-1} - x^{-2}}{1 + x^{-2}} = \frac{0 - 0}{1 + 0} = 0,$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \left| \frac{0}{0} \right|$ nedefinováno
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2}.$

Věta. Je-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $g(x) > 0$ na prstencovém okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$, pak $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = +\infty$.

Poznámka. $\left| \frac{1}{0 \pm} \right| = \pm \infty$.

Příklady.

- $\lim_{x \rightarrow 1 \pm} \frac{2}{x - 1} = \left| \frac{2}{0 \pm} \right| = \pm \infty.$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x - 1)^2} = \left| \frac{-2}{0+} \right| = -\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{\ln(2 - x)}{x^2 - 4} = \left| \frac{-\infty}{0-} \right| = +\infty.$

Věta (o sevření). Je-li $f \leq h \leq g$ na prst. okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$, pak $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$.

Příklad.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

stačí $x \rightarrow 0+$ (sudá) a $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, věta o sevření:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sin x &< \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x} \\ 1 &< \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \\ 1 &> \frac{\sin x}{x} > \cos x \end{aligned}$$

Věta. Je-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, g je omezená na prstencovém okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$, pak $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

Důkaz: $|g| \leq M$, $0 \leq |f(x)g(x)| \leq M|f(x)|$, věta o sevření.

Poznámka. $|0 \cdot \text{om.}| = \left| \frac{\text{om.}}{\pm \infty} \right| = 0$.

Příklad. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = |0 \cdot \text{om.}| = 0$.

Věta. Je-li $f \leq g$ na prst. okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $(\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty)$, pak $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$).

Věta. Je-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \{\pm \infty\}$ a g je omezená na prstencovém okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$, pak $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = b$.

Důkaz: Pro $+\infty$: $g \geq M$, $f(x) + g(x) \geq f(x) + M \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$.

Poznámka. $|\pm \infty + \text{om.}| = \pm \infty$.

Příklad. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \cos x) = |+\infty + \text{om.}| = +\infty$.

Tvrzení. Jestliže $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ neexistuje, pak platí:

- Je-li $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ vlastní, pak $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x))$ neexistuje.
- Je-li $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ vlastní a nenulová, pak neexistují $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x))$ a $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)/g(x))$.

Důkaz: Sporem, existovala by $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ podle věty o limitě součtu, součinu, podílu.

Příklad. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{1 - 2^{-x}} = \left| \frac{\text{neex.}}{1} \right|$ neexistuje.

Věta (limita složené funkce). Necht' pro $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$ platí:

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$,
 - $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$,
 - $g(b) = c$ nebo $f(x) \neq b$ na prstencovém okolí a .
- Pak $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$.

Důkaz: U_c

(2): existuje $P_b: P_b \xrightarrow{g} U_c$

(1): existuje $P_a: P_a \xrightarrow{f} P_b \cup \{b\}$

(3): pro $g(b) = c$ je $P_b \cup \{b\} \xrightarrow{g} U_c$, $P_a \xrightarrow{g \circ f} U_c$,

jinak existuje $P'_a: P'_a \xrightarrow{f} P_b$, $P'_a \xrightarrow{g \circ f} U_c$

Příklad. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = \lim_{y \rightarrow 0} e^y = 1$ ($\frac{1}{x} \neq 0$).

Příklad. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$;
 $g(y) = 0$ pro $y \neq 0$, $g(0) = 1$: $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 0$;
 $(g \circ f)(x) = 1$ pro $x \in \{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, jinak 0;
 $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x)$ neexistuje.

Definice. Funkce f je spojité v bodě $a \in D(f)$, pokud ke každému okolí U bodu $f(a)$ existuje okolí V bodu a tak, že $f(V \cap D(f)) \subset U$. Funkce je spojité, pokud je spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Věta. Funkce f definovaná v okolí bodu a je v bodě a spojité právě tehdy, když $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Poznámka. Funkce f je spojité v izolovaných bodech $D(f)$ (pro které je $D(f)$ disjunktní s některým prst. okolím).

Poznámka. Podobně spojitosti zleva/zprava.

Příklady. 1) x je spojité.

2) $\text{sign } x$ je spojité v bodech $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, není spojité v bodě 0.

3) Charakteristická funkce $\langle 0, +\infty \rangle$ je spojité v bodech $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, zprava spojité v 0.

4) Dirichletova funkce není spojité v žádném bodě (v žádném nemá limitu):

$$d(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Poznámka. Po částech spojité funkce: v každém omezeném intervalu jen konečně mnoho bodů nespojitosti, v nich konečné jednostranné limity.

Věta. 1) Jsou-li f, g spojité v a , pak $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (pokud je definována), $|f|$ jsou spojité v a .

2) Je-li f spojité v a , pak je omezená na okolí a .

3) Je-li f spojité v a , $f(a) > 0$, pak $f(x) > 0$ na okolí a .

4) Je-li f spojité v a , g v $f(a)$, pak $g \circ f$ je spojité v a .

Věta. Racionální funkce jsou spojité.

Důkaz: Spojitost konstant, x , součtu, součinu a podílu.

Věta. Mocniny, exponenciální, goniometrické a hyperbolické funkce a funkce k nim inverzní jsou spojité.

Posloupnosti

Definice. (Nekonečná) posloupnost (reálných čísel) je zobrazení $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Značíme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, a_n je n -tý člen.

nekonečněrozměrný aritmetický vektor
obecněji $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$, $n_0 \in \mathbb{Z}$

Příklady.

1) $(2^n)_{n=1}^{\infty} = (2, 4, 8, \dots)$

$a_n = a_1 q^{n-1} \dots$ geometrická s kvocientem q .

2) $(1, 3, 5, 7, \dots)$

$a_n = a_1 + (n-1)d \dots$ aritmetická s diferencí d .

3) rekurentně $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ pro $n \in \mathbb{N}$:
 $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 11, \dots)$ (Fibonacciho)

Pojmy a věty jako pro funkce: omezená, monotonní (stačí vztahy mezi a_n, a_{n+1}), limita. Posloupnost s vlastní limitou je omezená (nejen lokálně).

Věta. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$), pokud pro každé okolí U bodu a existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n \in U$.

Definice. Posloupnost s vlastní limitou je konvergentní.

Věta. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ právě tehdy, když $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = b$ pro každou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ čísel z $D(f) \setminus \{a\}$ s $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Příklad. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ neexistuje:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \pi n = 0$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1$.

Definice. Vybraná posloupnost (podposloupnost) z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$, kde $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel.

Poznámka. $a_n = f(n)$, $k_n = g(n)$: $a_{k_n} = (f \circ g)(n)$.

Definice. Číslo $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadná hodnota posloupnosti, pokud v každém okolí a leží nekonečně mnoho jejích členů.

Věta. Limita posloupnosti je její hromadnou hodnotou. Hromadná hodnota posloupnosti je limitou některé její vybrané posloupnosti.

Důkaz: 1. Zřemé. 2. Okolí U_n hromadné hodnoty smřšťující se k ní, $a_{k_n} \in U_n$ tak, aby $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ byla rostoucí.

Příklad. Posl. $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ má hromadné hodnoty ± 1 .

Věta. Každá posloupnost má alespoň jednu hromadnou hodnotu (omezená posloupnost vlastní).

Důkaz: $-\infty$ nebo $+\infty$, pokud není omezená. Pro omezenou sestrojíme posloupnost vnořených (poloviční délky) uzavřených intervalů obsahujících nekonečně mnoho členů posloupnosti, jejich průnik obsahuje hromadnou hodnotu.

Věta. Supremum a infimum množiny hromadných hodnot posloupnosti jsou hromadné hodnoty této posloupnosti.

Důkaz: Okolí U obsahuje hrom. hodnotu a její okolí $U' \subset U$.

limes superior ($\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$)

limes inferior ($\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$)

Věta. Pro posloupnost je ekvivalentní:

1) Má limitu.

2) Má jedinou hromadnou hodnotu.

3) Limes inferior a limes superior posloupnosti jsou stejné.

4) Každá vybraná posloupnost má stejnou limitu.

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta (Weierstrass). Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá největší a nejmenší hodnoty.

Důkaz: Pro $m = \sup f(I)$ existuje posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taková, že $f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m$, ta má v I hromadnou hodnotu a , k ní konverguje vybraná posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$, ze spojitosti f vyplývá $f(a_{k_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a)$, tedy $m = f(a)$.

Příklady.

1) $f(x) = \frac{1}{x}$ na $(0, 1)$ (ryze monotonní funkce na otevřeném intervalu) nenabývá maxima ani minima.

2) $f(x) = -x - 1$ na $\langle -1, 0 \rangle$, $f(0) = 0$, $f(x) = 1 - x$ na $(0, 1)$ nenabývá extrémů.

Věta (o mezihodnotě). Je-li funkce f spojitá na intervalu I a nabývá-li v něm hodnot m a M , $m < M$, pak v tomto intervalu nabývá všech hodnot z intervalu $\langle m, M \rangle$.

Důkaz: $c \in (m, M)$, m, M se nabývají v krajních bodech intervalu I_1 , sestrojíme posloupnost vnořených (poloviční délky) intervalů s hodnotami v krajních bodech kolem c , jejich průnik obsahuje a , pro které $f(a) = c$.

Důsledky.

1) Pro spojitou nekonstantní funkci je obrazem intervalu interval (uzavřeného uzavřený).

2) Spojitá funkce na intervalu je prostá (má inverzní funkci) právě tehdy, když je ryze monotonní.

Důkaz: 2) Např. pro $x_1 < x_2 < x_3$, $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$, $f(x_1), f(x_3) < c < f(x_2)$ ex. vzory c v (x_1, x_2) i v (x_2, x_3) .

Poznámka. Metoda bisekce pro hledání nulového bodu spojitě funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$, $f(a)f(b) < 0$, používá metodu důkazu věty o mezihodnotě.

Věta. Inverzní funkce k ryze monotonní funkci na intervalu je spojitá.

Důkaz: f na I , $a \in D(f_{-1})$, $a = f(b)$, např. b vnitřní bod I , $U = (c, d) \subset I$ okolí b , existuje okolí V bodu a neobsahující $f(c), f(d)$, $f_{-1}(V \cap D(f_{-1})) \subset U$.

Příklad. $f(x) = x$ na $\langle 0, 1 \rangle$, $f(x) = x - 1$ na $(2, 3)$ je rostoucí (i spojitá), inverzní není spojitá v 1.

Derivace funkce

„Okamžitá“ změna funkce jako limita průměrných změn.

Definice. Derivace funkce f v bodě a je

$$\frac{df}{dx}(a) = f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Poznámky.

- 1)
$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
- 2) Podobně jednostranné derivace.
- 3) Derivace funkce v bodě: $f'(a)$ (číslo, i nevlastní).
Derivace funkce: $f': a \mapsto f'(a)$ (funkce, jen vlastní hod.).
Derivace: $': f \mapsto f'$ (operátor).
- 4) Funkce f má derivaci na intervalu I , pokud f' existuje na I (v případných krajních bodech I příslušná jednostranná).

Příklad. Pro funkci $f(x) = \sqrt[3]{x}$ je

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \left| \frac{1}{0^+} \right| = +\infty.$$

Věta.

- 0) $(c)' = 0 \quad x \in \mathbb{R} \text{ (} c \in \mathbb{R} \text{ je konstanta).}$
- 1) $(x^a)' = ax^{a-1} \quad x \in D(x^a) \text{ pro } a \notin (0, 1),$
 $x \in D(x^a) \setminus \{0\} \text{ pro } a \in (0, 1).$
- 2) $(e^x)' = e^x \quad x \in \mathbb{R}.$
- 3) $(\sin x)' = \cos x \quad x \in \mathbb{R}.$
 $(\cos x)' = -\sin x \quad x \in \mathbb{R}.$

Důkaz: 0) $(c)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$

$$\begin{aligned} 1) \text{ pro } a \in \mathbb{N}: (x^n)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [(x+h)^n - x^n] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (x^n + nx^{n-1}h + \dots + h^n - x^n) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (nx^{n-1} + \dots + h^{n-1}) = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

$$2) (e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ pro } \sin x: (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x+h/2) \sin h/2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x+h/2) \cdot \lim_{h/2 \rightarrow 0} \frac{\sin h/2}{h/2} = \cos x \cdot 1 = \cos x. \end{aligned}$$

Příklady.

- 1) $(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2, x \in \mathbb{R}.$
- 2) $(\sqrt[3]{x})' = (x^{1/3})' = \frac{1}{3} x^{1/3-1} = 1/(3\sqrt[3]{x^2}), x \neq 0.$

Věta. Funkce je spojitá v každém bodě, ve kterém má vlastní derivaci.

$$\text{Důkaz: } f(x) = f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot (x-a) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a).$$

Příklady.

- 1) $\text{sign } x$ je nespojitá v 0,
 $\text{sign}'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sign } h - \text{sign } 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|h|} = \left| \frac{1}{0^+} \right| = +\infty.$
- 2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ je spojitá v 0, $f'(0) = +\infty.$
- 3) $f(x) = |x|$ je spojitá v 0, $f'(0)$ neexistuje:
 $f'_{\pm}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^{\pm}} \pm 1 = \pm 1.$

Poznámka. Existuje funkce spojitá na \mathbb{R} , která nemá v žádném bodě derivaci.

Věta (o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu). *Mají-li funkce f, g vlastní derivace v bodě a , pak:*

- 1) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a);$
- 2) $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a);$
- 3) *je-li $g(a) \neq 0$, pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Důkaz:

$$\frac{(f \pm g)(x) - (f \pm g)(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \pm \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a) \pm g'(a);$$

$$\begin{aligned} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} &= \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)g(a) + f(a)g'(a);$$

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} &= \\ &= \frac{1}{g(a)g(x)} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right] \\ &\xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{1}{g(a)^2} [f'(a)g(a) - f(a)g'(a)]. \end{aligned}$$

Poznámky.

- 1) Podobně pro derivace funkcí (nejen v bodě).
- 2) Pro $c \in \mathbb{R}$ je $(cf)' = (c)'f + cf' = cf'$ („derivace násobku je násobek derivace“).
- 3) Zobrazení $': f \rightarrow f'$ je lineární.
- 4) $(f_1 + f_2 + \dots + f_n)' = f_1' + f_2' + \dots + f_n'$,
 $(f_1 f_2 \dots f_n)' = f_1' f_2 \dots f_n + f_1 f_2' \dots f_n + \dots + f_1 f_2 \dots f_n'$.

Příklady.

- 1) $(3x^2 + 2x + 7)' = 6x + 2.$
- 2) $(x^2 e^x \sin x)' = 2x e^x \sin x + x^2 e^x \sin x + x^2 e^x \cos x.$
- 3) $(\text{tg } x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$

Věta (o derivaci složené funkce). *Má-li f vlastní derivaci v a , g vlastní derivaci v $f(a) = b$, pak $g \circ f$ má v a derivaci*

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a).$$

Důkaz: Označme $f(x) = y$. Funkce

$$t(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(b)}{y-b}, & y \neq b, \\ g'(b), & y = b, \end{cases}$$

je spojitá v b , v okolí b je $g(y) - g(b) = t(y)(y - b)$, platí

$$\begin{aligned} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} &= \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \\ &= \frac{g(y) - g(b)}{x - a} = \frac{t(y)(y - b)}{x - a} = \\ &= t(y) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a (\Rightarrow y \rightarrow b)} g'(b) f'(a). \end{aligned}$$

Poznámky.

- 1) Schematicky pro $f(x) = y, g(y) = z: \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$
- 2) $(f_n \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)' = f_n' \dots f_2' f_1'.$

Příklady.

- 1) $(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x$.
- 2) $(e^{\cos x^3})' = e^{\cos x^3} \cdot (-\sin x^3) \cdot 3x^2$.
- 3) $(f(ax))' = f'(ax) \cdot a$.

Poznámka. Obecnější vzorce pro $a \in \mathbb{R}$ (na \mathbb{R}):

$$(e^{ax})' = a e^{ax}, (\sin ax)' = a \cos ax, (\cos ax)' = -a \sin ax.$$

Derivací $(f_{-1} \circ f)(x) = x$ dostaneme $f'_{-1}(f(x)) \cdot f'(x) = 1$.

Věta (o derivaci inverzní funkce). *Je-li funkce f spojitá a ryze monotonní na intervalu I a existuje-li nenulová derivace funkce f v $a \in I$, pak*

$$f'_{-1}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Důkaz: Označme $y = f(x)$, $b = f(a)$. $f(I)$ je otevřený interval, existuje spojitá f_{-1} na $f(I)$.

$$\frac{f_{-1}(y) - f_{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} \xrightarrow{y \rightarrow b (\Leftrightarrow x \rightarrow a)} \frac{1}{f'(a)}.$$

Poznámka. Obvykle vycházíme z funkce, jejíž derivaci chceme spočítat, takže podmínky monotonie a nenulovosti derivace ověříme pro inverzní funkci.

Příklad. $\ln x$ je inverzní k e^y , která je spojitá, rostoucí a má nenulovou derivaci. Pro $x \in D(\ln) = (0, +\infty)$ je

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Věta.

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2 + 1}, (\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, (\operatorname{arccos} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

Příklad. Důkaz vzorce o derivaci x^a pro $a \in \mathbb{R}$, $x > 0$:

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = a x^{a-1}.$$

Definice. Derivací řádu n (n -tou derivací) funkce f značíme $f^{(n)}$ nebo $\frac{d^n f}{dx^n}$ a definujeme rekurentně

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(n)} = (f^{(n-1)})' \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Příklad. Pro $f(x) = 1/x = x^{-1}$ dostáváme

$$f'(x) = (-1)x^{-2}$$

$$f''(x) = ((-1)x^{-2})' = (-1)(-2)x^{-3}$$

$$f'''(x) = ((-1)(-2)x^{-3})' = (-1)(-2)(-3)x^{-4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Poznámky.

- 1) Derivace řádu n je lineární zobrazení, takže $(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_k f_k)^{(n)} = c_1 f_1^{(n)} + c_2 f_2^{(n)} + \dots + c_k f_k^{(n)}$.
- 2) Derivace součinu dvou funkcí se počítají následovně:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''$$

$$(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

$$\vdots$$

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Geometrické aplikace

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$... směrnice sečny body $[a, f(a)], [x, f(x)]$

$f'(a)$... směrnice tečny v $[a, f(a)]$

tečna: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

směrový vektor tečny (kolmý k normále): $(1, f'(a))$

normála:

$$x + f'(a)y = a + f'(a)f(a)$$

$$x = a, \quad \text{pro } f'(a) = 0,$$

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a) \quad \text{pro } f'(a) \neq 0.$$

Příklad. Určete tečnu a normálu grafu funkce $f(x) = e^x$ v bodě $[1, ?]$.

$$f(1) = e, f'(x) = e^x, f'(1) = e$$

$$\text{tečna: } y = f(1) + f'(1)(x - 1) = e + e(x - 1) = ex$$

$$\text{normála: } y = e + e(x - 1) = -\frac{1}{e}x + (e + e^{-1})$$

Věty o střední hodnotě

Věta (Rolleova). *Nechť pro funkci f platí*

- (1) je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$;
- (2) má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) ;
- (3) $f(a) = f(b)$.

Pak $f'(c) = 0$ pro některý bod $c \in (a, b)$.

Důkaz: pro konstantní je $f' = 0$ na (a, b) ; nekonstantní nabývá minima nebo maxima uvnitř $\langle a, b \rangle$; například pro maximum v bodě $c \in (a, b)$:

$$f'(c) = f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0,$$

$$f'(c) = f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Příklady. Žádný předpoklad nelze vypustit.

- 1) Funkce $f(x) = x$ na $\langle 0, 1 \rangle$, $f(1) = 0$ nesplňuje (1).
- 2) Funkce $f(x) = |x|$ na $\langle -1, 1 \rangle$ nesplňuje (2).
- 3) Funkce $f(x) = x$ na $\langle 0, 1 \rangle$ nesplňuje (3).

Věta (Lagrangeova, o přírůstku funkce). *Nechť funkce f je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a má derivaci v každém bodě (a, b) . Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že*

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Důkaz: funkce $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ splňuje podmínky Rolleovy věty, existuje $c \in (a, b)$:

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Tvrzení. *Je-li funkce f spojitá v bodě a zprava a existuje-li $f'(a+)$, pak*

$$f'_+(a) = f'(a+).$$

Důkaz: z existence $f'(a+)$ plyne existence vlastní derivace a tedy i spojitost f na pravém okolí a ; pro x z tohoto okolí podle Lagrangeovy věty existuje $c_x \in (a, x)$; pro $x \rightarrow a+$ je $c_x \rightarrow a+$; $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a+} f'(c_x) = \lim_{c_x \rightarrow a+} f'(c_x) = f'(a+)$

Poznámka. Podobně pro derivaci zleva, oboustrannou.

Příklad. $f(x) = \arcsin x$:

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \frac{1}{0+} \right| = +\infty.$$

Příklad. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$:

$$f'(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}) \text{ neex.}$$

Tvrzení (Cauchy). Necht funkce f, g jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$, mají vlastní derivaci na (a, b) a $g'(x) \neq 0$ na (a, b) . Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Důkaz: funkce $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$ splňuje podmínky Rolleovy věty, existuje $c \in (a, b)$:

$$0 = h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c),$$

protože $g'(x) \neq 0$ na (a, b) , je $g'(c) \neq 0$ a také $g(b) \neq g(a)$

l'Hospitalovo pravidlo

Věta (l'Hospitalovo pravidlo). Necht pro funkce f, g platí:

(1) $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$ nebo

$\lim_{x \rightarrow a+} |g(x)| = +\infty$,

(2) existuje $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Pak

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Důkaz: pro $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$:

f', g' existují a $g'(x) \neq 0$ na některém (a, b) , položíme $f(a) = g(a) = 0$ (pak f, g jsou spojité na $\langle a, b \rangle$); podle Cauchyovy věty pro $\langle a, x \rangle$ ($x \in (a, b)$) existuje $c_x \in (a, x)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \xrightarrow[c_x \rightarrow a+]{x \rightarrow a+} \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Poznámky.

1) Podobně pro limitu zleva či oboustrannou v $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

2) l'Hospitalovo pravidlo lze použít opakovaně.

Příklady.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left| \frac{0}{0} \right| \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left| \frac{+\infty}{+\infty} \right| \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{(1/2)x^{-1/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \left| \frac{+\infty}{+\infty} \right| \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \left| \frac{+\infty}{+\infty} \right| \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = |0 \cdot (-\infty)| = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \left| \frac{-\infty}{+\infty} \right| \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x = \exp[\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + 1/x)] = \exp[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+1/x)}{1/x}] =$$

$$\stackrel{\text{l'H}}{=} \exp[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/(1+1/x) \cdot (-1)/x^2}{-1/x^2}] = \exp[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+1/x}] = \exp 1 = e.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x) = |\infty - \infty| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{e^x} = -\infty.$$

Poznámka. Pokud limita podílu derivací neexistuje, nelze l'Hospitalovo pravidlo použít. To neznamená, že limita podílu funkcí neexistuje: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = \left| \frac{\text{omez.}}{+\infty} \right| = 0$, ale limita podílu derivací $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{1}$ neexistuje.

Poznámka. L'Hospitalovo pravidlo lze použít i pro výpočet limit posloupností, pokud najdeme vhodnou funkci. Například $\lim_{n \rightarrow \infty} e^n/n = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x/x = +\infty$.

Taylorův polynom

Věta (Taylor). Necht funkce f má spojité derivace do řádu $n \geq 0$ na $\langle a, x \rangle$, $f^{(n+1)}$ existuje v každém bodě (a, x) . Pak existuje $c \in (a, x)$ tak, že

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{T_n(x)} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

$T_n(x)$: Taylorův polynom funkce f v bodě a řádu n , zbytek v Lagrangeově tvaru.

Poznámky.

1) Podobně pro $\langle x, a \rangle$.

2) $n = 0$: $f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$ (Lagrange).

3) $f^{(n+1)}$ spojitá, x blízko $a \dots c$ blízko $a \dots f^{(n+1)}(c)$ blízko $f^{(n+1)}(a) \dots T_{n+1}$ přesnější

Důkaz:

$$\begin{aligned} T_n(a) &= f(a) \\ T'_n(a) &= f'(a) \\ &\vdots \\ T_n^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) \end{aligned}$$

$$f(x) = T_n(x) + M(x-a)^{n+1}$$

$$g(t) = f(t) - T_n(t) - M(t-a)^{n+1}, \quad t \in \langle a, x \rangle$$

Rolle $(n+1)$ -krát:

$$\exists c_1 \in (a, x): \quad \begin{aligned} g(x) &= 0 & g(a) &= 0 \\ g'(c_1) &= 0 & g'(a) &= 0 \end{aligned}$$

\vdots

$$\begin{aligned} \exists c_n \in (a, c_{n-1}): & \quad g^{(n)}(c_n) = 0 & g^{(n)}(a) &= 0 \\ \exists c \in (a, c_n): & \quad g^{(n+1)}(c) = 0 \end{aligned}$$

$$f^{(n+1)}(c) - 0 - M \cdot (n+1)! = 0$$

$$M = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Příklady.

$$e^x \sim 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

$$\cos x \sim 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

$$\sin x \sim x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

Poznámky.

1) Taylorův p. sudé (liché) funkce v 0 je funkce sudá (lichá).

2) Taylorův p. řádu n pro polynom P stupně $\leq n$ je P .

3) Taylorova řada: nekonečný součet.

Pro výpočet sinu nebo kosinu stačí interval $\langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$. Například $\cos \frac{45}{8}\pi = \cos \frac{13}{8}\pi = -\cos \frac{5}{8}\pi = \cos \frac{3}{8}\pi = \sin \frac{\pi}{8}$.

Příklad. Odhadněte $\sin \frac{\pi}{6}$ Taylorovým p. řádu 3 v 0.

$$T_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3, \quad T_3\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,499\,674\dots$$

Protože $T_3 = T_4$, je chyba

$$|\sin(\frac{\pi}{6}) - T_4(x)| = \left| \frac{\sin^{(5)}(c)}{5!} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right) \right| \leq \frac{1}{120} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^5 = 0,000\,327\dots$$

Skutečná chyba je dost přesně rovna tomuto odhadu, T_5 dá výrazně přesnější hodnotu 0,500\,002\dots

Příklad. Spočítejte číslo e s přesností 10^{-3} , víte-li, že $e < 3$.
 $f(x) = e^x$, $a = 0$, $e = f(1) \approx T_n(1)$
chyba $\left| \frac{e^c}{(n+1)!} 1^{n+1} \right| \leq \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$ pro $n \geq 6$
 $T_6(1) = 2,718\ 0\bar{5}$, chyba $0,000\ 226\dots$, odhad $0,000\ 595\dots$

Průběh funkce

Monotonie a extrém

Věta (o monotonii). *Je-li funkce f spojitá na intervalu I a má-li v každém vnitřním bodě I derivaci, pak:*

- 1) *Je-li $f'(x) > 0$ uvnitř I , pak f je rostoucí v I .*
- 2) *Je-li $f'(x) < 0$ uvnitř I , pak f je klesající v I .*
- 3) *Je-li $f'(x) \geq 0$ uvnitř I , pak f je neklesající v I .*
- 4) *Je-li $f'(x) \leq 0$ uvnitř I , pak f je nerostoucí v I .*

Důkaz: $x, y \in I$, $x < y$

Lagrange: $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$, $c \in (x, y)$

- 1) $f(x) - f(y) < 0 \dots f(x) < f(y) \dots$ rostoucí
- 2)–4) podobně

Poznámky.

- 1) Je-li $f' = 0$ na intervalu, pak f je konstantní.
- 2) Je-li $f' = g'$ na intervalu, pak f, g se liší o konstantu.

Příklad. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

$f' > 0$ na $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \dots f$ rostoucí na $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$

$f' < 0$ na $(-1, 1) \dots f$ klesající na $(-1, 1)$

Příklad. $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2$$

$f' > 0$ na $(-\infty, 0), (0, +\infty)$

$\dots f$ rostoucí na $(-\infty, 0), (0, +\infty) \dots$ rostoucí na \mathbb{R}

Věta. *Je-li $f'(a) > 0$, pak existuje okolí U bodu a tak, že pro $x, y \in U$, $x < a < y$, je $f(x) < f(a) < f(y)$ (f je rostoucí v bodě a).*

Důkaz:

$$0 < f'(a) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, & f(x) < f(a) \text{ vlevo} \\ \lim_{y \rightarrow a^+} \frac{f(y) - f(a)}{y - a}, & f(y) > f(a) \text{ vpravo} \end{cases}$$

Poznámky.

- 1) $f'(a) < 0 \dots f$ je klesající v bodě a .
- 2) Pro $f'(a) = 0$ se nic netvrdí.

Definice. Funkce f má v bodě a *lokální minimum* (lokální maximum), jestliže $f(x) \geq f(a)$ ($f(x) \leq f(a)$) na některém prstencovém okolí bodu a .

Poznámky.

- 1) *Lokální extrém:* lok. minimum nebo lok. maximum.
- 2) *Ostrý lokální extrém:* ostrá nerovnost.

Věta. *Má-li funkce f v bodě a lokální extrém, pak buď $f'(a)$ neexistuje nebo $f'(a) = 0$ (a je stacionární bod f).*

Důkaz: $f'(a) > 0 \dots f$ rostoucí v $a \dots$ není lokální extrém
 $f'(a) < 0 \dots f$ klesající v $a \dots$ není lokální extrém

Příklad. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (viz dříve)
 $f'(x) = 3x^2 - 3$, existuje všude, nulová v ± 1
 $f(-1) = 3 \dots$ ostré lokální maximum
 $f(1) = -1 \dots$ ostré lokální minimum

Příklad. $f(x) = |x|$

$f'(x) = \text{sign } x$ pro $x \neq 0$, $f'(0)$ neexistuje
 $f(0) = 0$ ostré lokální minimum

Příklad. $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$ existuje všude, nulová v 0

$f(0) = 0$ není lokální extrém

Věta. *Nechť $f'(a) = 0$.*

- 1) *Je-li $f''(a) > 0$, pak f má v a ostré lokální minimum.*
- 2) *Je-li $f''(a) < 0$, pak f má v a ostré lokální maximum.*

Důkaz: 1) $f''(a) > 0 \dots f'$ rostoucí v $a \dots f'(x) < f'(a) = 0 < f'(y)$ pro $x < a < y$ v některém okolí $\dots f$ klesající vlevo, rostoucí vpravo \dots v a ostré lok. minimum
2) podobně nebo přechodem k $-f$

Příklad. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (viz dříve)

$$f'(x) = 3x^2 - 3, x_{1,2} = \pm 1, f''(x) = 6x$$

$f''(-1) = -6 < 0 \dots$ ostré lokální maximum

$f''(1) = 6 > 0 \dots$ ostré lokální minimum

Příklad. $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2, x_{1,2} = 0, f''(x) = 6x$$

$f''(0) = 0 \dots$ kritérium nerozhodne, není l. e.

Příklad. $f(x) = x^4$

$$f'(x) = 4x^3, x_{1,2,3} = 0, f(0) = 0 \text{ ostré lok. minimum}$$

$f''(x) = 12x^2, f''(0) = 0 \dots$ kritérium nerozhodne, je l. e.

$$f^{(3)}(x) = 24x, f^{(3)}(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 24, f^{(4)}(0) = 24 > 0$$

Poznámka. Pro $f'(a) = \dots = f^{(2n-1)}(a) = 0$:

- 1) $f^{(2n)}(a) > 0 \dots$ ostré lokální minimum,
- 2) $f^{(2n)}(a) < 0 \dots$ ostré lokální maximum.

Věta. *Spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá maxima (minima) buď v bodě, ve kterém má lokální maximum (minimum), nebo v některém krajním bodě intervalu.*

Důkaz: Extrém ve vnitřním bodě je lokální.

Poznámka. Porovnáváme hodnoty v bodech, kde derivace není nebo je nulová, v krajních bodech intervalu, které do něj patří. Ověříme limity v nepatřících krajních bodech.

Příklad. $f(x) = x^2 + 2x$ na $(-2, +\infty)$. $f'(x) = 2x + 2$, nemá derivaci: \emptyset ,
stacionární body: $-1, f(-1) = -1$,
patřící krajní body: $-2, f(-2) = 0$,
nepatřící krajní body: $+\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$,
 $\min f = f(-1) = -1, \max f$ neexistuje.

Konvexita, konkavita, inflexní body

Konvexita: 1) spojnice grafu nad grafem, 2) tečna pod grafem, 3) směrnice sečen rostou.

Definice. Funkce f je *konvexní* na intervalu I , jestliže pro každé $x, y, z \in I, x < y < z$, platí

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

(*konkávni* pro \geq , *ryze konv.* pro $<$, *ryze konk.* pro $>$).

Věta. Je-li f spojitá na intervalu I a má-li v každém vnitřním bodě I druhou derivaci, pak:

- 1) Je-li $f''(x) \geq 0$ uvnitř I , pak f je konvexní.
- 2) Je-li $f''(x) \leq 0$ uvnitř I , pak f je konkávni.

Důkaz: 1) $x < y < z$: f' je neklesající, Lagrange ... existují $c \in (x, y), d \in (y, z)$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) \leq f'(d) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Poznámka. Podobně pro ostré nerovnosti s „ryze“.

Definice. Bod $[a, f(a)]$ je *inflexním bodem* grafu funkce f (funkce f má v bodě a *inflexi*), pokud je funkce f spojitá v bodě a , existuje $f'(a)$ a funkce f je na některém jednostranném okolí a ryze konvexní a na některém jednostranném okolí a ryze konkávni.

Věta.

- 1) Má-li f v a *inflexi*, pak $f''(a)$ neexistuje nebo $f''(a) = 0$.
- 2) Je-li $f''(a) = 0, f'''(a) \neq 0$, pak f má v a *inflexi*.

Poznámka. $f''(a) = \dots = f^{(2n)}(a) = 0, f^{(2n+1)}(a) \neq 0$... inflexe v a .

Příklad. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 3, f''(x) = 6x, x_1 = 0$$

$$f'''(x) = 6, f'''(0) \neq 0 \dots 0 \text{ je inflexní bod}$$

nebo: $f'' < 0$ pro $x < 0, f'' > 0$ pro $x > 0$

Asymptoty

$$f(x) \sim px + q$$

Definice. Má-li funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, nazýváme přímkou o rovnici $x = a$ *asymptotou* grafu funkce f v bodě a . *Asymptota* grafu funkce f v bodě $a \in \{\pm\infty\}$ je přímka o rovnici $y = px + q$ taková, že:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - px - q) = 0.$$

Příklad. $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}x, D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x \rightarrow 1\pm} f(x) = \pm\infty \dots x = 1 \text{ je asymptota v } 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - \frac{1}{2}x) = 0 \dots y = \frac{1}{2}x \text{ je asymptota v } \pm\infty$$

Věta. Graf funkce f má v $a \in \{\pm\infty\}$ *asymptotu* o rovnici $y = px + q$ právě tehdy, když

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = p, \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - px) = q.$$

Příklad. $f(x) = x \sin x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \text{ neex. } \dots \text{ as. v } +\infty \text{ neex.}$$

Příklad. $f(x) = x^2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x = \lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty \dots \text{ as. v } +\infty \text{ neex.}$$

Příklad. $f(x) = \ln x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)/x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ (l'H)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x - 0 \cdot x) = +\infty \dots \text{ as. v } +\infty \text{ neex.}$$

Příklad. $f(x) = x + |x| + 1 + \frac{1}{x-1}, D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x \rightarrow 1\pm} = \pm\infty \dots \text{ asymptota } x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 1$$

... asymptota $y = 2x + 1$ v $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

... asymptota $y = 1$ v $-\infty$

Poznámky.

1) Je-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ pro $a \in \{\pm\infty\}$, pak asymptota v a má rovnici $y = b$.

2) Existují-li asymptota v $a \in \{\pm\infty\}$ o rovnici $y = px + q$ a $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$, pak $p = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$.

Příklad. $f(x) = \frac{1}{x} \sin x^2$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \dots \text{ asymptota } y = 0 \text{ v } \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{x^2} \sin x^2 + 2 \cos x^2\right) \dots \text{ neex.}$$

Shrnutí vyšetřování průběhu funkce

f : definiční obor, sudost, lichost, perioda, spojitost, limity v hraničních bodech $D(f)$, v bodech nespojitosti, asymptoty. f' : monotonie, (lokální) extrém, obor hodnot, tečny grafu v hraničních bodech $D(f), D(f')$.

f'' : konvexita/konkavita, inflexní body (včetně tečen). Graf.

Příklad. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3|x|$

Příklad. $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2}$

Asymptotické chování funkcí

Definice. Necht funkce g je definována na prstencovém okolí $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1) Funkce f je třídy $O(g)$ ($f \in O(g), f = O(g)$) pro $x \rightarrow a$, pokud existuje číslo M a prstencové okolí P bodu a tak, že $|f(x)| \leq M |g(x)|$ pro každé $x \in P$.

2) Funkce f je třídy $\Theta(g)$ ($f \in \Theta(g), f = \Theta(g)$) pro $x \rightarrow a$, pokud existují kladná čísla m, M a prstencové okolí P bodu a tak, že $m |g(x)| \leq |f(x)| \leq M |g(x)|$ pro každé $x \in P$.

Poznámka. Podobně pro jednostranné limity, posloupnosti.

Poznámka. $f \in \Theta(g)$ právě tehdy, když platí $f \in O(g)$ a $g \in O(f)$, tj. právě tehdy, když $g \in \Theta(f)$.

Věta. Necht $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1) Je-li $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$, pak $f \in O(g)$ pro $x \rightarrow a$.

2) Je-li $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak $f \in \Theta(g)$ pro $x \rightarrow a$.

Důkaz: 1) Vlastní limita ... omezenost M na prstencovém okolí P bodu a , tj. $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M$ na P .

2) Limita abs. hodnoty $b \dots$ existuje $m \in (0, b), M \in (b, +\infty)$ a prstencové okolí P bodu a tak, že $m \leq \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M$ na P .

Příklad. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3} = 2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f \in \Theta(x^3)$ pro $x \rightarrow +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 5 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f \in \Theta(x)$ pro $x \rightarrow 0$

Poznámky.

1) Stačí příslušná „omezenost“ $|f/g|$ na prstencovém okolí a ($\limsup_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$, pro Θ navíc $\liminf_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| > 0$).

2) Existují různé definice Θ (jen pro kladné/nezáporné funkce, bez absolutních hodnot), shodují se pro kladné.

3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$: $f \sim g$ (asymptoticky ekvivalentní, speciální případ $f \in \Theta(g)$).

4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$: $f \in o(g)$ ($o(g) \subset O(g)$).

5) Pokud označíme $f \in o(g)$ pro $n \rightarrow \infty$ jako $f \prec g$:

$\ln n \prec n^a$ ($a > 0$) $\prec a^n$ ($a > 1$) $\prec n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \prec n^n$.

6) Obvykle $x \rightarrow 0(+)$ (např. chyba aproximace Taylorovým polynomem), $x \rightarrow +\infty$ (např. konvergence integrálu), $n \rightarrow \infty$ (např. konvergence řad, složitost algoritmů).

Věta. Uvažujme $x \rightarrow a$ pro $a \in \overline{\mathbb{R}}$, g, g_1, g_2 funkce na prstencovém okolí a .

1) Třída $O(g)$ je uzavřena na součet a násobek.

2) Je-li $f_1 \in O(g_1)$ a $f_2 \in O(g_2)$, pak $f_1 f_2 \in O(g_1 g_2)$.

Důkaz:

1) $f_1, f_2 \in O(g)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; pro $i \in \{1, 2\}$ existuje číslo M_i a prstencové okolí P_i bodu a tak, že $|f_i(x)| \leq M_i |g(x)|$ na P_i ; $|c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)| \leq |c_1| |f_1(x)| + |c_2| |f_2(x)| \leq (|c_1| M_1 + |c_2| M_2) |g(x)|$ na $P_1 \cap P_2$.

2) Pro $i \in \{1, 2\}$ existuje číslo M_i a prstencové okolí P_i bodu a tak, že $|f_i(x)| \leq M_i |g_i(x)|$ na P_i ; $|f_1(x) f_2(x)| \leq M_1 M_2 |g_1(x) g_2(x)|$ na $P_1 \cap P_2$.

Poznámka. Speciálně pro $f \in O(g)$, h , platí $fh \in O(gh)$.

Příklad.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (1 - \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (1 - (1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3))) =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)) = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{2} + O(x)) = \frac{1}{2}$.

Neurčitý integrál

Definice. Funkce F se nazývá *primitivní funkce* k funkci f na intervalu I , jestliže $F' = f$ na I .

Poznámky.

1) V krajních bodech jednostranné derivace.

2) Lze zobecnit: na sjednocení intervalů; $F' = f$ až na konečnou (či jinou) množinu.

3) Ne všechny funkce mají primitivní.

Tvrzení (vlastnost mezihodnoty pro derivaci). *Nechť f je derivací F na intervalu I , $a, b \in I$, $f(a) < d < f(b)$. Pak existuje c mezi a, b takové, že $f(c) = d$.*

Důkaz: $G(x) = F(x) - dx$ má vlastní derivaci ... je spojitá ... nabývá minima v c ... $G'_{(\pm)}(a) < 0 < G'_{(\pm)}(b)$, tj. c mezi a, b ... $G'(c) = 0$... $f(c) = d$.

Příklad. $\text{sign } x$ není derivací žádné funkce.

Věta. *Spojitá funkce na intervalu má primitivní funkci.*

Poznámka. Primitivní funkce k e^{-x^2} existuje, ale nelze ji vyjádřit pomocí elementárních funkcí.

Věta.

1) *Je-li F primitivní funkce k f na I , $c \in \mathbb{R}$, pak $F + c$ je primitivní funkce k f na I .*

2) *Jsou-li F_1, F_2 primitivní funkce k f na I , pak $F_1 - F_2$ je konstantní na I .*

Důkaz:

1) $(F + c)' = F' + 0 = F' = f$

2) $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0 \dots F_1 - F_2$ konst. na I

Příklad. Na disjunktních intervalech mohou být konstanty různé, např. pro $f(x) = \text{sign } x$, $x \neq 0$:

$$F(x) = \begin{cases} -x + c_1, & x < 0, \\ x + c_2, & x > 0. \end{cases}$$

Definice. Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I nazýváme *neurčitým integrálem* f na I (pokud je neprázdná).

$$\int f = \int f(x) dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\} = F + c.$$

Tabulkové integrály:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad \text{intervaly } D(x^a) \text{ (} a \neq -1 \text{)}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c, \quad x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty)$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c, \quad x \in \mathbb{R} \text{ (} a \neq 0 \text{)}$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c, \quad x \in \mathbb{R} \text{ (} a \neq 0 \text{)}$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + c, \quad x \in \mathbb{R} \text{ (} a \neq 0 \text{)}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \text{arctg } x + c, \quad x \in \mathbb{R}$$

Příklady.

1) $\int x^6 dx = \frac{1}{7} x^7 + c$, $x \in \mathbb{R}$.

2) $\int \frac{dx}{x^3} = \frac{-1}{2x^2} + c$, $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, +\infty)$.

3) $\int \sqrt[4]{x} dx = \frac{4}{5} x \sqrt[4]{x} + c$, $x \in (0, +\infty)$.

4) $\int \sqrt[5]{x} dx = \frac{5}{6} x \sqrt[5]{x} + c$, $x \in \mathbb{R}$.

Věta (linearita). *Jsou-li F_1, \dots, F_n primitivní funkce k f_1, \dots, f_n na I , $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, pak $c_1 F_1 + \dots + c_n F_n$ je primitivní funkce k $c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$ na I .*

Důkaz:

$$(c_1 F_1 + \dots + c_n F_n)' = c_1 F_1' + \dots + c_n F_n' = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$$

Příklad.

$$\int \frac{(x+3)^2}{x} = \frac{1}{2} x^2 + 6x + 9 \ln |x| + c, \quad x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty)$$

Věta (integrace per partes). *Nechť na intervalu I existují $u', v', \int u'v$. Pak*

$$\int uv' = uv - \int u'v \text{ na } I.$$

Důkaz: $(uv - \int u'v)' = u'v + uv' - u'v = uv'$.

Příklad. $\int (x+1) \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x+1 \quad v' = \sin x \\ u' = 1 \quad v = -\cos x \end{array} \right| =$
 $= -(x+1) \cos x - \int -\cos x \, dx = -(x+1) \cos x + \sin x + c,$
 $x \in \mathbb{R}$

Příklad. $\int x^2 e^{2x} \, dx = \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4}\right) e^{2x} + c, x \in \mathbb{R}$

Poznámka. Podobně $P(x) e^{ax}, P(x) \sin ax, P(x) \cos ax$ (P polynom, $a \neq 0$).

Příklad. $I = \int e^x \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x \quad v' = \sin x \\ u' = e^x \quad v = -\cos x \end{array} \right| =$
 $= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x \quad v' = \cos x \\ u' = e^x \quad v = \sin x \end{array} \right| =$
 $= -e^x \cos x + e^x \sin x - I$
 $I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c, x \in \mathbb{R}$

Poznámka. Podobně $e^{ax} \sin bx, e^{ax} \cos bx$ ($a, b \neq 0$).

Příklad. $\int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + c, x \in (0, +\infty)$

Příklad. $\int \ln x \, dx = \int \ln x \cdot 1 \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} \quad v = x \end{array} \right| =$
 $= x \ln x - \int 1 \, dx = x(\ln x - 1) + c, x \in (0, \infty)$

Poznámka. Podobně $x^a \ln x$ ($a \neq -1$).

Věta (substituce). *Nechť $(\alpha, \beta) \xrightarrow{\varphi} (a, b) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, φ' existuje na (α, β) , $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$ na (a, b) .*

1) $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt = F(\varphi(t)) + c$ na (α, β) .

2) *Je-li $\varphi: (\alpha, \beta) \xrightarrow{na} (a, b)$ prostá a G je primitivní funkce k $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ na (α, β) , pak*

$$\int f(x) \, dx = G(\varphi_{-1}(x)) + c \text{ na } (a, b).$$

Důkaz: 1) $\frac{d}{dt} F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.

2) $G(t)$ i $F(\varphi(t))$ jsou primitivní k $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \dots G(t) = F(\varphi(t)) + c_0$; existuje $\varphi_{-1}(x) \dots G(\varphi_{-1}(x)) = F(x) + c_0$ je primitivní k f .

Používáme (v obou směrech) zápis:

$$\int f(x) \, dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array} \right| = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt.$$

Příklady.

1) $\int \sin^3 t \cdot \cos t \, dt = \left| \begin{array}{l} \sin t = x \\ \cos t dt = dx \end{array} \right| = \int x^3 \, dx = \frac{1}{4} x^4 + c =$
 $= \frac{1}{4} \sin^4 t + c, x \in \mathbb{R}$

2) $\int x e^{-x^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} -x^2 = t \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \dots = -\frac{1}{2} e^t + c, x \in \mathbb{R}$

3) $\int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \ln^2 x + c, x \in (0, +\infty)$

Příklady.

1) $\int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} x = e^t \\ dx = e^t dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \ln^2 x + c, x \in (0, +\infty)$

2) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = \int dt = t + c = \arcsin x + c,$
 $x \in (-1, 1), t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Poznámky.

1) $\int f(ax+b) \, dx = \left| \begin{array}{l} ax+b = t \\ a dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{a} F(ax+b) + c \quad (a \neq 0).$

2) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \left| \begin{array}{l} f(x) = t \\ f'(x) dx = dt \end{array} \right| = \ln |f(x)| + c.$

Příklady.

1) $\int (x+1)^4 \, dx = \frac{1}{5} (x+1)^5 + c, x \in \mathbb{R}$

2) $\int \frac{1}{(3x-1)^2} \, dx = \frac{-1}{3(3x-1)}, x \in (-\infty, \frac{1}{3}), x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$

3) $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + c, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

4) $\int \frac{x-2}{x^2-4x+5} \, dx = \frac{1}{2} \ln(x^2-4x+5) + c, x \in \mathbb{R}$

5) $\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c, x \in \mathbb{R}$

Integrace racionálních funkcí

Rozklad racionální funkce

Definice. *Racionální (lomená) funkce je podíl dvou polynomů $\frac{P}{Q}$, kde Q je nenulový. Ryze lomená funkce je podíl dvou polynomů $\frac{P}{Q}$, kde $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$ ($\operatorname{st} 0 = -1$). Parciální zlomky jsou funkce ve tvaru*

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, \quad A, B, a, p, q \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

kde (x^2+px+q) nemá reálný kořen, tj. $p^2-4q < 0$.

Poznámka. V \mathbb{C} jen první typ parciálních zlomků.

Věta. *Nenulový polynom lze (jednoznačně) napsat ve tvaru*

$$a(x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_r)^{k_r} (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

kde $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s \in \mathbb{N}$,

$a, a_1, \dots, a_r, p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s \in \mathbb{R}$,

a_1, \dots, a_r jsou různé reálné kořeny,

$x^2+p_ix+q_i$ ($i = 1, \dots, s$) jsou různé a nemají reálné kořeny.

Věta. *Racionální funkce se dá (jednoznačně) rozložit na součet polynomu a parciálních zlomků. Jmenovatelé těchto zlomků dělí jmenovatel dané racionální funkce.*

Důkaz: (částečný) Dělením polynomů dostaneme součet polynomu a ryze lomené funkce P_1+L_1 . Pro jiný zápis P_2+L_2 je $P_1-P_2 = L_2-L_1$ polynom i ryze lomená funkce, tj. nulová funkce a tedy $P_2 = P_1, L_2 = L_1$. Pro ryze lomenou funkci P/Q a k -násobný kořen a polynomu Q ($k > 0$) je $Q(x) = (x-a)^k Q_2(x)$ pro některý polynom Q_2 s $Q_2(a) \neq 0$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{\frac{P(a)}{Q(a)}}{(x-a)^k} = \frac{P(x) - \frac{P(a)}{Q(a)} Q_2(x)}{(x-a)^k Q_2(x)}.$$

Čitatel má za kořen a , je tedy roven $(x-a)P_2(x)$,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{\frac{P(a)}{Q(a)}}{(x-a)^k} = \frac{P_2(x)}{(x-a)^{k-1} Q_2(x)}.$$

Snížili jsme stupeň jmenovatele, pokračujeme dokud je a kořen jmenovatele a pak pro další kořeny.

Postup:

1) Dělení (polynom + ryze lomená funkce).

2) Rozklad jmenovatele na součin kořenových činitelů a ireducibilních kvadratických polynomů.

3) Rozpis na parciální zlomky s „neurčitými koeficienty“.

4) Určení koeficientů.

Příklad. $\frac{2x^2+x-24}{x^2-2x-8} = 2 + \frac{5x-8}{(x-4)(x+2)} = 2 + \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$. Určení koeficientů: porovnání po přenásobení jmenovatelem:

$$5x - 8 = A(x + 2) + B(x - 4)$$

A) Stejně koeficienty, řešení (regulární) soustavy lin. rovnic:

$$x^1: \quad 5 = A + B \quad A = 2$$

$$x^0: \quad -8 = 2A - 2B \quad B = 3$$

B) Dosazení kořenů (lineární rovnice s 1 proměnnou):

$$x = 4: \quad 12 = 6A \quad A = 2$$

$$x = -2: \quad -18 = -6B \quad B = 3$$

B') *Zakrývací pravidlo:*

$$A = \left. \frac{5x-8}{(x-4)} \right|_{x=-2} = 3, \quad B = \left. \frac{5x-8}{(x+2)} \right|_{x=4} = 2$$

Příklad. $\frac{-2x+5}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$.

Zakrývacím pravidlem $A = 1, C = 1$. Porovnáme

$$-2x + 5 = A(x + 2) + B(x - 1)(x + 2) + C(x - 1)^2$$

A) Jen potřebné rovnice, dosadíme už určené koef., např.

$$x^2: \quad 0 = B + C = B + 1 \quad B = -1$$

B) Dosadíme do derivace

$$-2 = A + B(x + 2) + B(x - 1) + C \cdot 2(x - 1)$$

vícenásobné kořeny

$$x = 1: \quad -2 = A + 3B = 1 + 3B \quad B = -1$$

C) Odečteme parciální zlomek pro vícenásobný kořen, zakrývací pravidlo pro zjištění koeficientu u nižší mocniny

$$\frac{-2x+5}{(x-1)^2(x+2)} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{-3x+3}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{-3}{(x-1)(x+2)}$$

Integrace parciálních zlomků

1) Mocnina lineárního polynomu ve jmenovateli:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \left| \begin{array}{l} x-a = t \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^n}$$

2) Mocnina kvadratického polynomu ve jmenovateli:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + (B-\frac{Ap}{2})}{(x^2+px+q)^n} dx$$

2a) V čitateli derivace kvadratického polynomu:

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} dx = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q = t \\ (2x+p) dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^n}$$

2b) V čitateli konstanta: převedeme na $\int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = I_n$.

Pro $n > 1$ upravíme

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \int \frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^n} dt = I_{n-1} + \int \frac{-t^2 dt}{(t^2+1)^n} \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = t & v' = \frac{-t}{(t^2+1)^n} \\ u' = 1 & v = \frac{1}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} \end{array} \right| = \\ &= I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}, \end{aligned}$$

dostaneme rekurentní vzorec:

$$I_n = \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

$$I_1 = \arctg t + c.$$

Příklad. $\int \frac{5}{x^2-2x+5} dx = 5 \int \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \frac{5}{4} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{4}\right)^2+1} =$
 $= \left| \frac{x-1}{2} = t \right| = \frac{5}{2} \int \frac{dt}{t^2+1}.$

Příklad. $\int \frac{2}{(x^2-6x+10)^2} dx = \int \frac{2}{((x-3)^2+1)^2} dx =$
 $= \left| x-3 = t \right| = 2I_2 = \frac{t}{t^2+1} + I_1 = \frac{t}{t^2+1} + \arctg t + c =$
 $= \frac{x-3}{x^2-6x+10} + \arctg(x-3) + c, x \in \mathbb{R}.$

Integrace dalších typů funkcí

$$1) \quad \int R(e^{ax}) dx = \left| \begin{array}{l} e^{ax} = t \\ x = \frac{1}{a} \ln t \\ dx = \frac{1}{at} dt \end{array} \right| = \int R(t) \frac{1}{at} dt$$

$$x \in \mathbb{R} \leftrightarrow t \in (0, +\infty) \quad (a \neq 0)$$

Příklad. $\int \frac{e^{4x}+2e^{2x}+3}{e^{4x}-1} dx = \left| e^{2x} = t \right| = \int \frac{t^2+2t+3}{2t(t^2-1)} dt,$
 $\int \frac{e^{4x}+2e^{2x}+3}{e^{4x}-1} dx = \left| e^x = t \right| = \int \frac{t^4+2t^2+3}{t(t^4-1)} dt.$

$$2) \quad \int \frac{R(\ln ax)}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \ln ax = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right| = \int R(t) dt \quad (a > 0)$$

Příklad. $\int \frac{2}{x(\ln^2+4)} dx = \left| \ln x = t \right| = \int \frac{2}{t^2+4} dt.$

$$3) \quad \int R(\sin x, \cos x) dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \\ x = 2 \arctg t \\ dx = \frac{2}{t^2+1} dt \end{array} \right|$$

$$x \in (-\pi, \pi) \leftrightarrow t \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

Někdy nutno spojovat přes sousední intervaly.

Příklad. $\int \frac{2}{5-3 \cos x} dx = \int \frac{2}{4t^2+1} = \arctg(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}) + c + k\pi$
 pro $x \in (-\pi, \pi) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), limity v $\pi + 2k\pi$.

3a) „sudé mocniny“ ($R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$):

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x) dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = y \\ x = \arctg t \\ dx = \frac{1}{t^2+1} dt \end{array} \right|$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \leftrightarrow t \in \mathbb{R}$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{t^2}{t^2+1}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{t^2+1}$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{t}{t^2+1}$$

Příklad. $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \left| \sin x = t \right| = \int (t^2+1) dt.$

3b) „lichá“ v sin nebo v cos:

$$\int R(\sin^2 x, \cos x) \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right|$$

$$\int R(\sin x, \cos^2 x) \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \\ \cos^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right|$$

Příklad. $\int \frac{dx}{\cos^5 x} = |\sin x = t| = \int \frac{dt}{(1-t^2)^3}$.

3c) $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$: pro liché m či n viz 3b); pro sudá m, n přechod k dvojnásobnému argumentu

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Příklad. $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x dx = |\cos x = t| = \int (t^6 - t^4) dt$.

Příklad. $\int \sin^4 x dx = \int (\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x) dx = \int (\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x) dx$.

4) $n > 1, ad - bc \neq 0$:

$$\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \\ x = R_s(t) \\ dx = R'_s(t) dt \end{array} \right|$$

5) Odmocnina z kvadratická funkce: vytknutím koef. u x^2 , doplněním na čtverec a lineární substitucí upravíme na integrál ve tvaru $\int R(x, \sqrt{\pm x^2 \pm a^2}) dx, a > 0$. Lze použít různé substitute: goniometrické, hyperbolické, Eulerovy.

5a) $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx, x \in (-a, a)$, například

- $x = a \sin t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$;
- upravíme $\sqrt{a^2 - x^2} = (a+x)\sqrt{(a-x)/(a+x)}$ a použijeme substituci pro typ 4 (Eulerova).

Příklad. $\int \sqrt{4 - x^2} dx = |x = 2 \sin t| = \int 4 \cos^2 t dt = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + c, x \in \langle -2, 2 \rangle$.

5b) $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx, x \in \mathbb{R}$, například

- $x = a \sinh t, \sqrt{x^2 + a^2} = a \cosh t$;
- $\sqrt{x^2 + a^2} + x = t$ (Eulerova).

Příklad.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 + 4}} = |x+1 = 2 \sinh t| = \int dt$$

5c) $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx, x \in (-\infty, -a), x \in (a, +\infty)$, například

- $\sqrt{x^2 - a^2} + x = t$ (Eulerova).

Určitý integrál

Definice. Dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ je konečná množina $D \subset \langle a, b \rangle$ obsahující a, b .

Značíme $D = \{x_0, \dots, x_n\}, a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Definice. Pro omezenou funkci f na $\langle a, b \rangle$ a dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ zavádíme *dolní a horní integrální součet*:

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^n \inf f(\langle x_{i-1}, x_i \rangle) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$\bar{S}(f, D) = \sum_{i=1}^n \sup f(\langle x_{i-1}, x_i \rangle) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Přidáme-li k dělení další bod, dolní součet se nezmenší a horní se nezvětší. Pro libovolná dělení D_1, D_2 dostaneme:

$$\underline{S}(f, D_1) \leq \underline{S}(f, D_1 \cup D_2) \leq \bar{S}(f, D_1 \cup D_2) \leq \bar{S}(f, D_2).$$

Každý dolní součet je menší nebo roven každému hornímu součtu, supremum dolních integrálních součtů je menší nebo rovno infimu horních integrálních součtů.

Definice. Je-li pro omezenou funkci f na $\langle a, b \rangle$ supremum dolních integrálních součtů rovno infimu horních integrálních součtů, nazýváme tuto hodnotu *určitý (Riemannův) integrál* funkce f na $\langle a, b \rangle$. Čísla a, b se nazývají *dolní a horní mez integrálu*.

Značení: $\int_a^b f, \int_a^b f(x) dx, (R)\text{-}\int_a^b f, (R)\text{-}\int_a^b f(x) dx$.

Poznámka. Pro systém (\mathcal{D}, \prec) dělení s $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a zjemnění:

$$\lim_{(\mathcal{D}, \prec)} \sum_i f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Věta. Pro omezenou funkci f na $\langle a, b \rangle$ existuje $\int_a^b f$ právě tehdy, když existuje posloupnost $(D_n)_{n=1}^\infty$ dělení $\langle a, b \rangle$ taková, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}(f, D_n).$$

V takovém případě je integrál roven těmto limitám.

Důkaz: \Rightarrow : existují $(D'_n)_{n=1}^\infty, (D''_n)_{n=1}^\infty$:

$$\underline{S}(f, D'_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f, \bar{S}(f, D''_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f, \\ \underline{S}(f, D'_n) \leq \underline{S}(f, D'_n \cup D''_n) \leq \bar{S}(f, D'_n \cup D''_n) \leq \bar{S}(f, D''_n), \\ (D'_n \cup D''_n)_{n=1}^\infty \text{ je hledaná posloupnost dělení.}$$

$$\Leftarrow: \sup_D \underline{S}(f, D) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n) = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n) \geq \inf_D \bar{S}(f, D) \geq \sup_D \underline{S}(f, D), \\ \dots \text{ všude rovnosti.}$$

Příklad. $\int_a^b c dx = c(b - a)$

$$\underline{S}(c, D_n) = \bar{S}(c, D_n) = \sum_{i=1}^n c(x_i - x_{i-1}) = c(b - a).$$

Poznámka. Pro existenci integrálu ve výše uvedené větě stačí $\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n)) = 0$:

$$0 \leq \inf_D \bar{S}(f, D) - \sup_D \underline{S}(f, D) \leq \bar{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n).$$

Příklad. $\int_0^2 \text{sign } x dx = 2$:

$$D_n = \{0, \frac{1}{n}, 2\}, \underline{S}(f, D_n) = 2 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2, \bar{S}(f, D_n) = 2.$$

Poznámka. Hodnota integrálu nezávisí na hodnotách funkce v konečně mnoha bodech.

Poznámka. Lebesgueův integrál – dělení v oboru hodnot:

$$\sum_I d_I \cdot \lambda(f^{-1}(I)), \quad d_I \in I.$$

Nezávisí na hodnotách funkce ve spočetně mnoha bodech.

Příklad. $d(x) = 1$ pro $x \in \mathbb{Q}$, jinak 0.

$$(R)\text{-}\int_0^1 d(x) dx \text{ neex.: } \underline{S}(f, D) = 0, \bar{S}(f, D) = 1.$$

$$(L)\text{-}\int_0^1 d(x) dx = (L)\text{-}\int_0^1 0 dx = 0, \text{ nebo}$$

$$0 \cdot \lambda(\langle 0, 1 \rangle \setminus \mathbb{Q}) + 1 \cdot \lambda(\langle 0, 1 \rangle \cap \mathbb{Q}) = 0$$

(Lebesgueova míra spočetných mn. je nulová, tj. $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$).

Věta. Monotonní funkce na uzavřeném intervalu má určitý integrál.

Důkaz: $D_n = \{a, a + \frac{b-a}{n}, \dots, b\}$ (ekvidistantní na n částí),
 $\bar{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) = \frac{b-a}{n} \cdot |f(b) - f(a)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Tvrzení. Z každého pokrytí uzavřeného intervalu otevřenými lze vybrat konečné pokrytí.

Důkaz: Sporem. Střed intervalu je pokryt některým otevřeným intervalem, zůstanou nejvýše 2 nepokryté uzavřené intervaly, alespoň jeden se nedá pokrýt konečně mnoha danými intervaly, ten vezmeme a postup opakujeme. Dostaneme posloupnost $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ vnořených uzavřených intervalů, jejichž délky klesají k nule. $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$, c je pokryto některým otevřeným intervalem, který ale pokrývá všechny dostatečně krátké I_n – spor.

Tvrzení. Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu I , pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$ pro $y, z \in I$ taková, že $|y - z| < \delta$ (stejněměrná spojitost).

Důkaz: $\varepsilon > 0$; pro $x \in I$ ex. $\delta_x > 0$:
 $|f(u) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $u \in U(x, \delta_x) \cap I$; $u \in \{y, z\}$
 $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$ pro $y, z \in U(x, \delta_x) \cap I$;
 $\{U(x, \delta_x) : x \in I\}$ je pokrytí I , vezmeme konečné;
označme δ nejmenší vzdálenost (různých) krajních bodů;
pro $y, z \in I$, $0 < z - y < \delta$ je v $\langle y, z \rangle$ nejvýše 1 krajní bod;
pokud 0, pak y je pokryto $U(x, \delta_x) \ni z$;
pokud 1, pak je pokryt $U(x, \delta_x) \ni y, z$.

Příklad. Funkce $\frac{1}{x}$ není stejněměrně spojitá na $(0, +\infty)$.

Věta. Spojitá funkce na uzavřeném intervalu má určitý integrál.

Důkaz: f na $\langle a, b \rangle$;
pro $\frac{1}{n}$ ex. $\delta_n: |f(y) - f(z)| < \frac{1}{n}$ pro $|y - z| < \delta_n, y, z \in \langle a, b \rangle$;
ex. D_n s intervaly kratšími než δ_n ;
 $0 \leq \bar{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) < \frac{1}{n} (b - a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Věta. Necht funkce f, g jsou omezené na $\langle a, b \rangle$, $\int_a^b f, \int_a^b g$ existují, $c \in \mathbb{R}$. Pak:

- 1) $\int_a^b cf = c \int_a^b f$.
- 2) $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.
- 3) Je-li $f \leq g$ na $\langle a, b \rangle$, pak $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- 4) $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

Důkaz:

- 1) $c \geq 0$:
 $\sup \underline{S}(cf, D) = \sup c \underline{S}(f, D) = c \sup \underline{S}(f, D) = c \int_a^b f$,
 $\inf \bar{S}(cf, D) = \inf c \bar{S}(f, D) = c \inf \bar{S}(f, D) = c \int_a^b f$;
 $c < 0$:
 $\sup \underline{S}(cf, D) = \sup c \bar{S}(f, D) = c \inf \bar{S}(f, D) = c \int_a^b f$,
 $\inf \bar{S}(cf, D) = \inf c \underline{S}(f, D) = c \sup \underline{S}(f, D) = c \int_a^b f$.

2) sup/inf int. součtů f, g jsou limity pro společ. $(D_n)_{n=1}^{\infty}$;
 $\inf f(I) + \inf g(I) \leq (f + g)(x)$, pro $x \in I$,
 $\inf f(I) + \inf g(I) \leq \inf (f + g)(I)$,
 $\underline{S}(f, D_n) + \underline{S}(g, D_n) \leq \underline{S}(f + g, D_n) \leq \bar{S}(f + g, D_n) \leq$
 $\leq \bar{S}(f, D_n) + \bar{S}(g, D_n)$ (podobně), limita pro $n \rightarrow \infty$.

3) $\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(g, D)$, $\sup \underline{S}(f, D) \leq \sup \underline{S}(g, D)$.

4) $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$,
ex. $(D_n)_{n=1}^{\infty}$: $\underline{S}(f, D_n), \bar{S}(f, D_n) \rightarrow \int_a^b f$,
 $0 \leq \bar{S}(f_+, D_n) - \underline{S}(f_+, D_n) \leq \bar{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,
 $\int_a^b f_+ \text{ ex., } \int_a^b f_- = \int_a^b (f_+ - f) \text{ ex., } \int_a^b |f| = \int_a^b (f_+ + f_-) \text{ ex.,}$
 $-|f| \leq f \leq |f| \dots - \int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$

Příklad. $\int_0^1 (d(x) - \frac{1}{2}) dx$ neexistuje, $\int_0^1 |d(x) - \frac{1}{2}| dx = \frac{1}{2}$.

Poznámka. Omezené integrovatelné funkce na $\langle a, b \rangle$ tvoří lineární prostor, zobrazení $\int_a^b : f \mapsto \int_a^b f$ je lineární.

Věta. Necht $a < b < c$ a funkce f je omezená na $\langle a, b \rangle$. Pak $\int_a^c f$ existuje právě tehdy, když existují $\int_a^b f$ a $\int_b^c f$. V takovém případě $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

Důkaz: D' dělení $\langle a, b \rangle$, D'' dělení $\langle b, c \rangle$,
 $D = D' \cup D''$ je dělení $\langle a, c \rangle$ obsahující b ,
 $\underline{S}(f, D') + \underline{S}(f, D'') = \underline{S}(f, D)$,
 $\bar{S}(f, D') + \bar{S}(f, D'') = \bar{S}(f, D)$,

přechodem k supremu a infimu:

$$\begin{aligned} \sup_{D'} \underline{S}(f, D') + \sup_{D''} \underline{S}(f, D'') &= \sup_D \underline{S}(f, D), \\ \inf_{D'} \bar{S}(f, D') + \inf_{D''} \bar{S}(f, D'') &= \inf_D \bar{S}(f, D), \end{aligned}$$

stejně sčítance pod sebou právě tehdy, když stejné součty.

Definice. Definujeme $\int_a^a f = 0$, $\int_b^a f = -\int_a^b f$ pro $a < b$.

Poznámka. Rovnost v předešlé větě pro libovolná a, b, c .

Poznámka. Po částech spojitě funkce (konečně mnoho bodů nespojitosti s konečnými jednostrannými limitami) i po částech monotonní funkce jsou integrovatelné.

Věta. Necht funkce f je omezená na $\langle a, b \rangle$, $\int_a^b f$ existuje, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ pro $x \in \langle a, b \rangle$. Pak

- 1) F je spojitá.
- 2) $F'(x) = f(x)$ v bodech spojitosti funkce f .

Důkaz: F je definována (aditivita na definičním oboru)

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt,$$

1) $|f| \leq M$ na $\langle a, b \rangle$,

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq \text{sign } h \int_x^{x+h} |f(t)| dt \leq \text{sign } h \int_x^{x+h} M dt = M \cdot |h| \xrightarrow{h \rightarrow 0(\pm)} 0.$$

2) $\left| \frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) - f(x) \right| =$

$$\begin{aligned} &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dt \right| = \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \leq \\ &(f \text{ spoj. v } x: \text{ pro } \varepsilon > 0 \text{ je } |f(t) - f(x)| < \varepsilon \text{ na okolí } x) \\ &\leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varepsilon dt = \frac{1}{h} \cdot h\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Důsledek. Funkce spojitá na intervalu má na tomto intervalu primitivní funkci.

Důkaz: $a \in I$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ (případně $+F(a)$).

Poznámka. Derivace integrálu podle horní meze (pro f spojitou): $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$.

Poznámka. Po částech spojitá f : jednostranné derivace F jsou rovny příslušným jednostranným limitám f .

Příklad. $f(x) = \text{sign } x$:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \int_0^x 1 dt = x, & x \geq 0 \\ \int_0^x -1 dt = -x, & x \leq 0 \end{cases} = |x|,$$

$$F'_-(0) = -1 = f(0-), F'_+(0) = 1 = f(0+).$$

Věta (Newtonova–Leibnizova formule). *Nechť funkce f je omezená na $\langle a, b \rangle$, $\int_a^b f$ existuje a F je primitivní funkce k f na (a, b) . Pak*

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b-) - F(a+).$$

Důkaz: $|f| \leq M$ na $\langle a, b \rangle$, $a_n = a + \frac{1}{n} \in \langle a, b \rangle$ pro $n \geq n_0$, pro $x \in (a, a_n)$ (Lagrange):

$$|F(x) - F(a_n)| = |f(c_{x,n}) \cdot (x - a_n)| \leq \frac{M}{n},$$

$$F((a, a_n)) \subset \langle F(a_n) - \frac{M}{n}, F(a_n) + \frac{M}{n} \rangle = I_n,$$

$(I_n)_{n=n_0}^\infty$ uzavřené vnořené intervaly délek $\frac{2M}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

$\bigcap_{n=n_0}^\infty I_n = \{F(a+)\}$, $F(a+)$ existuje (podobně $F(b-)$);

$$D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\},$$

$$F(b+) - F(a-) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = (\text{Lagrange})$$

$$= \sum_{i=1}^n F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\underline{S}(f, D) \leq F(b+) - F(a-) \leq \bar{S}(f, D)$$

$$\sup_D \underline{S}(f, D) \leq F(b+) - F(a-) \leq \inf_D \bar{S}(f, D)$$

Příklady.

$$1) \int_0^1 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

$$2) \int_0^\pi x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad v' = \sin x \\ u' = 1 \quad v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= [-x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi - 0 + [\sin x]_0^\pi = \pi + (0 - 0) = \pi.$$

$$3) \int_0^1 x \sqrt{x^2 + 1} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 + 1 = t \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int_1^2 \sqrt{t} dt = \frac{\sqrt{8}-1}{3}.$$

$$4) \int_0^\pi \sin x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int_0^0 t dt = 0.$$

Poznámka. *Newtonův int.:* $(N)\text{-}\int_a^b f(x) = F(b-) - F(a+)$. Existuje-li Riemannův i Newtonův integrál, jsou stejné.

Příklady.

1) $r(x) = \frac{1}{b}$ pro $x = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ nesoudělná, jinak 0,

$$(N)\text{-}\int_{-1}^1 r(x) dx \text{ neex.}, (R)\text{-}\int_{-1}^1 r(x) dx = 0.$$

2) $(N)\text{-}\int_0^1 e^{-x^2} dx$ ex., $(R)\text{-}\int_0^1 e^{-x^2} dx$ ex., F nelze „dobře“ vyjádřit.

$$3) (N)\text{-}\int_0^1 x^{-1/2} dx = 2, (R)\text{-}\int_0^1 x^{-1/2} dx \text{ neex.}$$

$$4) (N)\text{-}\int_1^\infty x^{-2} dx = 1, (R)\text{-}\int_1^\infty x^{-2} dx \text{ neex.}$$

Nevlastní integrál

I neomezené funkce či intervaly, nevlastní hodnoty.

Definice. Necht $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ($a, b \in \bar{\mathbb{R}}$) není omezená nebo (a, b) není omezený, $\int_c^d f$ existuje pro každý $\langle c, d \rangle \subset (a, b)$. Definujeme *nevlastní integrál*:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^e f(x) dx + \lim_{d \rightarrow b-} \int_e^d f(x) dx,$$

pokud je výraz vpravo definován pro některé $e \in (a, b)$. Je-li konečný, řekneme, že integrál *konverguje*.

Poznámka. Výběr e není podstatný, pro e' je:

$$\lim_{c \rightarrow a+} \int_c^{e'} f = \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^e f + \int_e^{e'} f,$$

$$\lim_{d \rightarrow b-} \int_{e'}^d f = \lim_{d \rightarrow b-} \int_e^d f - \int_e^{e'} f.$$

Příklady.

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctg x]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi, \text{ konverguje.}$$

$$2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^{+\infty} = \infty - 0 = \infty, \text{ existuje, nekonzverguje.}$$

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_{-\infty}^{+\infty} = \infty - \infty, \text{ neexistuje.}$$

$$4) \int_0^{+\infty} \sin x dx = [-\cos x]_0^{+\infty} = |\text{neex.} - (-1)| \text{ neex.}$$

Příklady.

$$1) \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad v' = e^{-x} \\ u' = 1 \quad v = -e^{-x} \end{array} \right| = \dots =$$

$$= [e^{-x}(-x-1)]_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-1}{e^x} - (-1) = 0 + 1 = 1.$$

$$2) \int_1^{+\infty} x^{-2} e^{-1/x} dx = \left| \begin{array}{l} -x^{-1} = t \\ x^{-2} dx = dt \end{array} \right| = \int_{-1}^0 e^t dt =$$

$$= [e^t]_{-1}^0 = 1 - \frac{1}{e}.$$

$$3) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = [\ln \frac{x}{x+1}]_0^{+\infty} = \ln 2,$$

nelze $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx = \infty - \infty$.

Poznámka. Linearita, monotonie, odhad absolutní hodnoty integrálu integrálem z absolutní hodnoty platí i pokud připustíme nevlastní integrály (pokud existují příslušné násobky či součty pro případné nevlastní hodnoty).

Poznámka. Definice integrálu by šla vylepšit v případě potřeby jako součet integrálů přes vhodné podintervaly. Například $\int_{-1}^1 x^{-2/3} dx = \int_{-1}^0 x^{-2/3} dx + \int_0^1 x^{-2/3} dx = 6$.

Poznámka. Alternativní rozšíření o nevlastní integrály: Pro $(a, b) = \bigcup_{n=1}^\infty \langle a_n, b_n \rangle$ skoro disjunktní takové, že $\int_{a_n}^{b_n} f$ existují, existují $\int_{a_n}^{b_n} f_{\pm}$ a $I_{\pm} = \sum_{n=1}^\infty \int_{a_n}^{b_n} f_{\pm}$. Pokládáme $\int_a^b f = I_+ - I_-$, pokud je rozdíl definován. Pokud tento integrál konverguje, pak i $\int_a^b |f| = I_+ + I_-$ konverguje (absolutní konvergence integrálu). Newtonův integrál ani zavedený nevlastní integrál nejsou absolutně konvergentní.

Příklad. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ konverguje, $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty$.

Věta. 1) *Jestliže $|f| \leq g$ na (a, b) , $\int_a^b g$ konverguje a f je po částech spojitá, pak $\int_a^b f$ konverguje.*

2) *Jestliže $f \leq g$ na (a, b) , $\int_a^b f = +\infty$ a g je po částech spojitá, pak $\int_a^b g = +\infty$.*

$$\int_0^1 x^a dx = \begin{cases} [\ln x]_0^1 = 0 - (-\infty) = \infty, & a = -1 \\ \left[\frac{x^{a+1}}{a+1} \right]_0^1 = \begin{cases} \frac{1}{a+1} - \frac{\infty}{a+1} = \infty, & a < -1 \\ \frac{1}{a+1} - 0 = \frac{1}{a+1}, & a > -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\int_1^\infty x^a dx = \begin{cases} [\ln x]_1^\infty = \infty - 0 = \infty, & a = -1 \\ \left[\frac{x^{a+1}}{a+1} \right]_1^\infty = \begin{cases} \infty - \frac{1}{a+1} = \infty, & a > -1 \\ 0 - \frac{1}{a+1} = \frac{-1}{a+1}, & a < -1 \end{cases} \end{cases}$$

Tvrzení. *Nechť P, Q jsou nenulové polynomy, Q nemá v $\langle a, +\infty \rangle$ kořeny. Pak $\int_a^{+\infty} \frac{P}{Q}$ konverguje právě tehdy, když $\text{st } Q \geq \text{st } P + 2$.*

Důkaz: $n = \text{st } P - \text{st } Q \in \mathbb{Z}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)x^n} = A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, např. $A > 0$

existuje $b > a, 0$ tak, že $\frac{P(x)}{Q(x)x^n} \in \left(\frac{1}{2}A, \frac{3}{2}A \right)$ pro $x > b$

$\frac{1}{2}Ax^n < \frac{P(x)}{Q(x)} < \frac{3}{2}Ax^n$ ($\frac{P}{Q} \in \Theta(x^n)$ pro $x \rightarrow +\infty$)

$\int_b^\infty \frac{3}{2}Ax^n$ konv. pro $n < -1$, $\int_b^\infty \frac{1}{2}Ax^n = \infty$ pro $n \geq -1$

$\int_b^\infty \frac{P}{Q}$ a $\int_a^\infty \frac{P}{Q}$ konv. právě pro $n < -1$, tj. $n \leq -2$

Příklady. $\int_0^\infty \frac{x^2+4x+5}{x^4+1} dx$ konv., $\int_0^\infty \frac{x^2+4x+5}{x^3+1} dx = +\infty$.

Tvrzení. Necht P, Q jsou nenulové polynomy, $c \in \langle a, b \rangle$ je jediný kořen polynomu Q v $\langle a, b \rangle$ násobnosti větší než polynomu P . Pak $\int_a^b \frac{P}{Q} \in \{\pm\infty\}$ pro n sudé nebo $c \in \{a, b\}$, jinak neexistuje.

Důkaz: $\frac{P}{Q} \in \Theta\left(\frac{1}{(x-c)^n}\right)$ pro $x \rightarrow c$.

Příklady. $\int_{-2}^0 \frac{x^2+4x+5}{x^3+1} dx$ neex., $\int_{-2}^0 \frac{x^2+4x+5}{(x+1)^3} dx = +\infty$.

Příklad (Laplaceova transformace). Necht funkce $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je po částech spojitá a má omezený exponenciální růst, tj. existují konstanty $M, a \in \mathbb{R}$ tak, že $|f(t)| \leq M e^{at}$ ($f = O(e^{at})$). Laplaceovým obrazem funkce f je funkce F daná předpisem

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Je definována pro $p > a$ ($\text{Re } p > a$ v \mathbb{C}):

$|f(t) e^{-pt}| \leq M e^{(a-p)t}$,
 $\int_0^\infty M e^{(a-p)t} dt = \left[\frac{M}{a-p} e^{(a-p)t}\right]_0^\infty = 0 - \frac{M}{a-p}$ konverguje.

Příklad.

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Konverguje pro $x > 0$:

$|t^{x-1} e^{-t}| \leq t^{x-1}$, $\int_0^1 t^{x-1} dt$ konverguje pro $x > 0$;
 pro $n \geq x - 1$ je $|t^{x-1} e^{-t}| \leq t^n e^{-t}$, $\int_1^\infty t^n e^{-t} dt =$
 $=$ (per partes) $= [P_n(t) e^{-t}]_1^\infty = 0 - P_n(1) e^{-1}$ konverguje.
 $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 0 - (-1) = 1$.

$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \left| \begin{array}{l} u = t^x \quad v' = e^{-t} \\ u' = xt^{x-1} \quad v = -e^{-t} \end{array} \right| =$
 $= [-t^x e^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty xt^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x)$.

$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = \dots = (n-1)!\Gamma(1) = (n-1)!$

Aplikace určitého integrálu

Definice. Střední hodnota funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ je

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

pokud integrál konverguje.

Příklad. Střídavé napětí $u(t) = U_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$ má na odporu R okamžitý výkon $p(t) = \frac{1}{R} u^2(t) = \frac{U_0^2}{R} \sin^2 \frac{2\pi t}{T}$. Jeho střední hodnota (například na intervalu $\langle 0, T \rangle$) je $\frac{U_0^2}{2R}$ což pro stejnosměrný proud odpovídá napětí $U_e = \frac{\sqrt{2}}{2} U_0$ (efektivní napětí střídavého proudu).

Věta (o střední hodnotě). Spojitá spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá své střední hodnoty.

Důkaz: f na $\langle a, b \rangle$ má primitivní F , podle Lagrangeovy věty je $\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c) = f(c)$ pro některé $c \in \langle a, b \rangle$.

Poznámka. Aritmetický průměr $(f(i))_{i=1}^n$ je střední hodnota f , pokud použijeme Lebesgueův integrál vzhledem k součtu Diracových měr $\mu = \sum_{i=1}^n \delta_i$ ($\delta_i(M) = 1$ pro $i \in M$, jinak 0): $(\int_1^n f d\mu) / (\int_1^n 1 d\mu) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(i)$.

Věta. Necht funkce $f \leq g$ jsou po částech spojitě na (a, b) , $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Obsah $\{(x, y) : a < x < b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ je

$$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

Důkaz: $\langle c, d \rangle \subset (a, b)$:

ex. $(D_{f,n})_{n=1}^\infty : \underline{S}(f, D_{f,n}), \bar{S}(f, D_{f,n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_c^d f$,

ex. $(D_{g,n})_{n=1}^\infty : \underline{S}(g, D_{g,n}), \bar{S}(g, D_{g,n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_c^d g$,

pro $D_n = D_{f,n} \cup D_{g,n}$:

$$\underline{S}(g, D_n) - \bar{S}(f, D_n) \leq P \leq \bar{S}(g, D_n) - \underline{S}(f, D_n),$$

$$\int_c^d (g - f) \leq P \leq \int_c^d (g - f);$$

limity $c \rightarrow a+, d \rightarrow b-$.

Příklad. Obsah plochy uvnitř elipsy $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ je $4 \int_0^a b \sqrt{1 - (x/a)^2} dx = \pi ab$.

Příklad. Obsah plochy mezi grafy $\frac{1}{x^3}$ a $\frac{1}{x^2}$ na $(1, \infty)$ je $\frac{1}{2}$.

Věta. Necht funkce f má po částech spojitou derivaci na (a, b) . Délka grafu funkce f je

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Důkaz: Pro uzavřený interval (pak případně limity):
 délka = supremum délek po částech lineárních interpolací,
 $l(D) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} =$
 $= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)(x_i - x_{i-1})]^2} =$
 $= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2} (x_i - x_{i-1}), c_i \in (x_{i-1}, x_i),$
 $\underline{S}(\sqrt{1 + (f')^2}, D) \leq l(D) \leq \bar{S}(\sqrt{1 + (f')^2}, D),$
 integrál i supremum délek interpolací jako limity

Příklad. Délka astroidy $(x/r)^{2/3} + (y/r)^{2/3} = 1$ je $4 \int_0^r \sqrt{1 + [((r^{2/3} - x^{2/3})^{3/2})']^2} dx = 6r$.

Věta. Necht funkce f je po částech spojitá na (a, b) , $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Objem $\{(x, y, z) : a < b < a, y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$ je

$$\pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Důkaz: Pro uzavřený interval (pak případně limity): pro dělení D uvažujeme vepsané/opsané válce:

$$\underline{S}(\pi f^2, D) \leq V \leq \bar{S}(\pi f^2, D)$$

$$\pi \int_a^b f^2 \leq V \leq \pi \int_a^b f^2$$

Příklad. Objem kužele ($f(x) = \frac{r}{v} x$ na $\langle 0, v \rangle$) je $\pi \int_0^v r^2 x^2 / v^2 dx = \frac{1}{3} \pi r^2 v$.

Věta. Necht funkce f má po částech spojitou derivaci na (a, b) . Obsah plochy vzniklé rotací grafu f kolem osy x je

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Důkaz (náznak pro uzavřený interval):
 supremum pro po částech lineární interpolace f ,
 obsah pláště komolého kužele: $2\pi \frac{r_1+r_2}{2} s$,
 $\sum_{i=1}^n 2\pi f(c_i) \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} =$
 $\sum_{i=1}^n 2\pi f(c_i) \sqrt{1 + [f'(c'_i)]^2} (x_i - x_{i-1}) \sim$
 $\sim S(2\pi f \sqrt{1 + (f')^2}, D) \rightarrow 2\pi \int_a^b f \sqrt{1 + (f')^2}$

Příklad. Obsah sféry ($f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ na $\langle -r, r \rangle$) je $2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + [\frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-1/2}(-2x)]^2} dx = 4\pi r^2$.

Souřadnice těžiště v rovině:

$$x_T = \frac{M_y}{m}, \quad y_T = \frac{M_x}{m}.$$

Momenty lineárních útvarů (λ je lineární hustota):

$$M_y = \lambda \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

$$M_x = \lambda \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Příklad. Těžiště čtvrtkružnice ($f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ na $\langle 0, r \rangle$) má souřadnice $x_T = y_T = \frac{2}{\pi} r$.

Momenty plošných útvarů ($f \geq 0$, σ je plošná hustota):

$$M_y = \sigma \int_a^b x f(x) dx, \quad M_x = \frac{\sigma}{2} \int_a^b f^2(x) dx.$$

Příklad. Těžiště plochy pod obloukem kosinusoidy ($f(x) = \cos x$ na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$) má souřadnice $x_T = 0$, $y_T = \frac{\pi}{8}$.

Číselné řady

Definice. (Nekonečná číselná) řada je výraz $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots$, kde $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost čísel. Číslo a_k je k -tý člen, $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \dots + a_n$ je n -tý částečný součet, limita posloupnosti částečných součtů je součet.

Řekneme, že řada *konverguje*, má-li konečný součet; *diverguje*, má-li nekonečný součet; *osciluje*, nemá-li součet.

Poznámky.

1) Obecněji $\sum_{k=n}^{\infty}$ pro $n \in \mathbb{Z}$ (lze přeindexovat \mathbb{N}).

2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leftrightarrow (\sum_{k=1}^n a_k)_{n=1}^{\infty}$.

Příklady.

1) $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ diverguje: $s_n = n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ osciluje: $s_n = 1$ pro n liché, $s_n = 0$ pro n sudé.

3) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 2^{-n}) = 1$ konverguje.

Poznámka. Caesarův součet $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \frac{1}{2}$ pro 2).

Poznámka. V komplexním oboru konvergence odpovídá konvergenci reálné a imaginární části. Komplexní čísla se doplňují o jediné ∞ , takže existují (reálné) řady, které v \mathbb{C} divergují a v \mathbb{R} oscilují (posloupnosti částečných součtů mají za hromadné hodnoty $\pm\infty$).

Příklad. Aritmetická řada s diferencí d je řada ve tvaru $\sum_{k=1}^{\infty} (a + (k-1)d) = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \dots$. Částečné součty $s_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n)$, speciálně $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Definice. Geometrická řada s kvocientem q je řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots$.

Věta. $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q}$ pro $|q| < 1$, pro $|q| \geq 1$ a $a_1 \neq 0$ řada *nekonverguje*.

Důkaz:

$$s_n = a_1(1 + q + \dots + q^{n-1})$$

$$q s_n = a_1(q + \dots + q^{n-1} + q^n)$$

$$(1 - q)s_n = a_1(1 - q^n)$$

$$s_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, \quad (q \neq 1)$$

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3^n} = \frac{4/3}{1-1/3} = 2$ ($a_1 = \frac{4}{3}$, $q = \frac{1}{3}$).

Věta. Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergují*, $c \in \mathbb{R}$, pak

1) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} c a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Důkaz: Použití vět o limitách součtu a součinu pro posloupnosti částečných součtů.

Poznámka. Ve výše uvedené větě postupujeme zprava doleva, obráceně to obecně nejde. Část 1) je speciální případ nekonečné komutativity a asociativity, část 2) je nekonečná distributivita.

Věta (nutná podmínka konvergence). Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje*, pak $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Důkaz: $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k - \lim_{k \rightarrow \infty} s_{k-1} = s - s = 0$.

Věta. Řada s *nezápornými* členy má součet.

Důkaz: Posloupnost částečných součtů je neklesající, má tedy limitu.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} = +\infty$ pro $a \leq 0$: *nekonverguje* (členy nejdou k nule), má součet (členy jsou *nezáporné*).

Věta (srovnávací kr.). Necht' $0 \leq a_k \leq b_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

1) Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje*, pak i $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje*.

2) Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverguje*, pak i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *diverguje*.

Důkaz: $\sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k$, limity pro $n \rightarrow \infty$ existují (předcházející věta), věta o monotonii pro limity.

Příklady.

1) *Harmonická řada*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = +\infty.$$

2) $a \leq 1$: $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^a \geq \sum_{k=1}^{\infty} 1/k$, *diverguje*.

Definice. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje absolutně*, pokud *konverguje* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Věta. *Absolutně konvergentní řada konverguje*.

Důkaz: $a_k \in \mathbb{R}$: $a^+ = \max\{a, 0\}$, $a^- = \max\{-a, 0\}$

$$a = a^+ - a^-, |a| = a^+ + a^-, 0 \leq a^+, a^- \leq |a|$$

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *konverguje* ...

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ *konvergují* (srovnávací kritérium) ...

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- \text{ konv.}$$

Poznámka. Geometrická řada konverguje absolutně (když konverguje).

Věta (podílové kritérium). *Nechť $a_k \neq 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.*

1) *Je-li $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje (absolutně).*

2) *Je-li $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonn.*

Důkaz:

1) $|a_k| \leq a_{k-1}|q| \leq \dots \leq |a_1|q^{k-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_1|q^{k-1}$ konv.

2) $|a_k| \geq |a_{k-1}| \geq \dots \geq |a_1|$, $a_k \not\rightarrow 0$

Poznámka. Stačí, aby byly nerovnosti splněny pro dostatečně velká k , tj. počínaje některým k_0 .

Věta (limitní tvar podílového kritéria).

1) *Je-li $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. (abs.).*

2) *Je-li $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonnverguje.*

Příklady.

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konverguje: $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{1}{k+1} \rightarrow 0$.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^k}$ diverguje: $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k+1}{2} \rightarrow +\infty$.

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ - kr. nerozhodne: $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k}{k+1} \nearrow 1$ (diverguje - nestačí, aby podíly byly menší než 1).

4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ - kr. nerozhodne: $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \nearrow 1$ (konv.).

Věta (odmocninové kritérium).

1) *Je-li $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje (absolutně);*

2) *Je-li $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonn.*

Důkaz:

1) $|a_k| \leq q^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ konverguje

2) $|a_k| \geq 1$, $a_k \not\rightarrow 0$

Věta (limitní tvar odmocninového kritéria).

1) *Je-li $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. (abs.).*

2) *Je-li $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonnverguje.*

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$ kr. nerozhodne: $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{k}{k+1} \nearrow 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right]^{-1} = e^{-1} \neq 0$ - diverguje.

Poznámka. V limitních tvarech podílového a odmocninového kritéria stačí $\limsup < 1$ nebo $\liminf > 1$.

Příklad. $a_{2k-1} = 2^{-k}$, $a_{2k} = 2^{1-k}$:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \dots = 3$,

$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \in \left\{2, \frac{1}{4}\right\}$ - podílové kritérium nerozhodne,

$\sqrt[k]{|a_k|} \rightarrow 2^{-1/2} < 1$ - konverguje podle odmocninového kr.

Věta (integrální kritérium). *Nechť f je nezáporná nerostoucí funkce na $\langle 1, +\infty \rangle$. Pak $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.*

Důkaz: $f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1)$,

$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \geq \int_1^{+\infty} f(x) dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - f(1)$

Příklady.

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{+\infty} = +\infty$.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ konverguje pro $a > 1$: $\int_1^{+\infty} x^{-a} dx = \frac{1}{a-1}$.

Věta (Leibnizovo kr.). *Je-li $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost s nulovou limitou, pak $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ konverguje.*

Důkaz: $s_1 \geq s_3 \geq \dots \searrow s'$, $s_2 \leq s_4 \leq \dots \nearrow s'' \leq s'$, $s' - s'' = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$.

Poznámka. Jiná formulace: Alternující řada (střídají se znaménka) s $|a_k| \searrow 0$ konverguje.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots (= \ln 2)$ konverguje: střídají se znaménka, $|a_k| = \frac{1}{k} \searrow 0$. Ne absolutně: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ (podle integrálního kritéria).

Příklad. $a_{2k-1} = 1/k$, $a_{2k} = -1/2^k$. Střídají se znaménka, $|a_k| \rightarrow 0$, ale ne monotónně. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty - \frac{1}{2} = +\infty$ (rozdíl harmonické a geometrické řady).

Definice. Přerovnáním řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nazýváme každou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}$, kde f je bijekce na \mathbb{N} .

Věta. *Jestliže řada konverguje absolutně, pak každé její přerovnání konverguje (absolutně) a má stejný součet.*

Důkaz:

1) $a_k \geq 0$: označme $m_n = \max\{f(1), \dots, f(n)\}$
 $\sum_{k=1}^n a_{f(k)} \leq \sum_{k=1}^{m_n} a_k$, tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
opačná nerovnost: první řada je přerovnáním druhé pro f^{-1}
důsledek: přerovnání abs. konv. řady je abs. konv.

2) $a_k \in \mathbb{R}$: $\sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_{f(k)}^- =$
 $= \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Poznámka. Pro řadu, která konverguje, ale ne absolutně, je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$. Pro každé $c \in \mathbb{R}$ ji pak lze přerovnat tak, abychom dostali součet c .

Pro $c \in \mathbb{R}$ opakujeme:

1) bereme nezáp. členy, dokud součet nebude (poprvé) $> c$

2) bereme záporné členy, dokud součet nebude (poprvé) $< c$

Pro $c = +\infty$ ($c = -\infty$) použijeme v n -tém kroku n ($-n$).

Věta. *Jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ konvergují (absolutně) a jejich součet je roven součtu původní řady.*

Důkaz: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k-1}|, \sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \dots$ konv.
 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k-1} + a_{2k}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Důsledek. *Rozdělením absolutně konvergentní řady na konečně mnoho přeskádaných částí se součet nezmění.*

Poznámka. Neabsolutně konvergentní řada má nekonečně součty nezáporných i záporných členů, jejich rozdíl není definován.

Numerická integrace

Chyby: metody, výpočtu.

Metody: na 1 pokus, iterační (posloupnost konv. k řešení).

Řád: popisuje rychlost konv. při zlepšování parametru.

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx (b-a)(w_1 f(x_1) + \dots + w_k f(x_k)).$$

Střední hodnotu funkce aproximujeme váženým průměrem hodnot v uzlech $x_i \in \langle a, b \rangle$ s váhami w_i ($w_1 + \dots + w_k = 1$). Uzly dle metody, váhy pro největší řád, integrují se přesně polynomy menšího stupně. $M_n = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f^{(n)}(x)|$.

Gaussova metoda

Optimální volba uzlů, řád je dvojnásobek jejich počtu. Řešíme soustavu rovnic pro střední hodnoty mocnin.

Pro $k = 1$ je $w_1 = 1$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, odhad chyby $M_2(b-a)^3/24$.

Pro $k = 2$ na $\langle -1, 1 \rangle$ je $w_{1,2} = \frac{1}{2}$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{1/3}$ řešením

$$\begin{aligned} x^0 : & 1 = w_1 + w_2 \\ x^1 : & 0 = w_1 x_1 + w_2 x_2 \\ x^2 : & \frac{1}{3} = w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 \\ x^3 : & 0 = w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 \end{aligned}$$

Odhad chyby je $M_4(b-a)^5/4320$.

Newtonovy–Cotesovy metody

Uzly z ekvidistantního dělení $\langle a, b \rangle$, včetně (uzavřená metoda) nebo bez (otevřená metoda) krajních bodů a, b . Řád metody je počet uzlů zaokrouhlený na sudé číslo nahoru.

Poznámka. Někdy nekonvergují (pro rostoucí počet uzlů).

Složené metody

Interval $\langle a, b \rangle$ rozdělíme na n částí délek $(b-a)/n = h$ s krajními body $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, na každé použijeme vybranou metodu. Zlepšujeme zvětšováním n .

Obdélníková metoda používá otevřenou Newtonovu–Cotesovu metodu pro jeden uzel (uprostřed, váha je 1):

$$R(h) = h \left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) \right].$$

Věta. Má-li f na $\langle a, b \rangle$ spojitou druhou derivaci, pak

$$|I - R(h)| \leq \frac{M_2}{24} (b-a)h^2, \quad M_2 = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f''(x)|.$$

Důkaz: $\langle x_0, x_1 \rangle$, $s_1 = (x_0 + x_1)/2$. Taylorova věta:

$$f(x) = f(s_1) + f'(s_1)(x - s_1) + \frac{f''(c_x)}{2}(x - s_1)^2$$

pro některý bod $c_x \in (x_0, x_1)$. Chyba integrace je

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx - h f(s_1) \right| &= \left| \int_{x_0}^{x_1} (f(x) - f(s_1)) dx \right| \\ &= \left| f'(s_1) \underbrace{\int_{x_0}^{x_1} (x - s_1) dx}_{=0} + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(c_x) (x - s_1)^2 dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} |f''(c_x)| (x - s_1)^2 dx \leq \frac{M_2}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x - s_1)^2 dx \\ &= \left| \frac{x - s_1 = t}{dx = dt} \right| = M_2 \int_0^{h/2} t^2 dt = M_2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{h/2} = \frac{M_2}{24} h^3. \end{aligned}$$

Stejný odhad je na ostatních podintervalech:

$$|I - R(h)| \leq \frac{M_2}{24} h^3 n = \frac{M_2}{24} (b-a)h^2.$$

Poznámka. Pokud bychom použili hodnotu (např.) v levém krajním bodě (pro funkci danou tabulkou), dostali bychom metodu řádu 1 s odhadem chyby $\frac{M_1}{2} (b-a)h$.

Lichoběžníková metoda používá uzavřenou Newtonovu–Cotesovu metodu pro 2 uzly (váhy jsou 1/2):

$$T(h) = h \left[\frac{1}{2} f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(b) \right].$$

Věta. Je-li P lineární interpolace funkce f se spojitou druhou derivací na intervalu $\langle x_0, x_1 \rangle$ (tj. P je lineární funkce, $P(x_0) = f(x_0)$, $P(x_1) = f(x_1)$), pak pro $x \in \langle x_0, x_1 \rangle$ je

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M_2}{2} |(x - x_0)(x - x_1)|.$$

Důkaz: Pro $x \in (x_0, x_1)$ má funkce

$$g(t) = f(t) - P(t) - (f(x) - P(x)) \frac{(t - x_0)(t - x_1)}{(x - x_0)(x - x_1)}.$$

tři nulové body x_0, x_1, x . Podle Rolleovy věty má g' dva nulové body v (x_0, x_1) a g'' nulový bod $c_x \in (x_0, x_1)$:

$$0 = g''(c_x) = f''(c_x) - (f(x) - P(x)) \frac{2}{(x-x_0)(x-x_1)}$$

$$f(x) - P(x) = \frac{f''(c_x)}{2} (x - x_0)(x - x_1),$$

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M_2}{2} |(x - x_0)(x - x_1)|.$$

Poznámka. Je-li P polynomiální interpolace funkce f se spojitou derivací řádu $n + 1$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ pro různé body $x_0, \dots, x_n \in \langle a, b \rangle$, pak pro $x \in \langle a, b \rangle$ je

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x - x_0) \dots (x - x_n)|.$$

Věta. Má-li f na $\langle a, b \rangle$ spojitou druhou derivaci, pak

$$|I - T(h)| \leq \frac{M_2}{12} (b-a)h^2, \quad M_2 = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f''(x)|.$$

Důkaz: $\langle x_0, x_1 \rangle$, $s_1 = (x_0 + x_1)/2$. Chyba integrace je

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^{x_1} (f(x) - P(x)) dx \right| &\leq \int_{x_0}^{x_1} |f(x) - P(x)| dx \\ &\leq \frac{M_2}{2} \int_{x_0}^{x_1} |(x - x_0)(x - x_1)| dx = \left| \frac{x - s_1 = t}{dx = dt} \right| \\ &= \frac{M_2}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^2}{4} - t^2 \right) dt = M_2 \left[\frac{1}{4} h^2 t - \frac{1}{3} t^3 \right]_0^{h/2} \\ &= M_2 \left(\frac{1}{8} h^3 - \frac{1}{24} h^3 \right) = \frac{M_2}{12} h^3. \end{aligned}$$

Stejný odhad je na ostatních podintervalech:

$$|I - T(h)| \leq \frac{M_2}{12} h^3 n = \frac{M_2}{12} (b-a)h^2.$$

Poznámka. Odhad chyby obdélníkové metody je lepší než u lichoběžníkové, přestože se používá horší polynom. Využití středu intervalu odpovídá totiž aproximaci tečnou.

Simpsonova metoda používá uzavřenou Newtonovu–Cotesovu metodu pro 3 uzly. Rozděluje tedy každý podinterval na dva. Pro lepší srovnání označme n (sudý) počet všech takto vzniklých podintervalů. Hodnoty vah získáme integrací kvadratické interpolace, kterou dostaneme lineární kombinací Lagrangeových polynomů P_i , $P_i(x_j) = \delta_{i,j}$:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} P(x) dx &= \left| \frac{(x - x_1) = ht}{dx = h dt} \right| = h \int_{-1}^1 \tilde{P}(t) dt \\ &= h \int_{-1}^1 (f(x_0) P_0(t) + f(x_1) P_1(t) + f(x_2) P_2(t)) dt \\ &= h \int_{-1}^1 \left(f(x_0) \frac{(t-0)(t-1)}{(-1-0)(-1-1)} + f(x_1) \frac{(t+1)(t-1)}{(0+1)(0-1)} + \right. \\ &\quad \left. + f(x_2) \frac{(t+1)(t-0)}{(1+1)(1-0)} \right) dt \\ &= h \left[\frac{1}{3} f(x_0) + \frac{4}{3} f(x_1) + \frac{1}{3} f(x_2) \right]. \end{aligned}$$

Sečtením přes dvojice podintervalů dostaneme

$$S(h) = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Věta. Má-li f na $\langle a, b \rangle$ spojitou čtvrtou derivaci, pak

$$|I - S(h)| \leq \frac{M_4}{180} (b-a)h^4, \quad M_4 = \max_{x \in \langle a, b \rangle} |f^{(4)}(x)|.$$

Poznámka. Simpsonova metoda je řádu 4 a je tedy přesná i pro polynomy stupně 3. Pro ověření stačí (linearita integrálu i $S(h)$) spočítat $\int_{x_1-h}^{x_1+h} x^3 dx = 2x_1^3h + 2x_1h^3 = S(h)$.

Richardsonova extrapolace

Pro metodu F řádu p konvergující k $F(0)$ je

$$F(h) = F(0) + ah^p + O(h^q),$$

kde $a \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > p$. Uvažujme $h > 0$ a proložme body $[h^p, F(h)]$ a $[(2h)^p, F(2h)]$ přímkou:

$$P(x) = F(h) + \frac{F(2h) - F(h)}{(2^p - 1)h^p} (x - h^p).$$

Richardsonova extrapolace je $P(0) \approx F(0)$, tj.

$$F(h) + \frac{F(h) - F(2h)}{2^p - 1} = F_1(h).$$

Věta. Nechť $F(h) = F(0) + ah^p + O(h^q)$, $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$. Pak $F_1(h) = F(0) + O(h^q)$.

Důkaz: $O(h^q)$ je uzavřeno na lineární kombinace:

$$F(2h) = F(0) + a2^ph^p + O(h^q)$$

$$F_1(h) = F(0) + ah^p + \frac{a(1 - 2^p)h^p}{2^p - 1} + O(h^q) = F(0) + O(h^q).$$

Příklady. Uvedené metody mají chyby jen sudých řádů:

$$T_1(h) = T(h) + \frac{1}{3} (T(h) - T(2h)) \quad \text{řádu } 4,$$

$$S_1(h) = S(h) + \frac{1}{15} (S(h) - S(2h)) \quad \text{řádu } 6.$$

Poznámky. Odstraníme chybu nejnižšího řádu.

1) Dostaneme přesnější metodu.

2) Přičítaná hodnota dobře odhaduje chybu (nemusí to být horní odhad), což můžeme použít v iteračním postupu: Spočteme pro h , opakovaně počítáme pro poloviční krok a odhadujeme chybu, dokud nedosáhneme požadované přesnosti. Pro lichoběžníkovou a Simpsonovu metodu stačí dopočítat hodnoty jen v nových bodech (můžeme mít dokonce uloženy součty pro předcházející krok).

Poznámka. $T_1(h) = \frac{4}{3}T(h) - \frac{1}{3}T(2h) = \frac{4h}{3}(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots) - \frac{2h}{3}(f(x_0) + f(x_2) + \dots) = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots) = S(h)$.

Rombergova metoda

Začneme s lichoběžníkovou metodou, při přechodu k polovičnímu kroku dopočítáme všechny dostupné Richardsonovy extrapolace (v k -tém sloupci je metoda řádu $2k$), odhadujeme chyby hodnot pod diagonálou:

$$\begin{array}{ccccccc} T(h) & & & & & & \\ T(h/2) & T_1(h/2) & & & & & \\ T(h/4) & T_1(h/4) & T_2(h/4) & & & & \\ T(h/8) & T_1(h/8) & T_2(h/8) & T_3(h/8) & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \end{array}$$

Příklad. Spočtete $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$ s přesností $\varepsilon = 10^{-6}$.

Pro uvedené složené metody (R, T, S) můžeme využít odhady chyb, ve kterých přepíšeme $h = (b-a)/n$.

$$M_2 = \max_{x \in (0,1)} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} (x^2 - 1) \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

$$M_4 = \max_{x \in (0,1)} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} (x^4 - 6x^2 + 3) \right| = \frac{3}{\sqrt{2\pi}}.$$

$$\varepsilon > \frac{M_2(b-a)^3}{24n_R^2} \quad n_R > \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{24\varepsilon}} \doteq 128,9 \quad n_R \geq 129$$

$$\varepsilon > \frac{M_2(b-a)^3}{12n_T^2} \quad n_T > \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{12\varepsilon}} \doteq 182,3 \quad n_T \geq 183$$

$$\varepsilon > \frac{M_4(b-a)^5}{180n_S^4} \quad n_S > \sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{180\varepsilon}} \doteq 7,2 \quad n_S \geq 8$$

Skutečné chyby jsou o něco menší:

metoda	R	T	S
$10^6 \cdot$ chyba	-0,606	0,602	-0,660

Stačilo by:

metoda	R	T	S	Romberg	Gauss
dělení	101	143	8	4	1
hodnot	101	144	9	5	3

Iterační proces by skončil:

metoda	R	T	S
dělení	128	256	8
hodnot	255	257	9

Diferenciální rovnice

(Obyčejná) dif. rovnice řádu n : $F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$.

Speciální tvar: $x^{(n)} = f(t, x, \dots, x^{(n-1)})$.

Řešení na intervalu I : funkce $x: I \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že pro každé $t \in I$ je $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$.

Maximální řešení: neexistuje řešení na větším intervalu.

Cauchyova úloha: navíc počáteční podmínky:

$$x(t_0) = x_{0,0}, \quad x'(t_0) = x_{0,1}, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{0,n-1}.$$

Počáteční podmínky „obvykle“ vyberou jedno z pole řešení.

Jednoznačnost Cauchyovy úlohy: řešení splývají na okolí t_0 .

Separovatelné diferenciální rovnice 1. řádu

$$x' = g(t)h(x), \quad x(t_0) = x_0$$

Věta. Nechť I, J jsou otevřené intervaly, funkce g je spojitá na $I \ni t_0$, funkce h je spojitá na $J \ni x_0$. Pak $x' = g(t)h(x)$, $x(t_0) = x_0$, má řešení na intervalu $I' \subset I$ obsahujícím t_0 . Je-li navíc h' spojitá na J , pak je toto řešení jednoznačné.

Postup řešení:

1) $h(x_0) = 0 \dots x(t) = x_1, t \in I$ je stacionární řešení

2) $h(x_0) \neq 0 \dots h(x) \neq 0$ na okolí x_0

$$x'(t) = g(t)h(x(t))$$

$$\int \frac{x'(t)}{h(x(t))} dt = \int g(t) dt$$

$$\left| \begin{array}{l} x(t) = y \\ x'(t) dt = dy \end{array} \right| : \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t) dt$$

$$H_1(y) = G(t) + c$$

$$x(t) = y = \dots$$

3) Počáteční podmínka: dopočítat c nebo

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{h(y)} = \int_{t_0}^t g(u) du$$

4) Interval řešení: graf řešení se „zarazí“ o hranici $I \times J$.

Poznámka. Separaci proměnných lze použít pouze pro nestacionární řešení!!!

Příklad. $x' = -\lambda x$, $x(0) = x_0 > 0$ (radioaktivní rozpad).
 $g(t) = -\lambda$, $h(x) = x$, $h'(x) = 1$ spoj. na $\mathbb{R} \dots$ ex. a jedn.;
 stacionární řešení: $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ (nevyhovuje);
 nestacionární řešení:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int -\lambda dt$$

$$\ln|x| = -\lambda t + \ln|c| \quad (c > 0)$$

$$|x| = |c|e^{-\lambda t}$$

$$x(t) = ce^{-\lambda t} \quad (c \neq 0)$$

dosazení počáteční podmínky: $x_0 = ce^{-\lambda \cdot 0}$, tj. $c = x_0$;
 řešení: $x(t) = x_0 e^{-\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Příklad. $x' = \frac{x^2-1}{2t}$.

$g(t) = \frac{1}{t}$, spojitá na $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, $h(x) = \frac{x^2-1}{2}$,
 $h'(x) = x$ spojitě na \mathbb{R} , ... existence a jednoznačnost;
 stacionární řešení: $x_{1,\pm}(t) = \pm 1$, $t \in (-\infty, 0)$, $x_{2,\pm}(t) =$
 $= \pm 1$, $t \in (0, +\infty)$;
 nestacionární řešení:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2-1}{2t}$$

$$\int \frac{2}{x^2-1} dx = \int \frac{dt}{t}$$

$$\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \ln|t| + \ln|c| \quad (c > 0)$$

$$\frac{x-1}{x+1} = ct \quad (c \neq 0)$$

$$x(t) = \frac{1+ct}{1-ct}$$

intervaly řešení: $t \neq 0$, $t \neq \frac{1}{c}$;

pro počáteční podmínky:

- $x(0) = 2$: nelze ($t \neq 0$);
- $x(1) = -1$: stac. $x(t) = -1$, $t \in (0, +\infty)$;
- $x(1) = 0$: $c = -1$, $x(t) = \frac{1-t}{1+t}$, $t \in (0, +\infty)$;
- $x(-\frac{1}{2}) = 3$: $c = -1$, $x(t) = \frac{1-t}{1+t}$, $t \in (-1, 0)$;
- $x(1) = -1$: $c = 3$, $x(t) = \frac{1+3t}{1-3t}$, $t \in (\frac{1}{3}, 0)$.

Příklad. $x' = 3x^{2/3}$.

$g(t) = 1$, $h(x) = 3x^{2/3}$ spojitě na $\mathbb{R} \dots$ existence,
 navíc $h'(x) = 2x^{-1/3}$ spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\} \dots$ jedn. pro $x \neq 0$;
 stacionární řešení: $x(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$;
 nestacionární řešení:

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{2/3}$$

$$\int \frac{1}{3} x^{-2/3} dx = \int dt$$

$$x^{1/3} = t - c$$

$$x(t) = (t - c)^3, \quad t \in (-\infty, c), \quad t \in (c, +\infty)$$

Řešení se v bodech nejednoznačnosti dají spojovat, obecné řešení je

$$x_{c,d}(t) = \begin{cases} (t-c)^3, & t \leq c, & c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \\ 0, & c < t < d, & d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \\ (t-d)^3, & d \leq t, & c \leq d. \end{cases}$$

Příklad. $x' = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{x}{e^x}$.

separace:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{x}{e^x}$$

$$\int \frac{e^x}{x} dx = \int \frac{1}{\ln t} dt$$

integrály nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí

Příklad. nestacionární řešení:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \cdot \frac{x+1}{x-1}$$

$$\int \frac{x-1}{x+1} dx = \int \frac{dt}{t}$$

$$x - 2 \ln|x+1| = \ln t + c$$

pro poč. podmínku: $0 - 0 = 0 + c$, tj. $c = 0$ ($t > 0$, $|x| < 1$),
 $x(t) - 2 \ln(x(t) + 1) - \ln t = 0$, je zadaná *implicitně*

Lineární diferenciální rovnice (LDR)

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

a_{n-1}, \dots, a_0 jsou koeficienty, b je pravá strana.

(Přidružená) homogenní LDR: $b(t) = 0$.

Předpoklady: a_{n-1}, \dots, a_0, b spojitě na intervalu $I \ni t_0$.

Věta. Cauchyova úloha má právě jedno řešení na I .

$C(I)$: lineární prostor funkcí spojitých na I .

$C^n(I)$: lineární prostor funkcí se spoj. n -tou derivací na I .

Lineární diferenciální operátor $D: C^n(I) \rightarrow C(I)$:

$$x \mapsto x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x.$$

Věta. 1) Jsou-li x_1, x_2 řešení LDR, pak $x_1 - x_2$ je řešení přidružené homogenní rovnice.

2) Je-li x řešení LDR a \tilde{x} řešení přidružené homogenní rovnice, pak $x + \tilde{x}$ je řešení dané LDR.

3) Jsou-li x_1, x_2 řešení pro pravé strany b_1, b_2 , pak $x_1 + x_2$ je řešení pro pravou stranu $b_1 + b_2$ (princip superpozice).

Poznámka. Obecné řešení LDR lze zapsat ve tvaru $x(t) = \hat{x}(t) + \tilde{x}(t)$, kde $\hat{x}(t)$ je libovolné (partikulární) řešení a $\tilde{x}(t)$ je obecné řešení přidružené homogenní rovnice.

Věta. Množina řešení homogenní LDR řádu n tvoří lineární prostor dimenze n .

Důkaz: $D: x \mapsto x^{(n)} + \dots + a_1 x' + a_0 x$ je lineární, množina řešení je jeho jádro, tj. lineární prostor.

$x(t_0)$	$x'(t_0)$	\dots	$x^{(n-1)}(t_0)$	řešení C. úlohy
1	0	\dots	0	$\rightarrow x_0(t)$
0	1	\dots	0	$\rightarrow x_1(t)$
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
0	0	\dots	1	$\rightarrow x_{n-1}(t)$
$x_{0,0}$	$x_{0,1}$	\dots	$x_{0,n-1}$	$\rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} x_{0,i} x_i(t)$

\dots lineární obal $\{x_0(t), \dots, x_{n-1}(t)\}$ je celý prostor řešení

$$A_0 x_0(t) + \dots + A_{n-1} x_{n-1}(t) = 0 \xrightarrow{t=t_0} A_0 = 0$$

$$' : A_0 x_0'(t) + \dots + A_{n-1} x_{n-1}'(t) = 0 \xrightarrow{t=t_0} A_1 = 0 \quad \dots$$

\dots funkce $x_0(t), \dots, x_{n-1}(t)$ jsou lineárně nezávislé

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Homogenní LDR 1. řádu $x' + a(t)x = 0$ je separovatelná: $x' = -a(t)x$. Stacionární řešení je $x_s(t) = 0, t \in I$. Nestacionární řešení dostaneme separací proměnných

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= -a(t)\tilde{x}(t) \\ \int \frac{\tilde{x}(t)}{x(t)} dt &= \int -a(t) dt \\ \ln |\tilde{x}(t)| &= -A(t) + \ln |c| \quad (c > 0) \\ |\tilde{x}(t)| &= |c| e^{-A(t)} \\ \tilde{x}(t) &= c e^{-A(t)} \quad (c \neq 0) \end{aligned}$$

Přidáme stacionární řešení: $\tilde{x}(t) = c e^{-A(t)}, t \in I (c \in \mathbb{R})$.

Partikulární řešení LDR 1. řádu $x' + a(t)x = b(t)$ najdeme *variací konstanty*, tj. ve tvaru obecného řešení přidružené homogenní rovnice, ve kterém konstantu nahradíme funkcí: $\hat{x}(t) = c(t) e^{-A(t)}$. Dostaneme:

$$\begin{aligned} c'(t) e^{-A(t)} + c(t) e^{-A(t)} a(t) + a(t) c(t) e^{-A(t)} &= b(t) \\ c'(t) &= b(t) e^{A(t)} \end{aligned}$$

integrací najdeme některou funkci $c(t)$.

Příklad. $x' = 0,1 + \frac{x}{t+0,1}, x(0) = 0, t \in \langle 0, +\infty \rangle$.

$a(t) = -\frac{1}{t+0,1}, b(t) = 0,1$ spojitě na $\langle 0, +\infty \rangle \dots$ existence a jednoznačnost na $\langle 0, +\infty \rangle$;

řešení přidružené homogenní rovnice:

$$\begin{aligned} \int \frac{\tilde{x}'(t)}{\tilde{x}(t)} dt &= \int \frac{dt}{t+0,1} \\ \ln |\tilde{x}(t)| &= \ln |t+0,1| + \ln |c| \\ |\tilde{x}(t)| &= |c(t+0,1)| \\ \tilde{x}(t) &= c(t+0,1) \end{aligned}$$

partikulární řešení ve tvaru $\hat{x}(t) = c(t)(t+0,1)$:

$$\begin{aligned} c'(t)(t+0,1) + c(t) \cdot 1 &= c(t) + 0,1 \\ c'(t) &= \frac{0,1}{t+0,1} \\ c(t) &= 0,1 \ln(t+0,1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= c(t)(t+0,1) = 0,1(t+0,1) \ln(t+0,1) \\ x(t) &= \hat{x}(t) + \tilde{x}(t) = (t+0,1)(0,1 \ln(t+0,1) + c) \end{aligned}$$

pro počáteční podmínku: $0 = 0,1(0,1 \ln(t+0,1) + c)$, tj. $c = -0,1 \ln 0,1$:

$$x(t) = 0,1(t+0,1) \ln(10t+1), \quad t \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Funce $e^{\lambda t}$ vyhovuje homogenní LDR s konstantními koeficienty právě tehdy, když $e^{\lambda t}(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0) = 0$.

Charakteristická rovnice pro LDR s konstantními koeficienty: $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$.

Má-li reálný polynom imaginární kořen, pak má za kořen i číslo k němu komplexně sdružené (stejně násobnosti).

Pro imaginární kořeny $\alpha \pm \beta j$ dostaneme komplexní řešení

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\alpha + \beta j} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + j \sin \beta t), \\ x_2(t) &= e^{\alpha - \beta j} = e^{\alpha t}(\cos \beta t - j \sin \beta t). \end{aligned}$$

Z těchto komplexních řešení dostaneme reálná řešení

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t)) &= e^{\alpha t} \cos \beta t = \operatorname{Re} x_1(t), \\ \frac{1}{2}(x_1(t) - x_2(t)) &= e^{\alpha t} \sin \beta t = \operatorname{Im} x_1(t). \end{aligned}$$

Věta. Bázi prostoru řešení homogenní LDR s konstantními koeficienty dostaneme z kořenů její charakteristické rovnice:

1) Pro každý k -násobný reálný kořen λ vezmeme

$$e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}.$$

2) Pro každou dvojici k -násobných imaginárních kořenů $\alpha \pm \beta j$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) vezmeme

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \cos \beta t, t e^{\alpha t} \cos \beta t, \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \cos \beta t, \\ e^{\alpha t} \sin \beta t, t e^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \sin \beta t. \end{aligned}$$

Příklad. $x' + ax = 0, x(0) = x_0$ (radioaktivní rozpad).

Homogenní LDR s konstantními koef., jedno řešení na \mathbb{R} . Charakteristická rovnice $\lambda + a = 0$ má řešení $\lambda_1 = -a$, tomu odpovídá řešení LDR $x_1(t) = e^{-at}$. Obecné řešení (jednorozměrný prostor) je $c e^{-at}$ ($c \in \mathbb{R}$).

Dosazení počáteční podmínky: $x_0 = c e^{-a \cdot 0}$, tj. $c = x_0$.

Řešení: $x(t) = x_0 e^{-at}, t \in \mathbb{R}$.

Partikulární řešení LDR najdeme *variací konstant*. Při derivování si přidáváme podmínky, dostaneme soustavu rovnic pro neznámé $c'_i(t)$ (pro každé $t \in I$ regulární soustavu lineárních rovnic):

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) \\ \hat{x}(t) &= c_1(t) x_1(t) + \dots + c_n(t) x_n(t) \\ \hat{x}'(t) &= c_1(t) x_1'(t) + \dots + c_n(t) x_n'(t) \\ &\quad + \underbrace{c_1'(t) x_1(t) + \dots + c_n'(t) x_n(t)}_{=0} \\ \hat{x}''(t) &= c_1(t) x_1''(t) + \dots + c_n(t) x_n''(t) \\ &\quad + \underbrace{c_1'(t) x_1'(t) + \dots + c_n'(t) x_n'(t)}_{=0} \\ &\quad \vdots \\ \hat{x}^{(n)}(t) &= c_1(t) x_1^{(n)}(t) + \dots + c_n(t) x_n^{(n)}(t) \\ &\quad + c_1'(t) x_1^{(n-1)}(t) + \dots + c_n'(t) x_n^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

Příklad. $x'' + x = \frac{1}{\cos t}$, $t \in I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

LDR, funkce $1, \frac{1}{\cos t}$ spojité na I , řešení na I .

Char. rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm j$, báze $\{\cos t, \sin t\}$,

$\tilde{x}(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, $\hat{x}(t) = c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t$,

$$c_1'(t) \cos t + c_2'(t) \sin t = 0$$

$$-c_1'(t) \sin t + c_2'(t) \cos t = \frac{1}{\cos t}$$

$c_1'(t) = -\operatorname{tg} t$, $c_1(t) = \ln |\cos t|$, $c_2'(t) = 1$, $c_2(t) = t$,

$x(t) = \ln(\cos t) \cdot \cos t + t \sin t + c_1 \cos t + c_2 \sin t$.

Metoda odhadu pro nalezení partikulárního řešení LDR s konstantními koef. a kvazipolynomiální pravou stranou:

Jsou-li P, Q polynomy stupně nejvýše m ,

$$b(t) = e^{\alpha t} (P(t) \cos \beta t + Q(t) \sin \beta t),$$

$(\alpha + \beta j)$ (číslo pravé strany) je k -násobný kořen charakteristické rovnice, pak existuje partikulární řešení ve tvaru

$$\hat{x}(t) = t^k e^{\alpha t} (\hat{P}(t) \cos \beta t + \hat{Q}(t) \sin \beta t),$$

kde \hat{P}, \hat{Q} jsou polynomy stupně nejvýše m .

Příklad. $x'' - 4x = e^{2t} - 4 \cos 2t$.

Pravá strana je spojitá na \mathbb{R} , řešení budou na \mathbb{R} .

Charakteristická rovnice: $\lambda^2 - 4 = 0$, řešení $\lambda_{1,2} = \pm 2$.

Obecné řešení přidružené hom.: $\tilde{x}(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$.

Pro $b_1(t) = e^{2t}$: číslo pravé strany $2 + 0j = 2$ je kořen char. rovnice násobnosti 1, partikulární řešení $\hat{x}_1(t) = At e^{2t}$.

Pro $b_2(t) = -4 \cos t$: $0 + 2j = 2j$ není kořen char. rovnice, partikulární řešení $\hat{x}_2(t) = B \cos 2t + C \sin 2t$.

Princip superpozice: $\hat{x}(t) = At e^{2t} + B \cos 2t + C \sin 2t$.

Do DR: $4A e^{2t} - 8B \cos 2t - 8C \sin 2t = e^{2t} - 4 \cos 2t$.

Provnáním koeficientů u jednotlivých funkcí:

$$e^{2t} : \quad 4A = 1,$$

$$\cos 2t : \quad -8B = -4,$$

$$\sin 2t : \quad -8C = 0.$$

Řešení soustavy lineárních rovnic: $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 0$.

Partikulární řešení: $\hat{x}(t) = \frac{1}{4} t e^{2t} + \frac{1}{2} \cos 2t$.

Obecné řešení: $x(t) = \frac{1}{4} t e^{2t} + \frac{1}{2} \cos 2t + c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$,
 $t \in \mathbb{R}$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).