

Prostory \mathbb{R}^n

Euklidovský prostor $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$: n -rozměrné aritmetické vektory $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ s operacemi

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) && \text{součet} \\ a\mathbf{x} &= (ax_1, \dots, ax_n) && \text{skalární násobek} \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= x_1y_1 + \dots + x_ny_n && \text{skalární součin}\end{aligned}$$

$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ tvoří (standardní) ortonormální bázi \mathbb{R}^n .

nulový vektor: $\mathbf{o} = (0, 0, \dots, 0)$.

norma (euklidovská): $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Základní vlastnosti normy:

- (1) $\|\mathbf{x}\| > 0$ pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ ($\|\mathbf{o}\| = 0$)
- (2) $\|a \cdot \mathbf{x}\| = |a| \cdot \|\mathbf{x}\|$
- (3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (trojúhelníková nerovnost)
- (4) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \cos \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Poznámka. n -rozměrná koule se středem \mathbf{a} a poloměrem r (interval pro $n = 1$, kruh pro $n = 2$, koule pro $n = 3$):

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r, \quad (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 \leq r^2.$$

Definice. Diametr (průměr) neprázdné množiny $M \subset \mathbb{R}^n$:

$$\text{diam}(M) = \sup\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M\} \quad (\text{diam}(\emptyset) = 0).$$

Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je omezená, má-li konečný diametr.

Poznámka. Množina je omezená právě tehdy, když jsou omezené vzdálenosti jejích bodů od počátku, tj. omezené jsou množiny všech souřadnic.

Definice. Pro $\varepsilon > 0$ definujeme:

ε -okolí bodu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$U(\mathbf{x}, \varepsilon) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \varepsilon\},$$

prstencové ε -okolí bodu $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$P(\mathbf{x}, \varepsilon) = U(\mathbf{x}, \varepsilon) \setminus \{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : 0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \varepsilon\}.$$

Definice. Nechť $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $M \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že \mathbf{x} je:

- 1) vnitřní bod M , pokud existuje okolí $U(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset M$;
- 2) vnější bod M , pokud existuje okolí $U(\mathbf{x}, \varepsilon)$ disjunktní s M (tj. $U(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$);
- 3) hraniční bod M , pokud každé okolí bodu \mathbf{x} má neprázdný průnik s M i s $(\mathbb{R}^n \setminus M)$;
- 4) hromadný bod M , pokud každé prstencové okolí bodu \mathbf{x} má neprázdný průnik s M ;
- 5) izolovaný bod M , pokud $\mathbf{x} \in M$ a existuje prstencové okolí bodu \mathbf{x} disjunktní s M .

Poznámky.

- 1) Každý bod \mathbb{R}^n je právě jednoho typu z 1)–3).
- 2) Každý bod M je právě jednoho typu z 4)–5).
- 3) Izolovaný bod je hraniční.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$.

Vnitřek M je množina všech vnitřních bodů M .

Hranice M je množina všech hraničních bodů M .

Uzávěr M je sjednocení množiny M s její hranicí.

Poznámka. Uzávěr množiny je disjunktní sjednocení jejího vnitřku a hranice.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá:

otevřená, je-li rovna svému vnitřku;

uzavřená, je-li rovna svému uzávěru.

Poznámky.

- 1) Množina nemusí být ani otevřená, ani uzavřená.
- 2) Otevřená a zároveň uzavřená (tzv. obojetná) množiny v \mathbb{R}^n jsou pouze \emptyset a \mathbb{R}^n .
- 3) Množina je otevřená (uzavřená) právě tehdy, když její doplněk je uzavřená (otevřená) množina.
- 4) Průnik (sjednocení) konečně mnoha a sjednocení (průnik) libovolně mnoha otevřených (uzavřených) množin je otevřená (uzavřená) množina.

Definice. Otevřená množina v \mathbb{R}^n je souvislá, když každé dva její body lze spojit lomenou čarou ležící v této množině.

Definice. Otevřená souvislá množina se nazývá oblast.

Funkce více proměnných

Definice. (Reálná) funkce n (reálných) proměnných je zobrazení $f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$, kde $\emptyset \neq D(f) \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá definiční obor f . $R(f) = f(D(f))$ se nazývá obor hodnot f .

Poznámky.

- 1) Není-li zadán $D(f)$, bereme maximální možný.
- 2) V prostorech „malé“ dimenze místo $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ píšeme (x, y) , (x, y, z) , \dots
- 3) Vypouštíme „zdvojené“ závorky: místo $f((x_1, \dots, x_n))$ píšeme $f(x_1, \dots, x_n)$.

Definice. Graf funkce f je $\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in D(f)\}$.

Definice. Vektorová funkce je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^k , vektorové pole je zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^n .

$\mathbf{f}: D(\mathbf{f}) \rightarrow \mathbb{R}^k$, $D(\mathbf{f}) \subset \mathbb{R}^n$

$\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n))$

$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k)$

vyšetřujeme „po složkách“, tj. f_1, \dots, f_k

Definice. Nechť $M \subset D(f)$. Funkce f má v bodě \mathbf{a} limitu b vzhledem k M , pokud \mathbf{a} je hromadný bod M a pro každé okolí U bodu b existuje prstencové okolí P bodu \mathbf{a} tak, že $f(P \cap M) \subset U$. Píšeme

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \in M}} f(\mathbf{x}) = b.$$

Poznámka. $M = D(f)$ vypouštíme, někdy místo $x \in M$ píšeme (ne)rovnosti, které M určují.

Příklad. $n = 1$, $M = (a, \infty)$: limita zprava

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in (a, +\infty)}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

Definice. Funkce f je spojitá v bodě $\mathbf{a} \in D(f)$, pokud \mathbf{a} je izolovaný bod $D(f)$ nebo $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$. Funkce je spojitá, je-li spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Poznámka. Jednoznačnost limity, limita a spojitost součtu, rozdílu, součinu, podílu, složené funkce. Spojitá funkce na omezené uzavřené množině nabývá maxima a minima, obor hodnot spojitě funkce na souvislé množině je souvislá množina (interval nebo jednobodová). Spojitá funkce n proměnných je spojitá v $m \geq n$ proměnných.

Příklad. $f(x) = x^2$, $g(y) = y$, $h(t) = e^t$ jsou spojitě, takže $h(f(x) + g(y)) = e^{x^2+y}$ je spojitá.

Poznámka. Pro f spojitou na \mathbb{R}^n : $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) > 0\}$ je otevřená, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \geq 0\}$ je uzavřená, $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = 0\}$ je uzavřená (hranice předcházejících).

Věta. Necht \mathbf{a} je hromadný bod $D(f)$; $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b$ právě tehdy, když $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = b$ pro každou $M \subset D(f)$ takovou, že \mathbf{a} je její hromadný bod.

Příklady.

- $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} = \frac{k^2}{1+k^4}$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$ neex.,
- $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=kx}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = 0$, $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x^2}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$,
 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$ využitím polárních souřadnic

Derivace funkcí více proměnných

Parciální derivace

Definice. Parciální derivace funkce $f(\mathbf{x})$ podle x_i v \mathbf{a} :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \varphi'_i(a_i), \quad \varphi_i(x_i) = f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_n).$$

Gradient funkce f v bodě \mathbf{a} :

$$\text{grad } f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right).$$

Příklad. $f(x, y) = e^x + x^2 y$, $\mathbf{a} = (1, 2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x + 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = e + 4,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 1,$$

$$\text{grad } f(x, y) = (e^x + 2xy, x^2), \quad \text{grad } f(1, 2) = (e + 4, 1).$$

Definice. Jacobiho matice vekt. funkce $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_k)$:

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \text{grad } f_k(\mathbf{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Poznámka. $(\text{grad } f): \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \mapsto \text{grad } f(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^n$ je vektorová funkce

$$(\text{grad } f)(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(\mathbf{a})$$

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f$$

$$\text{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) = \nabla \quad (\text{nabla})$$

Derivace ve směru

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_i(a_i + t) - \varphi_i(a_i)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{t}$$

Definice. Derivace funkce f ve směru $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ v bodě \mathbf{a} :

$$f'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})}{t}.$$

Příklad. $f(x, y) = e^x + x^2 y$, $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{h} = (-1, 3)$;
 $f'_{(-1,3)}(1, 2) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} (e^{1-t} - e) - 1 - 4t + 3t^2 \right) = -e - 1$

Poznámky.

- Parciální derivace je směrová: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{\mathbf{e}_i}$.
- $f'_{c\mathbf{h}}(\mathbf{a}) = c \cdot f'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a})$, $f'_{\mathbf{0}}(\mathbf{a}) = 0$.
- Někdy se uvažují jen jednotkové vektory \mathbf{h} : $\|\mathbf{h}\| = 1$.

Věta. Pro derivace ve směru \mathbf{h} platí věta o derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu jako v \mathbb{R} .

Důkaz. Přepisem do jedné proměnné: $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$,
 $f'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0)$.

Věta. Necht \mathbf{a} je vnitřní bod $D(f)$, parciální derivace f existují v některém okolí \mathbf{a} a jsou v \mathbf{a} spojitě (tj. grad f je spojitý v \mathbf{a}). Pak

$$f'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}.$$

Příklad. $f(x, y) = e^x + x^2 y$, $\text{grad } f(1, 2) = (e + 4, 1)$;
 $f'_{(-1,3)}(1, 2) = (e + 4, 1) \cdot (-1, 3) = -e - 1$

Příklad. Předpoklad spojitosti gradientu nelze vypustit (směrové derivace pak dokonce nemusí existovat).

$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ pro $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$;
 $\text{grad } f(0, 0) = (0, 0)$ ($f(x, 0) = f(0, y) = 0$),
 $f'_{(1,1)}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t}$ neexistuje,
 $\text{grad } f(x, y) = \left(\frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right)$ pro $(x, y) \neq (0, 0)$ není spojitý v $(0, 0)$

(Totální) diferenciál

Přepis definice derivace funkce jedné proměnné:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0,$$

kde $f'(a)h$ je lineární funkce proměnné h .

Definice. Necht \mathbf{a} je vnitřní bod $D(f)$. (Totální) diferenciál f v \mathbf{a} je lineární zobrazení $df(\mathbf{a}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, pro které

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - df(\mathbf{a})(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Věta. Funkce je spojitá v bodě, ve kterém má diferenciál.

Příklad. Existence směrových derivací nezaručuje spojitost: $f(x, y) = 1$ na $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, x \neq 0\}$, jinak 0; $f'_{\mathbf{h}}(0, 0) = 0$ pro každé \mathbf{h} , f není spojitá v $(0, 0)$, nemá v $(0, 0)$ diferenciál.

Poznámky.

1) Ve vnitřním bodě definičního oboru platí: parciální derivace jsou spojité \Rightarrow existuje diferenciál \Rightarrow existují směrové derivace \Rightarrow existují parciální derivace. Žádnou implikaci nelze obrátit.

2) Ve větě o výpočtu směrové derivace pomocí gradientu stačí existence diferenciálu.

3) Maticí diferenciálu je gradient (první součin je maticový, druhý skalární vektorů):

$$df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}^T = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = f'_h(\mathbf{a}).$$

Diferenciál přiřadí vektoru derivaci v jeho směru.

4) Pro vektorovou funkci \mathbf{f} použijeme normu i v čitateli, matice diferenciálu je Jacobiho matice \mathbf{f} :

$$d\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h})^T = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}^T.$$

Věty o derivacích

Věta (Lagrange). Necht' $I \subset D(f)$ je úsečka s krajními body \mathbf{a} a \mathbf{b} , f je spojitá na I a má v každém bodě $I \setminus \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ derivaci ve směru $\mathbf{b} - \mathbf{a}$. Pak existuje $\mathbf{c} \in I \setminus \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ tak, že

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = f'_{\mathbf{b}-\mathbf{a}}(\mathbf{c}).$$

Důkaz. Označme $f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})) = \varphi(t)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$:

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \varphi(1) - \varphi(0) = [\text{Lagrange } n = 1: \text{ existuje } u \in \langle 0, 1 \rangle] = \varphi'(u)(1 - 0) = f'_{\mathbf{b}-\mathbf{a}}(\mathbf{a} + u(\mathbf{b} - \mathbf{a})).$$

Poznámka. Pokud v \mathbf{c} existuje diferenciál (například gradient je spojitý), pak $f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

Věta. Funkce s nulovým gradientem v oblasti je v této oblasti konstantní.

Důkaz. Pro každou úsečku v oblasti s krajními body \mathbf{a}, \mathbf{b} existuje na ní \mathbf{c} tak, že $f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{0} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0$. Každé dva body oblasti lze spojit lomenou čarou v ní ležící.

Příklad.

$$f(x, y) = \text{arctg } x + \text{arctg } y$$

$$g(x, y) = \text{arctg } \frac{x+y}{1-xy}, \quad xy \neq 1$$

$$\text{grad } f(x, y) = \left(\frac{1}{x^2+1}, \frac{1}{y^2+1} \right) = \text{grad } g(x, y)$$

$$f(0, 0) = 0 = g(0, 0),$$

$$f(x, y) = g(x, y) \text{ pro } xy < 1$$

Směr největšího spádu

pro $\|\mathbf{h}\| = 1$, f diferencovatelnou, $\text{grad } f(\mathbf{a}) \neq 0$ je $f'_h(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = \|\text{grad } f(\mathbf{a})\| \cdot \cos \angle(\text{grad } f(\mathbf{a}), \mathbf{h})$, maximum a minimum se nabývá pro $\angle(\text{grad } f(\mathbf{a}), \mathbf{h}) \in \{0, \pi\}$, tj. $\mathbf{h}_{\max} = \frac{\text{grad } f(\mathbf{a})}{\|\text{grad } f(\mathbf{a})\|}$, $\mathbf{h}_{\min} = -\mathbf{h}_{\max}$. Gradient je kolmý k hladině grafu $f^{-1}(f(\mathbf{a}))$.

Lineární aproximace

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Příklad. Odhadněte $2,01^{3,02}$ ($8,234\dots$).

$$f(x, y) = x^y, \quad \mathbf{a} = (2, 3) \quad \text{grad } f(x, y) = (yx^{y-1}, x^y \ln x), \\ \text{grad } f(2, 3) = (12, 8 \ln 2), \quad 2,01^{3,02} \approx f(2, 3) + (12, 8 \ln 2) \cdot (0,01; 0,02) = 8 + 0,12 + 0,16 \ln 2 \doteq 8,231.$$

Tečná nadrovina a normála grafu

tečná nadrovina (lineární aproximace) v $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$:

$$y = f(\mathbf{a}) + \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

$$(\text{grad } f(\mathbf{a}), -1) \cdot (\mathbf{x}, y) = (\text{grad } f(\mathbf{a}), -1) \cdot (\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$$

$(\text{grad } f(\mathbf{a}), -1)$ je normálový vektor

Alternativně: graf $f(\mathbf{x})$ je nulová hladina $F(\mathbf{x}, y) = f(\mathbf{x}) - y$,

normála je $\text{grad } F = (\text{grad } f, -1)$

Příklad. Tečná rovina grafu $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + 2y^2}$ bodem $(1, 1, 2)$:

$$\text{grad } f(x, y) = \left(\frac{2x}{\sqrt{2x^2+2y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{2x^2+2y^2}} \right), \quad \text{grad } f(1, 1) = (1, 1),$$

normálový vektor $(1, 1, -1)$,

tečná rovina $x + y - z = 1 + 1 - 2 = 0$.

Derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x})$$

$$\text{pro } x_j = x_i: \quad = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x})$$

$$\text{řádu } k \in \mathbb{N}: \quad \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\mathbf{x})$$

smíšená: alespoň 2 proměnné různé

Definice. Funkce f je třídy C^k na otevřené množině G ($f \in C^k(G)$), pokud všechny parciální derivace f řádu k jsou na G spojité.

Poznámky.

1) $C^0 = C \dots$ spojitě funkce (ne nutně na otevřené mn.).

2) $C^0 \supset C^1 \supset C^2 \supset \dots \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k = C^{\infty}$.

3) C^1 : mají diferenciál, směrové derivace přes gradient.

Věta. Je-li f třídy C^1 v okolí \mathbf{a} , $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existuje v okolí \mathbf{a} a je spojitá v \mathbf{a} , pak

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Důsledek. Parciální derivace funkce třídy C^k do řádu k nezávisí na pořadí derivování.

Příklad. $f(x, y) = e^{xy^2} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 e^{xy^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2y e^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$$

Příklad. Pořadí derivování nelze vždy zaměnit.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - x y^4}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = 1$$

Poznámka. Diferenciály řádu k pro $f \in C^k$:

$$df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} = (\mathbf{h} \cdot \text{grad})f(\mathbf{a})$$

$$d^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = (\mathbf{h} \cdot \text{grad})^2 f(\mathbf{a}) = (h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n})^2 f(\mathbf{a})$$

$$= \sum_{i, j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{a}) = \sum_{i, j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) h_i h_j$$

$$d^k f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = (\mathbf{h} \cdot \text{grad})^k f(\mathbf{a})$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\mathbf{a}) h_{i_1} \dots h_{i_k}$$

Poznámka. Taylorův polynom:

$$\sum_{k=0}^n \frac{((\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \text{grad})^k f(\mathbf{a})}{k!}$$

Derivace složené funkce

$$n = 1: \mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}, (g \circ h)'(a) = g'(h(a)) \cdot h'(a)$$

Věta. Necht' $H \subset \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^k$ jsou otevřené množiny, $\mathbf{h}: H \rightarrow G$ má diferenciál v bodě $\mathbf{a} \in G$, $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ má diferenciál v bodě $\mathbf{b} = \mathbf{h}(\mathbf{a})$. Pak funkce $f = g \circ \mathbf{h}$ má v bodě \mathbf{a} diferenciál a platí

$$df(\mathbf{a}) = dg(\mathbf{b}) \circ d\mathbf{h}(\mathbf{a}), \quad \text{tj.}$$

$$\text{grad } f(\mathbf{a}) = \text{grad } g(\mathbf{b}) \cdot J_{\mathbf{h}}(\mathbf{a}).$$

Rozpis pro i -tý sloupec dá tzv. řetězové pravidlo (označme $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_k)$):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(\mathbf{b}), \dots, \frac{\partial g}{\partial y_k}(\mathbf{b}) \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial h_k}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial y_1}(\mathbf{b}) \frac{\partial h_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_k}(\mathbf{b}) \frac{\partial h_k}{\partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Někdy vypouštíme argumenty, nerozlišujeme h_j od y_j :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i}.$$

Poznámky.

- 1) Pro $n = k = 1$: $f'(a) = g'(b) \cdot h'(a)$.
- 2) Pro $\mathbf{f} = \mathbf{g} \circ \mathbf{h}$: $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) = J_{\mathbf{g}}(\mathbf{b}) \cdot J_{\mathbf{h}}(\mathbf{a})$.

Příklad. Určete parciální derivace $f(x, y) = g(e^{xy}, e^{-xy})$, kde $g \in C^1$: $(e^{xy}, e^{-xy}) = (u, v)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot y e^{xy} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot (-y e^{-xy}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot x e^{xy} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot (-x e^{-xy}).$$

Příklad. Pro $f(x, y, z) = x g(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$, kde $g \in C^1$, je $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = f$.

Transformace diferenciálních výrazů

$\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{y})$, $g(\mathbf{y}) = f(\mathbf{h}(\mathbf{y}))$: $\mathbf{x}, \frac{\partial f}{\partial x_i}, \dots \rightarrow \mathbf{y}, \frac{\partial g}{\partial y_i}, \dots$
 $J_{\mathbf{h}}$ spojitá, $\det J_{\mathbf{h}}$ (jakobián \mathbf{h}) nenulový

$$\text{grad } g = \text{grad } f \cdot J_{\mathbf{h}}$$

$$\text{grad } g \cdot J_{\mathbf{h}}^{-1} = \text{grad } f$$

Poznámka. $J_{\mathbf{h}^{-1}} = J_{\mathbf{h}}^{-1}$ (zob. derivace inverzní funkce).

Příklad. $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 2u \frac{\partial g}{\partial u} - v \frac{\partial g}{\partial v}$ pro $x = uv$, $y = v$:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ spojitá na } \mathbb{R}^2,$$

$\det J = v$ nenulový pro $v \neq 0$.

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ spočteme vyřešením soustavy

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot v + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 0 \\ \frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{u}{v} \cdot \frac{\partial g}{\partial u} \end{aligned}$$

nebo přes inverzní Jacobiho matici

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = J^{-1} = \frac{1}{v} \begin{pmatrix} 1 & -u \\ 0 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{1}{v} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \left(-\frac{u}{v}\right) + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot 1$$

Lokální extrémů funkcí více proměnných

Definice. Funkce f má v \mathbf{a} :

- lokální minimum: $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$ na některém prst. okolí;
- lokální maximum: $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ na některém prst. okolí;
- lokální extrém: lokální minimum nebo lokální maximum;
- ostrý lokální extrém: ostrá nerovnost.

Poznámka. Funkce f má v \mathbf{a} (ostré) lokální minimum právě tehdy, když funkce $-f$ má v \mathbf{a} (ostré) lokální maximum.

Věta. Má-li f v \mathbf{a} lokální extrém, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, pak $f'_{\mathbf{h}}(\mathbf{a})$ je nulová nebo neexistuje.

Důkaz. Označme $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$; f má v \mathbf{a} lokální extrém ... φ má v 0 lokální extrém ... $\varphi'(0)$ je nulová nebo neexistuje ... $f'_h(\mathbf{a}) = \varphi'(0)$ je nulová nebo neexistuje.

Definice. Bod \mathbf{a} je *stacionární bod* funkce f , pokud všechny parciální derivace f jsou v \mathbf{a} nulové.

Poznámka. Funkce třídy C^1 má lokální extrémy ve stacionárních bodech.

Příklady.

1) $f(x, y) = x^2 + y^2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$: $\text{grad } f(x, y) = (2x, 2y)$; stacionární body: $(0, 0)$; ostré lokální minimum $f(0, 0) = 0$.

2) $f(x, y) = x^3 + y^2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$: $\text{grad } f(x, y) = (3x^2, 2y)$; stacionární body: $(0, 0)$; nemá lokální extrémy (např. na přímce $y = 0$).

3) $f(x, y) = x^2y^2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$: $\text{grad } f(x, y) = (2xy^2, 2x^2y)$; stacionární body: $x = 0$ nebo $y = 0$; (neostré) lokální minimum 0 ve stacionárních bodech.

4) $f(x, y) = xy \in C^1(\mathbb{R}^2)$: $\text{grad } f(x, y) = (y, x)$; stacionární body: $(0, 0)$; nemá lokální extrémy: na přímce $y = x$ je $f(x, y) = x^2$, na přímce $y = -x$ je $f(x, y) = -x^2$.

$$d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \mathbf{h} \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) \right) \cdot \mathbf{h}^T \quad (\text{Hessova matice})$$

$n = 1$: znaménko $d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = f''(\mathbf{a})h^2$ určuje lok. extrém.

Definice. Řekneme, že $d^2f(\mathbf{a})$ (i jeho matice) je *pozitivně definitní*, je-li $d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) > 0$ pro každý $\mathbf{h} \neq 0$; *negativně definitní*, je-li $d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{h}) < 0$ pro každý $\mathbf{h} \neq 0$; *indefinitní*, pokud nabývá kladných i záporných hodnot.

Poznámka. Nemusí mít žádnou z těchto vlastností. Je *semidefinitní*, pokud připustíme nulové hodnoty.

Věta. Necht' f je třídy C^2 na okolí stacionárního bodu \mathbf{a} .

1) Je-li $d^2f(\mathbf{a})$ pozitivně (negativně) definitní, pak f má v \mathbf{a} ostré lokální minimum (maximum).

2) Je-li $d^2f(\mathbf{a})$ indefinitní, pak f nemá v \mathbf{a} lokální extrém.

Poznámka. Věta neurčí, pokud lokální extrém není ostrý.

Příklady.

1) $f(x, y) = x^2 + y^2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$: Hessova matice: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $d^2f(0, 0)(\mathbf{h}) = 2h_1^2 + 2h_2^2$ je pozitivně definitní, $f(0, 0) = 0$ je ostré lokální minimum.

2) $f(x, y) = x^3 + y^2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$: Hessova m.: $\begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, v $(0, 0)$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $d^2f(0, 0)(\mathbf{h}) = 2h_2^2$, věta neurčí (není).

3) $f(x, y) = x^2y^2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$: Hessova m.: $\begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}$, v $(0, 1)$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $d^2f(0, 1)(\mathbf{h}) = 2h_1^2$, věta neurčí (je).

4) $f(x, y) = xy \in C^2(\mathbb{R}^2)$: Hessova matice: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $d^2f(0, 0)(\mathbf{h}) = 2h_1h_2$ je indefinitní (např. $(1, 1) \mapsto 1$, $(1, -1) \mapsto -1$), v $(0, 0)$ není lokální extrém.

Definitnost 2. diferenciálu odpovídá definitnosti jeho Hessovy matice. Označme D_k determinant z prvních k řádků a sloupců čtvercové matice (tzv. *hlavní subdeterminant*).

Věta (Sylvesterovo kritérium).

1) Matice je pozitivně definitní právě když všechny její hlavní subdeterminanty jsou kladné.

2) Matice je negativně definitní právě tehdy, když její hlavní subdeterminanty střídají znaménka počínaje záporným: $(-1)^k D_k > 0$.

3) Je-li determinant matice nenulový a nenastala-li ani jedna z předešlých možností, pak matice je indefinitní.

Poznámka. Lineární transformací proměnných (nemění se lokální extrémy) lze dostat diagonální Hessovu matici, která má na diagonále pouze čísla ± 1 (pozitivně/negativně definitní ve směru příslušné proměnné) a 0. Podle výskytu prvků na diagonále dostaneme 4 (vyklučující se) možnosti: 0) je tam 0 ($D_n = 0$) - kritérium nerozhodne; 1) samé 1 ($D_k = 1$) - pozitivně def.; 2) samé -1 ($D_k = (-1)^k$) - negativně def.; 3) není 0, jsou 1 i -1 - indefinitní.

Příklad. Najděte lokální extrémy $f(x, y) = 2y^3 + 3x^2 - 6xy$. $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, lokální extrémy jsou ve stacionárních bodech; $\text{grad } f(x, y) = (6x - 6y, 6y^2 - 6x)$; stacionární body: $(0, 0)$, $(1, 1)$; Hessova matice: $\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12y \end{pmatrix}$;

$d^2f(0, 0)(h_1, h_2) = 6h_1^2 - 12h_1h_2 = 6(h_1 - h_2)^2 - 6h_2^2$ je indefinitní;

$d^2f(1, 1)(h_1, h_2) = 6h_1^2 - 12h_1h_2 + 12h_2^2 = 6(h_1 - h_2)^2 + 6h_2^2$ je pozitivně definitní.

Alternativně pomocí Sylvesterova kritéria:

$$(0, 0): \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = 6 > 0, \quad D_2 = -36 < 0, \quad \text{indefinitní}$$

$$(1, 1): \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}, \quad D_1 = 6 > 0, \quad D_2 = 36 > 0, \quad \text{pozitivně def.}$$

Funkce f má ostré lokální minimum $f(1, 1) = -1$.

Příklad. Určete lokální extrémy $f(x, y, z) = 2y - 2z - y^2 - \frac{1}{2}z^2 + 3xz - x^3$.

$f \in C^2(\mathbb{R}^3)$; $\text{grad } f(x, y, z) = (3z - 3x^2, 2 - 2y, -2 - z + 3x)$; stacionární body $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 4)$; Hessova matice:

$$\begin{pmatrix} -6x & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ve stacionárních bodech

$$(1, 1, 1): \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = -6 < 0, \quad D_2 = 12 > 0, \quad D_3 = 6 > 0, \quad \text{indef.}$$

$$(2, 1, 4): \begin{pmatrix} -12 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = -12 < 0, \quad D_2 = 24 > 0, \quad D_3 = -6 < 0, \quad \text{neg. def.}$$

ostré lokální maximum $f(2, 1, 4) = 1$

Vázané extrémý

$f(\mathbf{x})$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $A: g_1(\mathbf{x}) = 0, \dots$ (vazby)

I. Snížení počtu proměnných

Vyjádření některých proměnných jako funkce jiných (řešení vazeb) nebo (obecněji) vyjádření některých proměnných jako funkce nových (parametrizace).

Příklad. Určete vázané extrémý $f(x, y) = y - x^2$ na $A: 2x - y = 0$.
 $y = 2x; g(x) = f(x, 2x) = 2x - x^2, g'(1) = 1$ ostré lok. max.,
 $f(1, 2) = 1$ ostré lokální maximum vzhledem k A .

Příklad. Určete vázané extrémý $f(x, y) = x + y + 1$ na $A: x^2 + 2x + y^2 = 0$.

$A: (x + 1)^2 + y^2 = 1$, kružnice: střed $(-1, 0)$, poloměr 1;
 $A: x = -1 + \cos t, y = \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$;
 $g(t) = f(-1 + \cos t, \sin t) = \cos t + \sin t, g'(t) = -\sin t + \cos t$,
 $g(\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}$ ostré lok. max., $g(\frac{5}{4}\pi) = -\sqrt{2}$ ostré lok. min.,
 $f(-1 + \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = \sqrt{2}$ ostré lok. max. vzhledem k A ,
 $f(-1 - \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}$ ostré lok. min. vzhledem k A .

II. Lagrangeova metoda multiplikátorů

Předpoklady: $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $f \in C^1(G)$,
 $A: g_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_p(\mathbf{x}) = 0, p < n, g_1, \dots, g_p \in C^1(G)$,
 $\text{grad } g_1(\mathbf{x}), \dots, \text{grad } g_p(\mathbf{x})$ jsou lineárně nezávislé na A :

$$\text{hod} \begin{pmatrix} \text{grad } g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \text{grad } g_p(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = p$$

($\text{grad } g_i(\mathbf{x})$ je normálový vektor nadplochy dané rovnicí $g_i(\mathbf{x}) = 0$ v \mathbf{x} , tj. tyto nadplochy se protínají v útvaru dimenze $n - p$).

Princip: f „neroste“ po A , tj. $\text{grad } f$ je kolmý k A , tj. $\text{grad } f$ je lineární kombinací normál nadploch, tj. pro „stacionární“ bod \mathbf{a} platí

$$\text{grad } f(\mathbf{a}) = \lambda_1 \text{grad } g_1(\mathbf{a}) + \dots + \lambda_p \text{grad } g_p(\mathbf{a}).$$

Postup: $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) - \dots - \lambda_p g_p(\mathbf{x})$

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = 0 & g_1(\mathbf{x}) = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = 0 & g_p(\mathbf{x}) = 0 \end{array}$$

$n + p$ rovnic pro $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_p$ dá stacionární body, vyšetřujeme d^2F .

Poznámka. Definitnost d^2F stačí vyšetřovat na tečném prostoru, tj. pro vektory \mathbf{h} splňující

$$\begin{array}{l} \mathbf{h} \cdot \text{grad } g_1(\mathbf{a}) = 0, \\ \vdots \\ \mathbf{h} \cdot \text{grad } g_p(\mathbf{a}) = 0, \end{array} \quad \begin{pmatrix} \text{grad } g_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \text{grad } g_p(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(rovnice jsou podle podmínky lineárně nezávislé).

Příklad. Najděte vázané extrémý $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2$ na $A: x^4 + y^4 = 1, x, y > 0$.

$g(x, y) = x^4 + y^4 - 1$, matice gradientů vazeb:
 $\text{hod}(\text{grad } g(x, y)) = \text{hod}(4x^3, 4y^3) = 1$ pro $(x, y) \neq (0, 0)$,
 tj. na A ,
 $F(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - \lambda(x^4 + y^4 - 1) \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial F}{\partial x}: & 4x - 4\lambda x^3 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}: & 4y - 4\lambda y^3 = 0 \\ & x^4 + y^4 - 1 = 0 \end{array}$$

řešení $\lambda = \sqrt{2}, x = y = 1/\sqrt[4]{2}$,
 Hessova matice $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\begin{pmatrix} 4 - 12\lambda x^2 & 0 \\ 0 & 4 - 12\lambda y^2 \end{pmatrix}$$

v nalezeném bodě pro spočtené λ

$$\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} D_1 = -8 < 0, \\ D_2 = 64 > 0, \end{array} \quad \text{negativně definitní}$$

vázané lokální maximum $f(1/\sqrt[4]{2}, 1/\sqrt[4]{2}) = 2\sqrt{2}$.

Příklad. $f(x, y, z) = xyz, A: x + y - 1 = 0, y + z = 0$.

$$\text{hod} \begin{pmatrix} \text{grad } g_1(x, y, z) \\ \text{grad } g_2(x, y, z) \end{pmatrix} = \text{hod} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{na } A$$

$F(x, y, z) = xyz - \lambda(x + y - 1) - \mu(y + z) \in C^1(\mathbb{R}^3)$

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial F}{\partial x}: & yz - \lambda = 0 & x + y - 1 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}: & xz - \lambda - \mu = 0 & y + z = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}: & xy - \mu = 0 & \end{array}$$

$(x_1, y_1, z_1) = (1, 0, 0), \lambda_1 = \mu_1 = 0$
 $(x_2, y_2, z_2) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}), \lambda_2 = -\frac{4}{9}, \mu_2 = \frac{2}{9}$
 Hessova matice $F \in C^2(\mathbb{R}^3)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

$d^2F(x, y, z)(\mathbf{h}) = 2zh_1h_2 + 2yh_1h_3 + 2xh_2h_3$

1) $d^2F(1, 0, 0)(\mathbf{h}) = 2h_2h_3$ je indefinitní

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{h} = 0 \quad \rightarrow \quad h_2 = -h_1, \quad h_3 = h_1$$

$d^2F(1, 0, 0)(h_1, -h_1, h_1) = -2h_1^2$ je negativně definitní v h_1
 $f(1, 0, 0) = 0$ je vázané ostré lokální maximum

2) $d^2F(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})(\mathbf{h}) = -\frac{4}{3}h_1h_2 + \frac{4}{3}h_1h_3 + \frac{2}{3}h_2h_3$
 $d^2F(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})(h_1, -h_1, h_1) = 2h_1^2$ je pozitivně definitní v h_1
 $f(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = -\frac{4}{27}$ je vázané ostré lokální minimum

Maximum a minimum funkce

Věta. Spojitá funkce na omezené uzavřené množině nabývá svého maxima i minima.

Postup:

- 1) Lokální extrémy uvnitř.
- 2) Vázané extrémy na hranici (někdy opět takto).

Příklad. Najděte maximum a minimum $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy - 2x$ na A : trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(4, 0)$.

A uzavřená, $f \in C(A)$... existují,
 $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$... ve stacionárních nebo hraničních bodech.

- 1) Stacionární body uvnitř A :

$$\frac{\partial f}{\partial x}: 2x + 2y - 2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}: 2x + 2y = 0 \quad \text{nemá řešení}$$

- 2) (Vázané) stacionární body uvnitř stran:

a) $y = 0, x \in (0, 4)$: $f_1(x) = f(x, 0) = x^2 - 2x, f_1'(x) = 2x - 2$, stac. bod $1 \in (0, 4), f(1, 0) = -1$.

b) $x = 0, y \in (0, 2)$: $f_2(y) = f(0, y) = y^2, f_2'(y) = 2y$, stac. bod $0 \notin (0, 2)$.

c) $y = 2 - \frac{1}{2}x, x \in (0, 4)$: $f_3(x) = f(x, 2 - \frac{1}{2}x) = \frac{1}{4}x^2 + 4, f_3'(x) = \frac{1}{2}x$, stac. bod $0 \notin (0, 4)$.

3) Hodnoty ve vrcholech: $f(0, 0) = 0, f(0, 2) = 4, f(4, 0) = 8$.

$$\min_A f = f(1, 0) = -1, \max_A f = f(4, 0) = 8.$$

Vícenásobné integrály

$A = \langle a_1, b_1 \rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle$ n -rozměrný interval (interval, obdélník, kvádr, ...),

$\lambda(A) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$ jeho míra (délka, obsah, objem, ...),

$D_i = \{ \langle x_{i,0}, x_{i,1} \rangle, \dots, \langle x_{i,k_i-1}, x_{i,k_i} \rangle \}$ dělení $\langle a_i, b_i \rangle$,

$D = \{ I_1 \times \dots \times I_n : I_1 \in D_1, \dots, I_n \in D_n \}$ dělení A ,

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$,

$\underline{S}(f, D) = \sum_{R \in D} \inf f(R) \cdot \lambda(R)$ dolní integrální součet,

$\bar{S}(f, D) = \sum_{R \in D} \sup f(R) \cdot \lambda(R)$ horní integrální součet

Definice. Pokud $\sup\{\underline{S}(f, D)\} = \inf\{\bar{S}(f, D)\}$, nazýváme tuto hodnotu *integrálem* f na A .

Značení: $\int_A f, \int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. Pro malá n píšeme n symbolů \int , rozepisujeme diferenciál:

$$n = 2: \iint_A f(x, y) dx dy \quad \text{dvojný integrál}$$

$$n = 3: \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz \quad \text{trojný integrál}$$

Věta. Je-li f spojitá na n -rozměrném intervalu A , pak $\int_A f$ existuje.

Věta (Fubini). Je-li f spojitá na $A = \langle a_1, b_1 \rangle \times \dots \times \langle a_n, b_n \rangle$ a $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$, pak

$$\int_A f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \left(\dots \int_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} f(\mathbf{x}) dx_{i_n} \dots \right) dx_{i_1}.$$

Příklad. $A = \langle 0, 3 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle, \int_A y dx dy$:

$$\int_0^3 \int_0^2 y dy dx = \int_0^3 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^2 dx = \int_0^3 2 dx = \left[2x \right]_0^3 = 6$$

$$\int_0^2 \int_0^3 y dx dy = \int_0^2 \left[yx \right]_0^3 dy = \int_0^2 3y dy = \left[\frac{3y^2}{2} \right]_0^2 = 6$$

Poznámka.

$$\int_a^b \int_c^d f(x)g(y) dy dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_c^d g(y) dy, \dots$$

Pro obecnější množiny:

$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, A_i$ n -rozměrné int., prázdné průniky vnitřků,

$\int_A f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \int_{A_i} f$ pro $f \geq 0$,

$f = f_+ - f_-$ ($f_+ = \max(f, 0) \geq 0, f_- = \max(-f, 0) \geq 0$),

$\int_A f = \int_A f_+ - \int_A f_-$, pokud je výraz vpravo definován.

Poznámka. Ne vždy lze pokrýt hranici (vnitřek vždy), ta obvykle nehraje roli (např. pro grafy spojitých funkcí).

Věta. Integrál je lineární, monotonní, aditivní na definičním oboru, absolutně konvergentní, $|\int_A f| \leq \int_A |f|$.

Poznámka. $\int_A 1$ je míra A (délka, obsah, objem, ...)

Poznámka. Fubiniho větu můžeme použít pro obecnější množiny. Například v \mathbb{R}^2 :

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a, b), y \in (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) \}:$$

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in (c, d), x \in (\psi_1(y), \psi_2(y)) \}:$$

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Příklad. Pro $A = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ je

$$\begin{aligned} \iint_A e^{-x-y} dx dy &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot e^{-y} dy dx \\ &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} dx \right)^2 = \left(\left[-e^{-x} \right]_0^{+\infty} \right)^2 = 1. \end{aligned}$$

Příklad. Obsah $A = \{ (x, y) : 0 \leq y \leq \min(x+1, 1-x/2) \}$:

$$\begin{aligned} \iint_A dx dy &= \int_0^1 \int_{y-1}^{2-2y} dx dy = \int_0^1 \left[x \right]_{x=y-1}^{2-2y} dy \\ &= \int_0^1 (3-3y) dy = \left[3y - \frac{3}{2}y^2 \right]_0^1 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Substituce

$n = 1$:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Věta (o substituci). Necht' $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je prostá a třídy C^1 na G . Pak

$$\int_{\Phi(G)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_G f(\Phi(\mathbf{t})) \underbrace{|\det J_{\Phi}(\mathbf{t})|}_{\text{jakobián}} d\mathbf{t}.$$

Definice. *Polární souřadnice* (v \mathbb{R}^2), vhodné pro středově symetrické útvary (kruhy, mezikruží, výseče, ...), lze posunout do (x_0, y_0) :

$$\Phi: \begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi, & \varrho &\in (0, +\infty), \\ y &= \varrho \sin \varphi, & \varphi &\in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det J_{\Phi}(\varrho, \varphi) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varrho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi \end{vmatrix} \\ &= \varrho \cos^2 \varphi + \varrho \sin^2 \varphi = \varrho. \end{aligned}$$

Příklad. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq (x-1)^2 + y^2 \leq 4, x \geq 1\}$

$$\begin{aligned} \iint_A y \, dx \, dy &= \left| \begin{array}{l} x = \varrho \cos \varphi + 1 \\ y = \varrho \sin \varphi \\ |\det J| = \varrho \end{array} \right| \\ &= \int_1^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varrho \sin \varphi \cdot \varrho \, d\varphi \, d\varrho \\ &= \int_1^2 \varrho^2 \, d\varrho \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \varphi \, d\varphi \\ &= \left[\frac{1}{3} \varrho^3 \right]_1^2 \cdot \left[\cos \varphi \right]_{\pi/2}^{\pi/2} = \frac{7}{3} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Poznámka. $\iint_A y \, dx \, dy$ je moment plochy A vzhledem k ose x , v předešlém příkladu vyšel nulový, protože plocha je symetrická vzhledem k ose x (druhá souřadnice těžiště je nulová).

Definice. *Cylindrické souřadnice* (v \mathbb{R}^3), vhodné pro osově symetrické útvary (vále, kužely, ...):

$$\Phi: \begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi, & \varrho &\in (0, +\infty), \\ y &= \varrho \sin \varphi, & \varphi &\in (0, 2\pi), \\ z &= z, & z &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\det J_{\Phi} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \varrho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \varrho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \varrho.$$

Definice. *Sférické souřadnice* (v \mathbb{R}^3), vhodné pro středově symetrické útvary (koule, ...):

$$\Phi: \begin{aligned} x &= \varrho \sin \psi \cos \varphi, & \varrho &\in (0, +\infty), \\ y &= \varrho \sin \psi \sin \varphi, & \varphi &\in (0, 2\pi), \\ z &= \varrho \cos \psi, & \psi &\in (0, \pi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det J_{\Phi}(\varrho, \varphi, \psi) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \psi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varrho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial \varrho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \psi & -\varrho \sin \varphi \sin \psi & \varrho \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \sin \psi & \varrho \cos \varphi \sin \psi & \varrho \sin \varphi \cos \psi \\ \cos \psi & 0 & -\varrho \sin \psi \end{vmatrix} = \varrho^2 \sin \psi. \end{aligned}$$

Definice. Množina $C \in \mathbb{R}^n$ se nazývá *oblouk*, pokud existuje prosté $\varphi: \langle a, b \rangle \xrightarrow{\text{na}} C$ třídy C^1 s nenulovou derivací na (a, b) ; φ se nazývá *parametrizace* C .

Poznámky.

- 1) $\varphi'(t) = (\varphi'_1(t), \dots, \varphi'_n(t))$ je tečný vektor C v $\varphi(t)$.
- 2) Je-li $h: \langle c, d \rangle \xrightarrow{\text{na}} \langle a, b \rangle$ třídy C^1 s $h' \neq 0$ na (c, d) , pak $\psi = \varphi \circ h$ je také parametrizace C . Každá parametrizace C se dá zapsat v tomto tvaru.

Příklady.

- 1) Úsečka v \mathbb{R}^n s krajními body $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), & t &\in \langle 0, 1 \rangle, \\ \varphi'(t) &= \mathbf{b} - \mathbf{a}. \end{aligned}$$

- 2) Oblouk kružnice v \mathbb{R}^2 , střed (x_0, y_0) , poloměr r :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r \cos t, \\ y &= y_0 + r \sin t, & t &\in \langle t_1, t_2 \rangle \quad (t_2 - t_1 < 2\pi), \\ \varphi(t) &= (x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t), \\ \varphi'(t) &= (-r \sin t, r \cos t). \end{aligned}$$

Definice. *Křivka* C v \mathbb{R}^n je konečné sjednocení na sebe navazujících oblouků C_1, \dots, C_k . *Parametrizace* C je vektorová funkce $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$, pro kterou existují body $t_0 = a < t_1 < \dots < t_k = b$ takové, že $\varphi|_{\langle t_{i-1}, t_i \rangle}$ je parametrizace C_i pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$.

krajní body: $\varphi(a), \varphi(b)$

uzavřená: $\varphi(a) = \varphi(b)$

jednoduchá: φ je prostá na (a, b)

orientovaná: stanoven průběh (odpovídá parametrizaci)

Poznámka. Jednoduchá křivka má dvě orientace.

Definice. Uzavřená jednoduchá orientovaná křivka v \mathbb{R}^2 je *kladně orientovaná*, pokud probíhá proti směru hodinových ručiček (vnitřek je po levé straně).

Věta. Je-li f spojitá funkce na křivce C s parametrizací $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$, pak

$$\int_C f(\mathbf{x}) \, ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\| \, dt.$$

Poznámky.

- 1) Nezávisí na param., orientaci (*neorientovaný* integrál).
- 2) Využití: délka křivky ($f(\mathbf{x}) = 1$), hmotnost, momenty, ... jednorozměrných útvarů, intenzita el. pole – pro vektorové pole: $\int_C (F_1, \dots, F_n) = (\int_C F_1, \dots, \int_C F_n)$.

Příklad. Délka závitu spirály v \mathbb{R}^3 s osou z , poloměrem r , výškou závitu v :

$$\begin{aligned} \varphi: \quad x &= r \cos t, \\ y &= r \sin t, \\ z &= \frac{v}{2\pi} t, & t &\in \langle 0, 2\pi \rangle, \end{aligned}$$

$$\|\varphi'(t)\| = \|(-r \sin t, r \cos t, \frac{v}{2\pi})\| = \sqrt{r^2 + \frac{v^2}{4\pi^2}},$$

$$\int_C 1 \, ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \frac{v^2}{4\pi^2}} \, dt = \sqrt{4\pi^2 r^2 + v^2}.$$

Věta. Je-li \mathbf{F} je spojité vektorové pole na orientované křivce (C) s parametrizací $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$, pak

$$\int_{(C)} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt.$$

Poznámky.

- 1) Používá se i značení (např. v \mathbb{R}^3): $\int_{(C)} (F_1, F_2, F_3) \cdot (dx, dy, dz) = \int_{(C)} F_1 \, dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz$.
- 2) Nezávisí na parametrizaci, pro opačně orientovanou křivku opačný výsledek (*orientovaný* integrál).
- 3) Je-li \mathbf{F} na (C) nezáporný násobek tečného vektoru: $\int_{(C)} \mathbf{F} \, d\mathbf{s} = \int_a^b (\mathbf{F} \circ \varphi) \cdot \varphi' \, dt = \int_a^b \|\mathbf{F} \circ \varphi\| \cdot \|\varphi'\| \, dt = \int_C \|\mathbf{F}\| \, ds$.
- 4) Využití: práce, potenciál, intenzita mag. pole, ...

Příklad. Spočítejte $\int_{(C)} (-y, x-1) \, d\mathbf{s}$, kde (C) je kladně orientovaná hranice $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 4, y > -x\}$.

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= (t, -t), & \varphi_2(t) &= (2 \cos t, 2 \sin t), \\ \varphi_1'(t) &= (1, -1), & \varphi_2'(t) &= (-2 \sin t, 2 \cos t), \\ t &\in \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle, & t &\in \langle -\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{(C_1)} (-y, x-1) \, d\mathbf{s} + \int_{(C_2)} (-y, x-1) \, d\mathbf{s} \\ = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (t, t-1) \cdot (1, -1) \, dt \\ + \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (-2 \sin t, 2 \cos t - 1) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t) \, dt \\ = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 1 \, dt + \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (4 - 2 \cos t) \, dt = 4\pi. \end{aligned}$$

Věta (Green). Je-li $G \subset \mathbb{R}^2$ omezená oblast, jejíž hranice (∂G) je kladně orientovaná uzavřená jednoduchá křivka, a $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ je vektorové pole třídy C^1 na otevřené nadmnožině $G \cup \partial G$, pak

$$\int_{(\partial G)} \mathbf{F} \, d\mathbf{s} = \iint_G \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dx \, dy.$$

Příklad. Spočítejte $\int_{(C)} (-y, x-1) \, d\mathbf{s}$, (C) je kladně orientovaná hranice $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 4, y > -x\}$.

$$\begin{aligned} = \iint_G \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dx \, dy = \iint_G 2 \, dx \, dy \\ = \left| \begin{array}{l} x = \varrho \cos \varphi \\ y = \varrho \sin \varphi \\ |\det J| = \varrho \end{array} \right| = \int_0^2 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} 2\varrho \, d\varphi \, d\varrho = 4\pi. \end{aligned}$$

Plošné integrály

Definice. Množina $S \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá *list*, pokud existuje dvojrozměrný interval A a prosté $\Phi(u, v): A \xrightarrow{\text{na}} C$ třídy C^1 na otevřené $G \supset A$ s lineárně nezávislými $\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ na G ; Φ se nazývá *parametrizace* S , obraz hranice A se nazývá *okraj* S .

Poznámka. $\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ jsou tečné vektory (nenulové, svírající nenulový úhel), „měřítka“ je $\|\frac{\partial \Phi}{\partial u}\| \cdot \|\frac{\partial \Phi}{\partial v}\| \cdot \sin \sphericalangle \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)$, v \mathbb{R}^3 je to velikost normálového vektoru $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$.

plocha: sjednocení listů protínajících se jen v okrajích *orientovaná plocha* v \mathbb{R}^3 : určena orientace normál (odpovídá parametrizaci) pro S graf $f(x, y)$ lze

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= (x, y, f(x, y)) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \end{aligned}$$

Věta. Je-li f spojitá funkce na ploše $S \subset \mathbb{R}^3$ s parametrizací $\Phi: A \rightarrow S$, pak

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) \, dS &= \\ &= \iint_A f(\Phi(u, v)) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \right\| \, du \, dv. \end{aligned}$$

Poznámka. Využití: obsah plochy ($f = 1$), hmotnost, momenty, intenzita el. pole, ... plošných útvarů.

Příklad. Obsah pláště kužele s výškou v a poloměrem podstavu r : $S = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq r^2, z = \frac{v}{r} \sqrt{x^2 + y^2}\}$

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, \frac{v}{r} \varrho), \quad \varrho \in (0, r), \quad \varphi \in (0, 2\pi), \\ \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\| &= \left\| \left(\cos \varphi, \sin \varphi, \frac{v}{r} \right) \times \left(-\varrho \sin \varphi, \varrho \cos \varphi, 0 \right) \right\| \\ &= \left\| \left(-\frac{v}{r} \varrho \cos \varphi, -\frac{v}{r} \varrho \sin \varphi, \varrho \right) \right\| = \varrho \sqrt{\frac{v^2}{r^2} + 1}, \end{aligned}$$

$$\iint_S 1 \, dS = \int_0^r \int_0^{2\pi} 1 \cdot \varrho \sqrt{\frac{v^2}{r^2} + 1} \, d\varphi \, d\varrho = \pi r \sqrt{r^2 + v^2}.$$

Věta. Je-li \mathbf{F} spojité vektorové pole na orientované ploše $(S) \subset \mathbb{R}^3$ s parametrizací $\Phi: A \rightarrow S$, pak

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \mathbf{F}(x, y, z) \, d\mathbf{S} &= \\ &= \iint_A \mathbf{F}(\Phi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \right) \, du \, dv. \end{aligned}$$

Poznámky.

- 1) Píšeme i $\iint_{(S)} F_1 \, dy \, dz + F_2 \, dz \, dx + F_3 \, dx \, dy$.
- 2) Pro opačně orientovanou plochu opačný výsledek.
- 3) Pro \mathbf{F} nezáp. nás. normály na (S) : $\iint_{(S)} \mathbf{F} \, d\mathbf{S} = \iint_A (\mathbf{F} \circ \Phi) \cdot \mathbf{n} \, du \, dv = \iint_A \|\mathbf{F} \circ \Phi\| \cdot \|\mathbf{n}\| \, du \, dv = \iint_S \|\mathbf{F}\| \, dS$.
- 4) Využití: tok pole plochou.
- 5) Vektorové pole lze integrovat i neorientovaně po složkách: $\iint_S (F_1, F_2, F_3) = (\iint_S F_1, \iint_S F_2, \iint_S F_3)$.

Příklad. $S = \{(x, y, z): x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$, or. ven

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= (\cos \varphi, \sin \varphi, z), \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad z \in (0, 1), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \times (0, 0, 1) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_S (x, y, z^2) \, d\mathbf{S} \\ = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos \varphi, \sin \varphi, z^2) \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \, dz \, d\varphi \\ = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 1 \, dz \, d\varphi = 2\pi. \end{aligned}$$

Integrální věty

Definice. Necht $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ je vektorové pole třídy C^1 na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^3$. Pokládáme

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}, \quad \text{divergence } \mathbf{F},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix}, \quad \text{rotace } \mathbf{F}.$$

Poznámka. Divergenci můžeme zavést v každém \mathbb{R}^n , rotaci můžeme zavést v \mathbb{R}^2 : $\operatorname{rot}(F_1, F_2, 0) = (0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})$, zajímavá je jen třetí složka, pokládáme tedy

$$\operatorname{rot}(F_1, F_2) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Věta (Gauss). Je-li $G \subset \mathbb{R}^3$ omezená oblast, jejíž hranice (∂G) je plocha orientovaná ven, \mathbf{F} je vektorové pole třídy C^1 na otevřené nadmnožině $G \cup \partial G$, pak

$$\iint_{(\partial G)} \mathbf{F} = \iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F}.$$

Poznámka. Vektorové pole s nulovou divergencí se nazývá *nezřídlové*, integrál vpravo udává množství zřidel v oblasti. Například pro intenzitu \mathbf{E} elektrického pole náboje Q je $\iint_{(\partial G)} \mathbf{E} \, d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon}$, pro Poyntingův vektor $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ elektromagnetického pole antény o výkonu N je $\iint_{(\partial G)} \mathbf{P} \, d\mathbf{S} = N$.

Příklad. (S) je povrch krychle $\langle 0, a \rangle^3$ orientovaný ven:

$$\iint_{(S)} (x, 2y, 3z) \, d\mathbf{S} = \int_0^a \int_0^a \int_0^a 6 \, dx \, dy \, dz = 6a^3.$$

Věta (Stokes). Je-li (S) $\subset \mathbb{R}^3$ orientovaná plocha, jejíž okraj (∂S) je souhlasně orientovaná uzavřená jednoduchá křivka, \mathbf{F} vektorové pole třídy C^1 na otevřené nadmnožině $G \cup \partial G$, pak

$$\int_{(\partial S)} \mathbf{F} = \iint_{(S)} \operatorname{rot} \mathbf{F}.$$

Poznámky.

- 1) Souhlasná orientace: stojíme-li na ploše orientování nahoru, vidíme okraj orientován kladně.
- 2) Vektorové pole s nulovou rotací se nazývá *nevírové*.
- 3) Greenova věta: třetí souřadnice nulové.

Potenciál

Definice. Potenciál vektorového pole \mathbf{F} na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$ je funkce f na G , pro kterou $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$. Má-li \mathbf{F} potenciál, nazývá se *potenciálové*.

Poznámka. Potenciály vektorového pole na oblasti (souvislé otevřené mn.) se liší o konstantu, na disjunktních oblastech jsou nezávislé, stačí je tedy vyšetřovat na oblastech.

Tvrzení. Je-li $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá, pak centrální vektorové pole $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x}\|) \cdot \mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$) má potenciál $f(\mathbf{x}) = G(\|\mathbf{x}\|)$, kde $G(t)$ je primitivní funkce $k \, t \, \varphi(t)$.

Důkaz. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = G'(\|\mathbf{x}\|) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \|\mathbf{x}\| \cdot \varphi'(\|\mathbf{x}\|) \cdot \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \varphi'(\|\mathbf{x}\|) \cdot x_i = F_i(\mathbf{x})$.

Příklad. Potenciál elektrického pole bodového náboje Q .

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\|\mathbf{x}\|^3} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{o},$$

$$\int t \cdot \frac{Q}{4\pi\varepsilon t^3} \, dt = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon t} + c,$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon\|\mathbf{x}\|} \quad (\varphi(\mathbf{x}) \xrightarrow{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} 0).$$

Věta. Spojité vektorové pole \mathbf{F} na oblasti $G \subset \mathbb{R}^n$ je potenciálové právě tehdy, když pro každou uzavřenou jednoduchou orientovanou křivku (C) $\subset G$ je $\int_{(C)} \mathbf{F} = 0$ (konzervativní pole).

Poznámky. Za předpokladů věty:

- 1) Křivkový integrál „nezávisí na cestě“, je roven rozdílu potenciálů v koncovém a počátečním bodě křivky.
- 2) Potenciál lze počítat $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \int_{(C)} \mathbf{F}$, kde (C) $\subset G$ je orientovaná křivka z \mathbf{x}_0 do \mathbf{x} .

Věta. Je-li \mathbf{F} potenciálové vektorové pole třídy C^1 na oblasti $G \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \{2, 3\}$), pak $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{o}$.

Důkaz. Pro $f \in C^2(G)$ je $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \mathbf{o}$.

Věta. Je-li \mathbf{F} nevírové vektorové pole třídy C^1 ($\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{o}$) na oblasti $G \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \{2, 3\}$) a platí-li některá z podmínek

- (1) $n = 2$ a vnitřek každé uzavřené jednoduché křivky v G leží v G (tj. G je jednoduše souvislá),
- (2) $n = 3$ a ke každé uzavřené křivce $C \subset G$ existuje plocha $S \subset G$, která má za okraj C (tj. G je plošně jednoduše souvislá),
- (3) $n = 3$ a existuje bod $(x_0, y_0, z_0) \in G$ takový, že pro každý $(x, y, z) \in G$ leží v G i úsečka spojující tyto body (tj. G je hvězdicovitě souvislá),

pak \mathbf{F} je potenciálové.

Příklad. Pro

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right), \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

je $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$, ale pro kladně orientovanou jednotkovou kružnici s parametrizací $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je

$$\int_{(C)} \mathbf{F} \, d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi \neq 0.$$

Poznámka. Podobně v \mathbb{R}^3 přidáním třetí nulové souřadnice.

Příklad. Najdeme potenciál $\mathbf{F}(x, y) = (2xy, x^2)$. $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$ na \mathbb{R}^2 , potenciál existuje, ($C_{(x,y)}$): úsečka z $(0, 0)$ do (x, y) , $\varphi(t) = (tx, ty)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$,

$$f(x, y) = \int_{(C_{(x,y)})} \mathbf{F} \, d\mathbf{s} = \int_0^1 (2xyt^2, x^2t^2) \cdot (x, y) \, dt$$

$$= \int_0^1 3x^2yt^2 \, dt = x^2y.$$

Číselné řady

$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Definice. (Nekonečná číselná) řada je výraz $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, kde $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost čísel. Číslo a_k je k -tý člen, $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ je n -tý částečný součet, $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ je součet (pokud existuje).

Řekneme, že řada konverguje, je-li $s \in \mathbb{C}$; diverguje, je-li $s \in \{\pm\infty, \infty\}$; osciluje, pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ neexistuje.

Příklady.

1) $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ diverguje: $s_n = n, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$.
 2) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ osciluje: $s_n = 1$ pro n liché, $s_n = 0$ pro n sudé.

3) Geometrická řada s kvocientem q : $a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_1q^{k-1}$.

$$\begin{aligned} s_n &= a_1(1 + q + \dots + q^{n-1}) \\ qs_n &= a_1(q + \dots + q^{n-1} + q^n) \\ (1-q)s_n &= a_1(1 - q^n) \\ s_n &= \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, \quad (q \neq 1) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_1q^{k-1} = \frac{a_1}{1 - q}, \quad |q| < 1$$

Pro $|q| \geq 1$ a $a_1 \neq 0$ nekonverguje.

Věta. Komplexní řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když konvergují řady $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$. Pak

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + j \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k.$$

Poznámka. Pro divergenci v \mathbb{C} stačí, aby divergovala řada reálných nebo řada imaginárních částí. Není to nutné, např. $\sum_{k=1}^{\infty} (-2)^k$ diverguje v \mathbb{C} .

Věta. Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergují, $c \in \mathbb{C}$, pak

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \\ \sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k &= c \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \end{aligned}$$

Věta (nutná podmínka konvergence). Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, pak $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Důkaz. $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k - \lim_{k \rightarrow \infty} s_{k-1} = s - s = 0$.

Věta. Řada s nezápornými členy má součet.

Důkaz. $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je neklesající, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ existuje.

Věta (srovnávací kritérium). Necht' $0 \leq a_k \leq b_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

- 1) Konverguje-li $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, pak i $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.
- 2) Diverguje-li $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, pak i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverguje.

Důkaz. Důsledek věty o monotonii pro limity.

Příklady.

1) Harmonická řada:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = +\infty. \end{aligned}$$

2) Pro $a \leq 1$: $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^a \geq \sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ diverguje.

Věta. Konverguje-li $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, pak konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Důkaz.

1) $a_k \in \mathbb{R}$: $a^+ = \max\{a, 0\}, a^- = \max\{-a, 0\}$

$$a = a^+ - a^-, |a| = a^+ + a^-, 0 \leq a^+, a^- \leq |a|$$

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje ...

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+, \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergují (srovnávací kritérium) ...

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- \text{ konv.}$$

2) $a_k \in \mathbb{C}$: $0 \leq |\operatorname{Re} a_k|, |\operatorname{Im} a_k| \leq |a_k|$

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverguje ...

$\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Re} a_k|, \sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im} a_k|$ konvergují (srovnávací kr.) ...

$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k$ konvergují podle 1) ...

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k + j \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k \text{ konverguje}$$

Definice. Řekneme, že $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje absolutně, pokud konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Poznámky.

1) Jestliže reálná řada konverguje neabsolutně, pak je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = +\infty$, každé číslo z $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ je součtem vhodného přerovnání řady.

2) Absolutně konvergentní řadu můžeme bez změny součtu libovolně přerovnat i rozdělit na součet řad.

3) Geometrická řada konverguje absolutně (pokud konv.).

Věta (podílové kritérium). Necht' $a_k \neq 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

1) Je-li $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje (absolutně).

2) Je-li $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonv.

Důkaz.

1) $|a_k| \leq |a_{k-1}|q \leq \dots \leq |a_1|q^{k-1}, \sum_{k=1}^{\infty} |a_1|q^{k-1}$ konv.

2) $|a_k| \geq |a_{k-1}| \geq \dots \geq |a_1|, a_k \not\rightarrow 0$

Poznámka. Stačí, aby byly nerovnosti splněny pro dostatečně velká k , tj. počínaje některým k_0 .

Věta (limitní tvar podílového kritéria).

1) Je-li $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. (abs.).

2) Je-li $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje.

Příklady.

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konverguje: $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{1}{k+1} \rightarrow 0$.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ - kr. nerozhodne: $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k}{k+1} \nearrow 1$ (diverguje - nestačí, aby podíly byly menší než 1).

Věta (odmocninové kritérium).

- 1) Je-li $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje (absolutně);
- 2) Je-li $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonv.

Důkaz.

- 1) $|a_k| \leq q^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ konverguje
- 2) $|a_k| \geq 1$, $a_k \not\rightarrow 0$

Věta (limitní tvar odmocninového kritéria).

- 1) Je-li $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. (abs.).
- 2) Je-li $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nekonverguje.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$ nerozhodne: $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{k}{k+1} \nearrow 1$; $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right]^{-1} = e^{-1} \neq 0$ – diverguje.

Poznámka. Odmocninové kritérium je účinnější, ale obvykle se hůře používá.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \dots$

$$a_{2k-1} = 2^{-k}, a_{2k} = 2^{1-k},$$

$\sqrt[k]{a_k} \rightarrow 2^{-1/2} < 1$ – konverguje podle odmocninového kr.

$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = 2$ – podílové kritérium nerozhodne

Věta (integrální kritérium). Necht' f je nezáporná nerostoucí funkce na $\langle 1, +\infty \rangle$. Pak $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje právě tehdy, když konverguje $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

Důkaz. $f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \geq \int_1^{+\infty} f(x) dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - f(1)$$

Příklady.

- 1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{+\infty} = +\infty$.
- 2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ konverguje pro $a > 1$: $\int_1^{+\infty} x^{-a} dx = \frac{1}{a-1}$.

Příklad. Jaká je chyba $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{6} \pi^2$, pokud sečteme prvních 100 členů?

$$\sum_{k=101}^{\infty} a_k \leq \int_{100}^{+\infty} x^{-2} dx = [-x^{-1}]_{100}^{+\infty} = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$\sum_{k=101}^{\infty} a_k \geq \int_{101}^{+\infty} x^{-2} dx = [-x^{-1}]_{101}^{+\infty} = \frac{1}{101} \doteq 0,0099$$

Věta (Leibnizovo kritérium). Je-li $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost nezáporných čísel s $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ konverguje.

Důkaz. $s_1 \geq s_3 \geq \dots \searrow s'$, $s_2 \leq s_4 \leq \dots \nearrow s'' \leq s'$,

$$s' - s'' = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_{2k+1} - s_{2k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$$

Poznámka. Jiná formulace: Alternující řada (střídají se znaménka) s $|a_k| \searrow 0$ konverguje.

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots (= \ln 2)$ konverguje: střídají se znaménka, $|a_k| = \frac{1}{k} \searrow 0$. Ne absolutně: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ (podle integrálního kritéria).

$f_1 + f_2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ na $\bigcap_{k=1}^{\infty} D(f_k)$
(bodová) konvergence k $f: x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ (pokud konv.)
obor (absolutní) konvergence:
 $\{x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D(f_k) : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ konverguje (absolutně)}\}$

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (x-2)^k = (x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^2 + \dots$,
podílové kritérium konvergence:

$$\left| \frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)} \right| = \left| \frac{(x-2)^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{k}{(x-2)^k} \right| = \frac{k}{k+1} \cdot |x-2| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |x-2|$$

$|x-2| < 1$: konverguje absolutně

$|x-2| > 1$: nekonverguje

$$x = 1: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \text{ konverguje (Leibnizovo kr.)}$$

$$x = 3: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ nekonverguje (integrální kr.)}$$

obor konvergence: $\langle 1, 3 \rangle$, obor absolutní konvergence: $\langle 1, 3 \rangle$.

Definice. Posloupnost funkcí $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje *stejněměrně* k funkci f na množině A , pokud

$$\sup_{x \in A} |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0;$$

lokálně stejněměrně, pokud pro každé $x \in A$ existuje okolí U bodu x takové, že na $A \cap U$ konverguje stejněměrně.

Poznámka. Lokálně stejněměrná konvergence na uzavřeném intervalu je stejněměrná.

Příklad. $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$, $x \in \langle 0, +\infty \rangle$

$$f_n(0) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = f(0)$$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = f(x), \quad x > 0$$

$\sup_{x \in \langle 0, +\infty \rangle} |f(x) - f_n(x)| = 1 \not\rightarrow 0$ ne stejněměrně

$$\sup_{x \in \langle a, +\infty \rangle} |f(x) - f_n(x)| = \frac{1}{1+na} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ stejn., } a > 0$$

lokálně stejněměrně na $\langle 0, +\infty \rangle$

Poznámka. Pro řady uvažujeme posl. částečných součtů.

Věta (Weierstrassovo kritérium). Jestliže $|f_k(x)| \leq a_k$ na množině A pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, pak $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje stejněměrně a absolutně na množině A .

Důkaz. $x \in A$: $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ tedy konverguje absolutně, součet označme $f(x)$.

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Příklad. $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$ (geom. řada); pro $|x| \leq q < 1$ je $|x^{k-1}| \leq q^{k-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ konverguje, tedy řada konv. abs. a stejněměrně na $\langle -q, q \rangle$ pro každé $q < 1$, tedy abs. a lokálně stejněměrně na $(-1, 1)$; ne stejněměrně:

$$\sup_{x \in (-1, 1)} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x^{k-1} \right| = \sup_{x \in (-1, 1)} \frac{x^n}{1-x} = +\infty$$

Věta. Jsou-li f_n ($n \in \mathbb{N}$) spojité funkce konvergující lokálně stejnoměrně k funkci f na intervalu I , pak:

- 1) f je spojitá na I .
- 2) $\int_a^b f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ pro $(a, b) \subset I$.
- 3) Jsou-li f'_n spojitě a konvergují-li lokálně stejnoměrně, pak $f'_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'(x)$ na I .

Důkaz. 1) $a \in I$, $\varepsilon > 0$: $|f(x) - f_n(x)|, |f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pro velké n ze stejnoměrné konvergence, $|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pro x blízko a ze spojitosti f_n ; pak $|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

- 2) $|\int_a^b (f(x) - f_n(x)) dx| \leq |b - a| \sup |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- 3) $\lim f'_n(x) = (\int_a^x \lim f'_n(t) dt)' \stackrel{2)}{=} (\lim \int_a^x f'_n(t) dt)' = (\lim (f_n(x) - f_n(a)))' = (f(x) - f(a))' = f'(x)$.

Poznámka. Stejnoměrně konv. řada spojitých funkcí má spojitý součet, dá se integrovat a (pokud jsou derivace spojitě a jejich řada konv. stejnoměrně) derivovat člen po členu.

Příklady.

- 1) Funkce $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ konvergují k nespojitě funkci na $(0, +\infty)$, tedy ne stejnoměrně.
- 2) Graf f_n je lomená čára spojující body $(0, 0)$, $(\frac{1}{2n}, 2n)$, $(\frac{1}{n}, 0)$ a $(1, 0)$; f_n konvergují k nulové funkci na $(0, 1)$, ale ne stejnoměrně: $\int_0^1 f_n(x) dx = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0 = \int_0^1 0 dx$.

Mocninné řady

Definice. Mocninná řada se středem x_0 a koeficienty a_k :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots$$

Věta. Pro mocninnou řadu se středem x_0 existuje poloměr konvergence $r \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$, pro který platí:

- 1) Řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $\{x: |x - x_0| < r\}$.
- 2) Řada nekonverguje v žádném bodě $\{x: |x - x_0| > r\}$.

Důkaz. Konverguje-li v $x_1 \neq x_0$, pak $a_k(x_1 - x_0)^k \rightarrow 0$, existuje $M \in \mathbb{R}$ tak, že $|a_k(x_1 - x_0)^k| \leq M$; pro $q < 1$, $|x - x_0| \leq q|x_1 - x_0|$ je $|a_k(x - x_0)^k| = |a_k(x_1 - x_0)^k| \cdot |\frac{x-x_0}{x_1-x_0}|^k \leq M \cdot q^k$; podle Weierstrassova kr. konverguje absolutně a stejnoměrně na $\{x: |x - x_0| \leq q|x_1 - x_0|\}$, tedy lokálně stejnoměrně na $\{x: |x - x_0| < |x_1 - x_0|\}$; $r = \sup\{|x_1 - x_0|: \text{řada konverguje v } x_1\}$.

Poznámka. Na hranici oboru konvergence $\{x: |x - x_0| = r\}$ mohou nastat jen tyto případy:

- 1) nikde nekonverguje;
- 2) někde konverguje (ne absolutně), někde ne;
- 3) všude konverguje absolutně (jakmile v jednom bodě).

Věta. Jestliže pro mocninnou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ existuje $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = A$ nebo $\lim_{k \rightarrow \infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = A$, pak její poloměr konvergence je $\frac{1}{A}$ (včetně $\frac{1}{+\infty} = 0, \frac{1}{0^+} = +\infty$).

Důkaz (odm.). $\sqrt[k]{|a_k(x - x_0)^k|} = \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |x - x_0| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A|x - x_0|$; podle odmocninového kritéria konverguje pro $A|x - x_0| < 1$, nekonverguje pro $A|x - x_0| > 1$.

Poznámka. Poloměr konvergence je $1/\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

Příklady.

- 1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ má poloměr konvergence $+\infty$.
- 2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} x^k$ má poloměr konvergence 1, na hranici konverguje absolutně.
- 3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$ má poloměr konvergence 1, v bodě 1 nekonverguje, v bodě -1 konverguje (neabsolutně).
- 4) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ má poloměr konvergence 1, na hranici nekonverguje.
- 5) $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$ má poloměr konvergence 0 (ve svém středu řada vždy konverguje).

Věta. Jestliže pro $|x - x_0| < r$ je $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = f(x)$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k = g(x)$, pak

$$(f + g)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) (x - x_0)^k,$$

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}.$$

Tvrzení. Řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ a $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$ mají stejný poloměr konvergence.

Důkaz. $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|(k+1)a_{k+1}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k+1} \cdot \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{k+1}|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{k+1}|}$

Věta. Uvnitř kruhu konvergence je součet mocninné řady spojitá funkce, řadu lze derivovat a integrovat člen po členu.

Poznámky.

- 1) Pokud řada konverguje v hraničním bodě oboru konvergence, pak k limitě součtu (po poloměru).
- 2) Řada nemusí konvergovat v bodě, ve kterém má její součet vlastní limitu.

Příklad. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$, $x \in (-1, 1)$ (geom. řada), nekonverguje v 1, kde jmá součet vlastní limitu. Integrovaním $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = \ln(1+x)$, $x \in (-1, 1)$ (integrační konstantu dostaneme dosazením středu řady, konverguje i v 1). Pro $x = 1$: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$.

Taylorovy řady

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad f(x_0) = a_0,$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}, \quad f'(x_0) = 1 \cdot a_1,$$

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k (x - x_0)^{k-2}, \quad f''(x_0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2,$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x_0) = k! a_k$$

Definice. Necht funkce f má v bodě x_0 derivace všech řádů. Taylorova řada funkce f v bodě x_0 je řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Příklad. Taylorova řada nenulové funkce může být nulová:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$f^{(k)}(x) = e^{-1/x^2} P_k\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0,$$

$$f^{(k)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f^{(k)}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} P_k\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\stackrel{1/x=y}{=} \lim_{|y| \rightarrow +\infty} \frac{P_k(y)}{e^{y^2}} \stackrel{\text{rH}}{=} 0.$$

Poznámka. Mocninná řada je Taylorovou řadou svého součtu. Taylorova řada funkce může mít za součet jinou funkci. Konvergence Taylorovy řady funkce f v bodě x_0 k funkci f v bodě x je zaručena, pokud zbytky Taylorova polynomu konvergují k 0, tedy pokud

$$\sup_{c \text{ mezi } x, x_0} \left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Příklady. Pro $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Příklady. Pro $x \in (-1, 1)$:

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k,$$

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1!} x + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \dots$$

Příklad. Taylorova řada funkce $x e^{2x}$ v bodě 1:

$$x e^{2x} = [(x-1)+1] e^{2[(x-1)+1]} = [(x-1)+1] e^2 e^{2(x-1)} =$$

$$= [(x-1)+1] e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} (x-1)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^2 2^k}{k!} (x-1)^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^2 2^k}{k!} (x-1)^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^2 2^{k-1}}{k-1!} (x-1)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^2 2^k}{k!} (x-1)^k =$$

$$= e^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^2 2^{k-1} (k+2)}{k!} (x-1)^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Věta. Taylorova řada racionální funkce k ní konverguje na otevřeném kruhu, jehož poloměr je vzdálenost středu řady od nejbližšího kořene jmenovatele v \mathbb{C} (po zkrácení).

Důkaz. Rozklad na součet polynomu a parciálních zlomků v \mathbb{C} , stačí vyšetřit Taylorovy řady funkcí $f(x) = \frac{1}{x-a}$ v bodě $x_0 \neq a$. Využijeme větu o součtu geometrické řady:

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(x-a)^{k+1}}, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = \frac{(-1)^k}{(x_0-a)^{k+1}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x_0-a} \left(\frac{x-x_0}{a-x_0} \right)^k = \frac{1}{x-a}$$

pro $|\frac{x-x_0}{a-x_0}| < 1$, tedy $|x-x_0| < |a-x_0|$.

Příklad. Taylorova řada v bodě 1:

$$\frac{x-2}{x+1} = 1 - \frac{3}{x+1} = 1 - \frac{3}{(x-1)+2} = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} =$$

$$= 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-1}{-2}} = 1 - \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{-2} \right)^k =$$

$$= -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{(-2)^k} (x-1)^k, \quad |x-1| < 2.$$

Příklad. Taylorova řada v bodě 1:

$$\frac{1}{(x+1)^2} = \left(\frac{-1}{x+1} \right)' = \dots = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(-2)^{k+1}} (x-1)^k \right)'$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(-2)^{k+1}} (x-1)^{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{(-2)^{k+2}} (x-1)^k, \quad |x-1| < 2.$$

Příklad. Taylorova řada funkce $\arctg x$ v bodě 0:

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k},$$

$$\arctg x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + 0, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Pro $x=1$ dostaneme $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$.

Fourierovy řady

po částech spojitě funkce, perioda $T > 0$, úhlová frekvence $\omega = \frac{2\pi}{T}$, použijeme funkce $\cos k\omega t$, $\sin k\omega t$ ($k \in \mathbb{N}$), konstantní 1 ($\cos k\omega t$ pro $k=0$)

Poznámka. Výpočet souřadnice vektoru \mathbf{x} pro ortogonální bázi $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ v \mathbb{R}^n :

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n \quad / \cdot \mathbf{e}_k$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_k = x_k \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k = x_k \|\mathbf{e}_k\|^2$$

$$x_k = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_k}{\|\mathbf{e}_k\|^2}$$

prostor po částech spojitých periodických funkcí s periodou T , skalární součin:

$$(f, g) = \int_0^T f(t) g(t) dt.$$

Tvrzení. Množina funkcí $\{1\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\cos k\omega t, \sin k\omega t\}$ (tzv. trigonometrický systém) je ortogonální, $\|1\|^2 = T$, $\|\cos k\omega t\|^2 = \|\sin k\omega t\|^2 = T/2$ ($k \in \mathbb{N}$).

Důkaz.

$$(1, \cos k\omega t) = \int_0^T \cos k\omega t \, dt = 0 = (1, \sin k\omega t)$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$$

$$(\sin k\omega t, \cos m\omega t) = \int_0^T \frac{\sin(k+m)\omega t + \sin(k-m)\omega t}{2} \, dt = 0$$

$$\begin{aligned} (f(k\omega t), f(m\omega t)) &= \int_0^T \frac{\cos(k-m)\omega t \pm \cos(k+m)\omega t}{2} \, dt = \\ &= \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ T/2, & k = m, \end{cases} \quad f \in \{\cos, \sin\} \end{aligned}$$

Poznámka. Množina funkcí $\{1\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\cos k\omega t, \sin k\omega t\}$ není báze, ale můžeme používat nekonečné lineární kombinace těchto funkcí s podobně spočtenými koeficienty.

Definice. Fourierova řada je řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \quad \omega > 0.$$

Věta. Jestliže řada $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$ konverguje stejnoměrně k funkci f , $T = 2\pi/\omega$, pak

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t \, dt, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t \, dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Důkaz. Funkce $\cos k\omega t$ je omezená, můžeme jí roznásobit řadu člen po členu, stejnoměrná konvergence zůstane, můžeme integrovat člen po členu, tedy $(f(t), \cos k\omega t) = (a_k \cos k\omega t, \cos k\omega t) = a_k \cdot T/2$. Podobně pro $\sin k\omega t, 1$.

Poznámky.

1) Můžeme integrovat na intervalu $(\alpha, \alpha + T)$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$, speciálně na $(-T/2, T/2)$.

2) $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, dt$ je střední hodnota funkce f .

3) Je-li f polynom, integrujeme per partes, je-li $f \in \{\sin, \cos\}$, použijeme identity z důkazu ortogonality.

Definice. Fourierova řada funkce f s periodou $T = 2\pi/\omega$ je Fourierova řada s koeficienty spočtenými podle předcházející věty. Píšeme $f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$.

Věta. Jsou-li funkce f a f' po částech spojité, pak Fourierova řada funkce f konverguje v bodě t k $\frac{1}{2}(f(t-) + f(t+))$. Je-li navíc f spojitá, pak je tato konvergence stejnoměrná.

Poznámka. V bodech nespojitosti f dochází k tzv. Gibbsovu jevu – konečné součty Fourierovy řady „překmitnou“, délky rozkmitu se limitně blíží hodnotě $G \cdot |f(t+) - f(t-)|$, kde $G = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \, dt \doteq 1,18$ je tzv. Gibbsova konstanta.

Příklad. Funkce f s periodou $T = 2\pi$:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle 0, \pi \rangle, \\ -1, & t \in \langle \pi, 2\pi \rangle. \end{cases}$$

$\omega = 1$, funkce f je „skoro lichá“, dostaneme tedy

$$a_k = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt = 0$$

$$b_k = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt \, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kt \, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \left[-\frac{\cos kt}{k} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2(1 - \cos k\pi)}{k\pi} = \frac{2(1 - (-1)^k)}{k\pi} = \begin{cases} 0, & k \text{ sudé} \\ \frac{4}{k\pi}, & k \text{ liché} \end{cases}$$

$$f(t) \sim \frac{4}{\pi} \sin t + \frac{4}{3\pi} \sin 3t + \frac{4}{5\pi} \sin 5t + \dots =$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ liché}}}^{\infty} \frac{4}{k\pi} \sin kt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)t$$

Řada konverguje k f v bodech její spojitosti, v $k\pi$ k 0.

Pro $t = \frac{\pi}{2}$ dostaneme $1 = \frac{4}{\pi} (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots)$, tedy $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$.

Poznámka. Fourierova řada sudé funkce je sudá funkce, (kosinová F. řada). Fourierova řada liché funkce je lichá funkce (sinová F. řada). Je-li $T/2$ antiperioda ($f(t+T/2) = -f(t)$), pak má Fourierova řada jen liché členy.

(Sinová/kosinová) F. řada funkce na omezeném intervalu: periodicky prodloužíme (po lichém/sudém rozšíření).

Příklad. Kosinová řada $f(t) = 1 - t$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$: Sudé rozšíření $f(t) = t - 1$ pro $t \in \langle -1, 0 \rangle$, periodické prodloužení, $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$, $b_k = 0$.

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \, dt = 1$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega t \, dt = \begin{cases} 0, & k > 0 \text{ sudé} \\ \frac{4}{k^2\pi^2}, & k \text{ liché} \end{cases}$$

$$f(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cos t + \frac{4}{9\pi^2} \cos 3t + \frac{4}{25\pi^2} \cos 5t + \dots =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ liché}}}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi^2} \cos kt =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2} \cos(2k-1)t$$

Řada konverguje k f .

Pro $t = 0$ dostaneme $1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} (1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots)$, tedy $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$, odtud $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Věta. Necht' f je periodická funkce, f, f' jsou po částech spojité, $f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$. Pak platí:

1) Je-li f spojitá, pak

$$f'(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (b_k k\omega \cos k\omega t - a_k k\omega \sin k\omega t).$$

2) Je-li $a_0 = 0$ a $F' = f$, pak

$$F(t) \sim \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{b_k}{k\omega} \cos k\omega t + \frac{a_k}{k\omega} \sin k\omega t \right).$$

Amplitudově-fázový tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k), \quad A_k \geq 0, \varphi_k \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Přepis (součtový vzorec pro sinus):

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(A_k \sin \varphi_k)}_{a_k} \cdot \cos k\omega t + \underbrace{(A_k \cos \varphi_k)}_{b_k} \cdot \sin k\omega t$$

Obráceně:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad A_k \neq 0: \quad \sin \varphi_k = \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}},$$

$$\cos \varphi_k = \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}.$$

Komplexní tvar

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{jk\omega t}.$$

Přepis ($e^{jy} = \cos y + j \sin y$):

$$\underbrace{c_0}_{a_0/2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\underbrace{(c_k + c_{k-1})}_{a_k} \cos k\omega t + \underbrace{j(c_k - c_{k-1})}_{b_k} \sin k\omega t \right)$$

Obráceně:

$$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Pro reálnou f :

$$\begin{aligned} \text{sudá:} \quad & b_k = 0, \quad \text{Im } c_k = 0, \quad c_{-k} = \bar{c}_k, \\ \text{lichá:} \quad & a_k = 0, \quad \text{Re } c_k = 0, \quad c_{-k} = -c_k. \end{aligned}$$

Přímý výpočet – skalární součin v \mathbb{C} :

$$(f, g) = \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Ortogonalita systému $\{e^{jk\omega t} : k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned} (e^{jk\omega t}, e^{jm\omega t}) &= \int_0^T e^{jk\omega t} \cdot e^{-jm\omega t} dt = \int_0^T e^{j(k-m)\omega t} dt \\ &= \begin{cases} T, & k = m, \\ \left[\frac{e^{j(k-m)\omega t}}{(k-m)\omega t} \right]_0^T = 0, & k \neq m. \end{cases} \end{aligned}$$

Výpočet koeficientu ($k \in \mathbb{Z}$):

$$c_k = \frac{(f(t), e^{jk\omega t})}{\|e^{jk\omega t}\|^2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt.$$

Příklad. e^t na $\langle 0, 1 \rangle$: $T = 1, \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$,

$$\begin{aligned} c_k &= \int_0^1 e^t \cdot e^{-jk\omega t} dt = \frac{(e-1)(1+2k\pi j)}{1+4k^2\pi^2}, \\ f(t) &\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(e-1)(1+2k\pi j)}{1+4k^2\pi^2} e^{2k\pi j t} = \\ &= (e-1) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2(e-1)}{1+4k^2\pi^2} \cos 2k\pi t + \frac{-4k\pi(e-1)}{1+4k^2\pi^2} \sin 2k\pi t \right). \end{aligned}$$