

# Řešení vzorového testu přijmacích zkoušek na FEL ČVUT - VZOR01

1. Množina všech řešení nerovnice  $2^{|x+3|} < 2$  s neznámou  $x \in \mathbb{R}$  je...

$$\begin{aligned} 2^{|x+3|} &< 2 \\ 2^{|x+3|} &< 2^1 \\ |x+3| &< 1 \end{aligned}$$

|                       |                      |
|-----------------------|----------------------|
| $x \in (-\infty, -3)$ | $x \in (-3, \infty)$ |
| $-(x+3) < 1$          | $(x+3) < 1$          |
| $x > -4$              | $x < -2$             |
| $x \in (-4, -3)$      | $x \in (-3, -2)$     |

Výsledek:  $x \in (-4, 2)$ .

2. Maximální definiční obor funkce  $f(x) = \frac{x}{\sin x}$  je...

$$\begin{aligned} \sin x &\neq 0 \\ x &\neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Výsledek:  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Vzhledem k nabízeným odpovědím je správná odpověď „stejný jako pro funkci  $g(x) = \cotg x$ “.

3. Jestliže  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2}$  a  $\alpha \in (\pi, 2\pi)$ , pak  $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$  je...

$$\begin{aligned} \sin \alpha \cdot \cos \alpha &= \frac{1}{2} \\ 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha &= 1 \\ \sin 2\alpha &= 1 \\ 2\alpha &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \alpha &= \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \alpha \in (\pi, 2\pi) &\Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{5\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

Výsledek:  $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -1$ .

4. V intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$  má rovnice  $\sin x = \cos x - 1$  (kolik řešení)...

Ze znalostí hodnot goniometrických funkcí v „základních bodech“ ihned vidíme rovnost pro  $x = 0$  a  $x = 2\pi$ . Dále si uvědomíme, že v intervalu  $(0, 2\pi)$  je  $\cos x - 1 < 0$ . Možná další řešení lze tedy hledat pouze v intervalu  $(\pi, 2\pi)$ , kde je funkce  $\sin x$  záporná. V tomto intervalu platí  $\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$ .

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos x - 1 \\ -\sqrt{1 - \cos^2 x} &= \cos x - 1 \\ 1 - \cos x &= \sqrt{1 - \cos^2 x} \quad /^2 \quad L > 0, \quad P > 0 \\ 1 - 2\cos x + \cos^2 x &= 1 - \cos^2 x \\ 2\cos^2 x - 2\cos x &= 0 \\ \cos x(\cos x - 1) &= 0 \quad / : (\cos x - 1) \neq 0 \\ \cos x &= 0 \\ x &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Výsledek: Rovnice má v intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$  právě 3 řešení ( $x \in \{0; \frac{3\pi}{2}; 2\pi\}$ ).

5. Algebraický tvar komplexního čísla  $z = \frac{1+i}{1+2i}$  je...

$$\frac{1+i}{1+2i} = \frac{1+i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{1-2i+i+2}{1+4} = \frac{3-i}{5}$$

Výsledek:  $z = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$ .

6. Jestliže  $\log_2 y = 3 \log_2 \frac{x-2}{2} - 2 \log_2 \frac{x^2-4}{2}$ , pak číslo  $y$  je rovno...

$$\begin{aligned} \log_2 y &= 3 \log_2 \frac{x-2}{2} - 2 \log_2 \frac{x^2-4}{2} \\ \log_2 y &= \log_2 \frac{\left(\frac{x-2}{2}\right)^3}{\left(\frac{x^2-4}{2}\right)^2} \\ y &= \frac{\left(\frac{x-2}{2}\right)^3}{\left(\frac{x^2-4}{2}\right)^2} = \frac{(x-2)^3}{8} \cdot \frac{4}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{x-2}{2(x+2)^2} \end{aligned}$$

Výsledek:  $y = \frac{x-2}{2(x+2)^2}$ .

7. Jsou dány dvě rekurentní posloupnosti  $(a_n)_{n=1}^\infty$  a  $(b_n)_{n=1}^\infty$  následujícími vztahy:  $a_1 = 3, b_1 = 0$  a pro  $n \geq 2$  platí  $a_n = 2 \cdot a_{n-1}, b_n = b_{n-1} + a_n$ . Určete  $b_{11}$ .

$(a_n)_{n=1}^\infty$  je očividně geometrická posloupnost s kvocientem  $q = 2$ . Lze tedy vyjádřit  $n$ -tý člen pomocí prvního členu a kvocientu  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$ . Z posloupnosti  $(b_n)_{n=1}^\infty$  si postupně začneme vypisovat první členy.

$$\begin{aligned} b_1 &= 0 \\ b_2 &= b_1 + a_2 \\ b_3 &= b_2 + a_3 = b_1 + a_2 + a_3 \\ b_4 &= b_3 + a_4 = b_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &\vdots \\ b_n &= b_1 + \sum_{i=2}^n a_i \end{aligned}$$

$$b_{11} = 0 + \sum_{i=2}^{11} 3 \cdot 2^{i-1} = 3 \cdot \sum_{i=1}^{10} 2^i = 3 \cdot (2^{11} - 2) = 3 \cdot (2048 - 2) = 6138$$

Výsledek:  $b_{11} = 6138$ .

8. Mezi čísla 7 a 22 jsou vložena čtyři čísla tak, že spolu s danými čísly tvoří prvních šest po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti. Součet prvních osmi členů této posloupnosti je...

$$a_1 = 7, a_6 = 22 = a_1 + 5d \Rightarrow d = 3 \Rightarrow a_8 = a_1 + 7d = 7 + 7 \cdot 3 = 28$$

$$s_8 = a_1 + a_2 + \dots + a_8 = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = \frac{7 + 28}{2} \cdot 8 = 140$$

Výsledek:  $s_8 = 140$ .

9. Výraz  $\frac{6x^3b^3}{25y^4} \cdot \frac{15y}{b^2}$  je roven...

Výraz pouze zkrátíme a ošetříme podmínky.

Výsledek:  $\frac{18bx^3}{5y^3}$ , pokud  $y \neq 0 \wedge b \neq 0$ .

10. Graf funkce  $y = \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - x}\right)^2$  je částí...

$$y = \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - x}\right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

Grafem lomené funkce  $\frac{1}{x}$  je hyperbola.

Výsledek: Graf zadané funkce je částí hyperboly.

11. Množinou všech řešení nerovnice  $|x + 5| \geq 4 + |3 - 2x|$  s neznámou  $x \in \mathbb{R}$  je...

| $x \in (-\infty, -5)$        | $x \in (-5, \frac{3}{2})$          | $x \in (\frac{3}{2}, \infty)$ |
|------------------------------|------------------------------------|-------------------------------|
| $-(x + 5) \geq 4 + (3 - 2x)$ | $(x + 5) \geq 4 + (3 - 2x)$        | $(x + 5) \geq 4 - (3 - 2x)$   |
| $-x - 5 \geq 4 + 3 - 2x$     | $x + 5 \geq 4 + 3 - 2x$            | $x + 5 \geq 4 - 3 + 2x$       |
| $x \geq 12$                  | $3x \geq 2$                        | $-x \geq -4$                  |
| $\emptyset$                  | $x \geq \frac{2}{3}$               | $x \leq 4$                    |
| $\emptyset$                  | $x \in (\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$ | $x \in (\frac{3}{2}, 4)$      |

Výsledek:  $x \in (\frac{2}{3}, 4)$ .

12. Směrnice přímk, které procházejí bodem  $A = [0, -5]$  a mají od počátku souřadné soustavy vzdálenost  $\sqrt{5}$ , jsou...

Hledáme přímk, která je tečnou ke kružnici se středem v počátku  $O$  a poloměrem  $\sqrt{5}$  z bodu  $A$  ležícího na ose  $y$ . Situace tedy bude symetrická podle osy  $y$  a směrnice budou mít hodnoty  $\pm k$ . Hledáme tedy pouze přímk s kladnou směrnici. Ta protne osu  $x$  v bodě  $B = [b, 0]$ . Obsah trojúhelníku  $AOB$  lze spočítat pomocí odvěsen jako  $\frac{5 \cdot b}{2}$  nebo také pomocí přepony a výšky  $\frac{|AB| \cdot \sqrt{5}}{2}$ , kde velikost přepony  $|AB| = \sqrt{25 + b^2}$ . Z rovnosti obsahů spočteme  $b$ :

$$\begin{aligned} \frac{5 \cdot b}{2} &= \frac{\sqrt{25 + b^2} \cdot \sqrt{5}}{2} \\ 25b^2 &= (25 + b^2) \cdot 5 \\ 5b^2 &= 25 + b^2 \\ b^2 &= \frac{25}{4} \\ b &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Sice jsme rovnici umocňovali, ale předpokládali jsme, že pracujeme s kladnými čísly a zkuška proto není nutná. Směrnice přímk procházející body  $A = [0, -5]$  a  $B = [\frac{5}{2}, 0]$  je  $k = 5 : \frac{5}{2} = 2$ . Druhý bod  $B' = [-b, 0]$  bude symetrický k bodu  $B$  podle osy  $y$  a směrnice přímk procházející body  $A$  a  $B'$  bude mít hodnotu  $k' = -2$ .

Výsledek: Směrnice hledaných přímk jsou čísla -2 a 2.

13. Jsou dány množiny  $A, B, C$  a  $D$  následovně:  $A = \{1, 2, \dots, 1000\}$ ,  $B = \{x \in A : \frac{x}{6} \in \mathbb{Z}\}$ ,  $C = \{x \in A : \frac{x}{8} \in \mathbb{Z}\}$ ,  $D = \{x \in A : 237 \leq x \leq 356\}$ . Kolik prvků obsahuje množina  $(B \cap C) \cup D$ ? (Množina  $\mathbb{Z}$  je množina celých čísel).

Množina  $B$  obsahuje dělitele 6, množina  $C$  dělitele 8 a jejich průnik  $B \cap C$  dělitele 24. Těch je mezi čísly 1 a 1000 přesně 41. Dále množina  $D$  obsahuje čísla od 237 do 356, tedy 120 prvků.

$$B \cap C = \{24, 48, \dots, 216, 240, 264, 288, 312, 336, 360, \dots, 984\}$$

$$D = \{237, 238, 239, 240, 241, \dots, 355, 356\}$$

Množiny  $(B \cap C)$  a  $D$  mají 5 společných prvků (240, 264, 288, 312, 336) a jejich sjednocení tedy obsahuje  $41 + 120 - 5 = 156$  prvků.

Výsledek: Množina  $(B \cap C) \cup D$  obsahuje 156 prvků.

14. Rovnice  $x^2 - (p + 1)x + 4 = 0$  (s neznámou  $x$ ) nemá reálný kořen právě tehdy, když...  
Kvadratická rovnice nemá žádný reálný kořen právě tehdy, když diskriminant  $D$  je záporný.

$$D = (p + 1)^2 - 4 \cdot 4 = p^2 + 2p - 15 = (p + 5)(p - 3) < 0$$

Výsledek:  $p \in (-5, 3)$ .

15. Kolik znaků Morseovy abecedy lze vytvořit, sestavují-li se tečky a čárky ve skupiny po jedné až pěti?  
Znaky délky jedna až pět sestavujeme ze dvou symbolů (tečka, čárka). Celkový počet  $S$  bude součtem všech takových možností.

$$S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$$

Výsledek: Celkem lze vytvořit 62 znaků.

Správné odpovědi v testu: ceddbacabbedeca