Matematická analýza 1

(osnova ke zkoušce)

1. Reálná čísla. Řešení rovnic a nerovnic (zejména lineární a kvadratické); nevlastní čísla $\pm\infty$, operace s nimi; intervaly, (prstencová) okolí; maximum, minimum, supremum a infimum množiny reálných čísel, jejich existence; princip vnořených intervalů (důkaz).

2. Funkce. Funkce, operace s funkcemi; prostá, vzájemně jednoznačná, inverzní funkce; definiční obor, obor hodnot, graf; omezenost, sudost, lichost, perioda; monotonie, lokální extrémy, extrémy; konvexita, konkavita, inflexní body; elementární funkce: x^a ($a \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$), e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ a k nim inverzní, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, hodnoty goniometrických funkcí v $k\,\frac{\pi}{4}$, $k\,\frac{\pi}{6}$ ($k \in \mathbb{Z}$) a cyklometrických funkcí v odpovídajících bodech.

3. Limity a spojitost. Limita a spojitost funkce; asymptoty; jednoznačnost (důkaz) a monotonie limity, vztah k omezenosti, limita monotónní funkce, limita a spojitost součtu (důkaz), rozdílu, součinu a podílu, složené funkce; jednostranné limity; obor hodnot spojité funkce na intervalu: nabývá mezihodnot, na uzavřeném intervalu nabývá minima i maxima.

4. Derivace. Derivace v bodě, na intervalu, vyšších řádů; linearita derivace, derivace součinu a podílu, složené a inverzní funkce; funkce s vlastní derivací je spojitá (důkaz); Rolleova (důkaz) a Lagrangeova věta, l'Hospitalovo pravidlo, Taylorův polynom, Taylorova věta, tečna a normála grafu funkce; použití derivace při vyšetřování průběhu funkce: monotonie (důkaz), lokálních extrémů, konvexity, inflexních bodů; derivace základních funkcí (mocniny, exp, ln, sin, cos, arctg).

5. Integrály. Primitivní funkce, neurčitý integrál, určitý integrál (Riemannův, Newtonův) a jejich vztahy: primitivní funkce jako integrál s proměnnou mezí, Newtonova–Leibnizova formule (důkaz bez existence limit); nevlastní integrál, kritéria jeho konvergence; monotonie, odhad integrálem z absolutní hodnoty, aditivita na definičním oboru; linearita, integrace per partes, substituce; integrace mocnin, exp, sin, cos, racionálních funkcí, funkcí typu $R(\mathrm{e}^{ax})$, $R(\ln ax)/x$, $R(\sin x, \cos x)$ (jen substituce za $\sin x$ a $\cos x$), kde R je racionální funkce; integrovatelnost monotonní (důkaz) a spojité funkce; aplikace určitého integrálu: střední hodnota, délka křivky, obsah plochy, objem a obsah pláště rotačního tělesa.

6. Posloupnosti a řady. Posloupnost, její limita, vybraná posloupnost, hromadná hodnota a její existence, limes inferior, limes superior. Součet řady, (absolutně) konvergentní, divergentní a oscilující řada; geometrická řada a její součet (důkaz); absolutně konvergentní řada konverguje, lze ji (beze změny součtu) přerovnat a rozdělit; nutná podmínka konvergence (důkaz), kritéria konvergence: srovnávací, podílové (důkaz), odmocninové (důkaz), integrální (důkaz), Leibnizovo.

Matematická analýza 1

(vybrané typy příkladů ke zkoušce)

1. Vyšetřete definiční obor funkce a její limity v hraničních bodech definičního oboru:

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{2^x - 1}\,.$$

Výsledek: $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ neexistuje, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{3}{\ln 2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

2. Vyšetřete definiční obor funkce a její limity v hraničních bodech definičního oboru:

$$f(x) = \frac{\ln(2-x)}{x^2 - 4}\,.$$

Výsledek: $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-2\pm} f(x) = \mp\infty$, $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = +\infty$.

3. Určete asymptoty grafu funkce

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{|x+2|}\,.$$

Výsledek: $x = -2$, $y = -x + 2$ v $-\infty$, $y = x - 2$ v $+\infty$.

4. Určete tečnu a normálu grafu funkce f v bodě $[a, ?]$:

$$f(x) = 2(x-1)^{\cos \pi x} + \sinh(3 - x)\,, \qquad \text{a) } a = \tfrac{1}{4}\,, \quad \text{b) } a = 3\,.$$

Výsledek: a) $\frac{1}{4} \notin D(f)$; b) tečna $y = -\frac{3}{2}\,x + \frac{11}{2}$, normála $y = \frac{2}{3}\,x - 1$.

5. Určete Taylorův polynom řádu 3 funkce f v bodě a:

$$f(x) = \mathrm{e}^{\pi - x} \cos x + 2\,, \qquad a = \pi\,.$$

Výsledek: $1 + (x - \pi) - \frac{1}{3}\,(x - \pi)^3$.

6. Vyšetřete monotonii a lokální extrémy funkce

$$f(x) = (x+1)\,|x-3| + 2\,.$$

Výsledek: rostoucí na $(-\infty, 1\rangle$ a $\langle 3, +\infty)$, klesající na $\langle 1, 3\rangle$, $f(1) = 6$ je lokální maximum, $f(3) = 2$ je lokální minimum.

7. Určete maximum a minimum funkce f na intervalu I:

$$f(x) = x^2 \ln x\,, \qquad I = (0, 1\rangle\,.$$

Výsledek: $\max f = f(1) = 0$, $\min f = f(\mathrm{e}^{-1/2}) = -\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

8. Spočtěte

$$\int_{-2}^{0} (x+2)\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^4 - \tfrac{5}{4}\,.$$

9. Spočtěte
$$\int (2x-3)\sin\tfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x = (-4x+6)\cos\tfrac{x}{2} + 8\sin\tfrac{x}{2} + c\,, \qquad x\in\mathbb{R}\,.$$

10. Spočtěte
$$\int_0^{\pi/2} (3x+2)\cos 2x\,\mathrm{d}x = -\tfrac{3}{2}\,.$$

11. Spočtěte
$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\right)\ln 2x\,\mathrm{d}x = \left(2\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)\ln 2x - 4\sqrt{x} + \frac{1}{x} + c\,, \qquad x\in(0,+\infty)\,.$$

12. Spočtěte
$$\int \frac{4\,\mathrm{e}^{4x} + 6\,\mathrm{e}^{2x} + 6}{\mathrm{e}^{4x} + 2\,\mathrm{e}^{2x} + 3}\,\mathrm{d}x = 2x + \tfrac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{4x} + 2\,\mathrm{e}^{2x} + 3) + c, \qquad x\in\mathbb{R}\,.$$

13. Spočtěte
$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{x\,(\ln^2 x - 2\ln x + 5)}\,\mathrm{d}x = \tfrac{\pi}{4}\,.$$

14. Spočtěte
$$\int_0^{\pi/2} \frac{3(\sin x - 1)\cos x}{\sin^2 x - \sin x - 2}\,\mathrm{d}x = \ln 2\,.$$

15. Spočtěte
$$\int \frac{\sin x\cdot\cos^2 x}{\cos^2 x + 3\cos x + 2}\,\mathrm{d}x = -\cos x + \ln\frac{(\cos x + 2)^4}{\cos x + 1} + c\,, \qquad x\in(-\pi,\pi) + 2k\pi\,, \quad k\in\mathbb{Z}\,.$$

16. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3-k}{k}\right)^{k^2}$.
Výsledek: Konverguje i absolutně (odmocninové kr.: $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{3-k}{k}\right|^k = \lim\limits_{x\to+\infty}\exp\frac{\ln\frac{x-3}{x}}{1/x} \overset{\text{l'H}}{=} \mathrm{e}^{-3} < 1$).

17. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-2)^{3k+1}}{(k-1)!}$.
Výsledek: Konverguje i absolutně (podílové kritérium).

18. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+6k+5}$.
Výsledek: Konverguje i absolutně (integrální kritérium).

19. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\pi}{3k-7}$.
Výsledek: Konverguje (Leibnizovo kr. od $k=3$), ne absolutně (integrální kr. od $k=3$).

20. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-k}{k+2}\right)^k$.
Výsledek: Nekonverguje ani absolutně (neplatí nutná podmínka: $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{-k}{k+2}\right|^k = \lim\limits_{x\to+\infty}\exp\frac{\ln\frac{x}{x+2}}{1/x} \overset{\text{l'H}}{=} \mathrm{e}^{-2} \neq 0$).