Matematika pro telekomunikace a radiotechniku

Prof. RNDr. Jan Hamhalter, CSc.

katedra matematiky FEL ČVUT

e-mail: hamhalte@math.feld.cvut.cz

tel: 224353587

web: http://math.feld.cvut.cz//hamhalte

9. listopadu 2007 19:30

Doporučená literatura

(i) J.Hamhalter, J.Tišer: Funkce komplexní proměnné, ČVUT Praha, 2001.

(ii) J.Veit: Integrální transformace, XIV sešit MVŠT, SNTL, Praha 1979.

(iii) E.Krajník: Základy maticového počtu, ČVUT Praha 2006.

(iv) M.Dont: Uvod do parciálních diferenciálních rovnic, ČVUT Praha 1998.

1 Funkce komplexní proměnné (opakování)

$\mathbb{C}$ … komplexní rovina

$$z = x + j\,y$$

$$j^2 = -1$$

základní komplexní funkce:

$$\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\
\sin z &= \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \\
\cos z &= \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \\
\operatorname{Log} z &= \ln|z| + j\,(\arg z + 2k\pi)\,,\, z \neq 0\,,\, k \in \mathbb{Z}\,. \\
& \arg z \in (-\pi, \pi > \ . \\
& \text{víceznačná funkce}
\end{aligned}$$

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina. Funkce f je <u>holomorfní</u> na G existuje-li $f'(z)$ ve všech bodech $z \in G$.

$C \subset \mathbb{C}$ ... křivka s parametrizací

$$\varphi(t) :< a, b > \to C\,.$$

Jordanova křivka je neprotínající se uzavřená křivka C. Rozděluje komplexní rovinu na vnitřní oblast $Int\, C$ a vnější oblast $Ext\, C$.

Otevřená množina $G \subset \mathbb{C}$ se nazývá *oblast*, jestliže každé dva body v G můžeme spojit křivkou ležící v G.

Oblast $G \subset \mathbb{C}$ se nazývá *jednoduše souvislá*, jestliže $Int\, C \subset G$ pro každou Jordanovu křivku C ležící v G.

Křivkový integrál

Pro funkci f definovanou na křivce C definujeme křivkový integrál

$$\int_C f(z)\, d\, z = \int_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt\,.$$

(závisí pouze na orientaci křivky)

Nechť f je holomorfní funkce na jednoduše souvislé oblasti $G \subset \mathbb{C}$ a C je Jordanova křivka ležící v G. Pak

(i) $$\int_C f(z)\, d\, z = 0$$

(Cauchyova věta)

(ii) $$f(z_0) = \frac{1}{2\,\pi j} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, d\, z$$

pro každé z_0 ve vnitřní oblasti křivky C.

(Cauchyův vzorec)

Laurentova řada

$$\underbrace{\cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0}}_{\text{hlavní část}} + \underbrace{a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots}_{\text{regulární část}}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

se středem v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$;

$$\underbrace{\cdots + a_{-2}z^2 + a_{-1}z}_{\text{hlavní část}} + \underbrace{a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots}_{\text{regulární část}}$$

se středem v bodě ∞.

Laurentovy řady konvergují v mezikruží.

$$P(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\},$$

$0 \leq r \leq R \leq \infty$.

Rozvoj holomorfní funkce v Laurentovu řadu

Nechť f je holomorfní funkce v mezikruží $P(z_0, r, R)$. Pak

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, d\, z \quad n = 0, \pm 1, \dots,$$

kde C je libovolná kladně orientovaná Jordanova křivka ležící v daném mezikruží a obsahující bod z_0 ve své vnitřní oblasti.

Izolovaný singulární bod funkce $f(z)$ je bod z_0, pro který platí

(i) Funkce f není definovaná v bodě z_0.

(ii) Existuje prstencové okolí bodu z_0, ve kterém je funkce f holomorfní.

Klasifikace izolovaných singulárních bodů:

(i) *Odstranitelná singularita*
(existuje vlastní limita v bodě z_0, Laurentova řada má pouze regulární část)

(ii) *Pól*
($\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$, Laurentova řada má konečnou hlavní část)
Řád pólu je největší přirozené číslo k takové že $a_{-k} \neq 0$ v Laurentově rozvoji funkce f se středem v bodě z_0.

(iii) *Podstatná singularita*
(neexistuje limita v daném bodě).

reziduum funkce

Je-li z_0 singulární bod funkce f, pak *reziduum* $\operatorname{res}_{z_0} f$ funkce f v bodě z_0 je definováno vztahem

$$\operatorname{res}_{z_0} f = a_{-1}\,,$$

kde a_{-1} je koeficient v Laurentově rozvoji funkce f v bodě z_0.

Je-li singularita ∞, definujeme

$$\operatorname{res}_{z_0} f = -a_1\,,$$

kde a_1 je koeficient v Laurentově rozvoji funkce f v bodě ∞.

Některé vzorce pro výpočet rezidua:

- z_0 je pól řádu k:

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \left[(z - z_0)^k f(z) \right]^{(k-1)} .$$

- f, g jsou holomorfní, z_0 je jednoduchý kořen funkce $g(z)$:

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} .$$

- f je holomorfní, g má jednoduchý pól v z_0:

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) g(z) = f(z_0) \operatorname{res}_{z_0} g(z) .$$

Reziduová věta
Předpokládejme, že funkce f má derivaci ve všech bodech jednoduše souvislé oblasti $G \subset \mathbb{C}$ kromě bodů $z_1, \dots, z_k$. Je-li C kladně orientovaná Jordanova křivka ležící v G a obsahující body $z_1, \dots, z_k$ ve své vnitřní oblasti, pak

$$\int_C f(z)\, d\, z = 2\pi j (\operatorname{res}_{z_1} f(z) + \cdots + \operatorname{res}_{z_k} f(z)) \, .$$

aplikace: výpočet neurčitých integrálů, teorie rovinného vektorového pole

2 Fourierovy řady (opakování a doplnění)

zpracování periodické funkce, spektrální rozklad

<u>předpoklady</u>

(i) $f(t) :< a, a+T > \rightarrow \mathbb{C}\,,$

nebo f je periodická funkce s periodou T.

(ii) f je integrovatelná tj.

$$\int_a^{a+T} |f(t)|\, dt < \infty\,.$$

Fourierova řada v komplexním tvaru funkce f je řada

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} = \\ &\cdots + c_{-2}e^{-2j\omega t} + c_{-1}e^{-j\omega t} + c_0 + c_1 e^{j\omega t} + c_2 e^{2j\omega t} + \cdots \end{aligned}}$$

kde

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\,, \qquad c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt\,.$$

<u>Fourierovy koeficienty funkce</u> f, c_n, ($n \in \mathbb{Z}$) "poměřují" $f(t)$ s periodickým pohybem $e^{jn\omega t}$, tj. násobnými harmonickými kmitočty a to pomocí skalárního součinu.

skalární součin pro funkce:

$$(f, g) = \int_a^{a+T} f(t)\overline{g(t)}\, dt\,.$$

V tomto značení:

$$c_n = (f(t), \frac{1}{T} e^{jn\omega t})\,.$$

Schwarzova nerovnost:
Je-li $\int_a^{a+T} |f(t)|^2\,dt < \infty$ a $\int_a^{a+T} |g(t)|^2\,dt < \infty$, pak

$$\left|\int_a^{a+T} f(t)\overline{g(t)}\,dt\right| \leq \sqrt{\int_a^{a+T} |f(t)|^2\,dt} \cdot \sqrt{\int_a^{a+T} |g(t)|^2\,dt}\,.$$

Přitom v předchozí nerovnosti *nastává rovnost* pravě tehdy když jsou f a g lineárně závislé (tj. jedna funkce je komplexním násobkem druhé).

Při značení $\|f\| = \sqrt{\int_a^{a+T} |f(t)|^2\,dt}$ (norma f) můžeme Schwarzovu nerovnost psát

$$|(f,g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|\,.$$

Pro c_n to znamená

$$|c_n| \leq \|f\| \cdot \|\frac{1}{T}e^{jn\omega t}\| = \|f\|\frac{1}{\sqrt{T}}\,.$$

Schwarzova nerovnost aplikována na c_n implikuje ekvivalenci následujících tvrzení:

(i) f má maximální korelaci s $\frac{1}{T}e^{jn\omega t}$

(ii) $f(t) = c\, e^{jn\omega t}$, kde $c \in \mathbb{C}$

(iii) Fourierova řada funkce f má pouze jeden člen $c_n\, e^{jn\omega t}$ (f je čistá frekvence)

<u>Důkaz Schwarzovy nerovnosti:</u>

1)

$$\left| \int_a^{a+T} f(t)\overline{g(t)}\, dt \right| \leq \int_a^{a+T} |f(t)| \cdot |g(t)|\, dt$$

Stačí tedy uvažovat pouze reálné nezáporné funkce.

2) dokazovaná rovnost je ekvivalentní rovnosti

$$\left| \left(\frac{f}{\|f\|}, \frac{g}{\|g\|} \right) \right| \leq 1\,.$$

Stačí tedy uvažovat pouze nezáporné funkce s

$$\int_a^{a+T} |f(t)|^2\, dt = \int_a^{a+T} |g(t)|^2\, dt = 1\,.$$

3) Pro takovéto funkce:

$$\int_a^{a+T} f(t)g(t)\, dt \;\leq\; \int_a^{a+T} \frac{1}{2}(f(t)^2 + g(t)^2)\, dt \;=\; 1\,.$$

Princip: Spojité funkce integrovatelné s kvadrátem se stejnými Fourierovými koeficienty jsou stejné. Fourierovy koeficienty kódují funkce, charakterizují je ve frekvenční oblasti.

Důkaz tohoto faktu je obtížnější.

Kdy je f reálná funkce ?

f je reálná funkce právě tehdy když $c_{-n} = \overline{c_n}$ pro všechna $n \in \mathbb{C}$.

Důkaz: 1) $f(t)$ je reálné:

$$\begin{aligned} c_n &= \int_a^{a+T} f(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt = \int_a^{a+T} f(t)\, \cos n\omega t\, dt \\ &\quad -j \int_a^{a+T} f(t) \sin n\omega t\, dt \\ c_{-n} &= \int_a^{a+T} f(t)\, e^{jn\omega t}\, dt = \int_a^{a+T} f(t) \cos n\omega t\, dt \\ &\quad +j \int_a^{a+T} f(t) \sin n\omega t\, dt \end{aligned}$$

a tedy $c_{-n} = \overline{c_n}$.

2) Předpokládejme, že $c_{-n} = \overline{c_n}$ a ukažme, že $f = \overline{f}$.

Spočítáme koeficienty pro $\overline{f}$:

$$\int_a^{a+T} \overline{f(t)} e^{-jn\omega t}\, dt = \overline{\int_a^{a+T} f(t)\, e^{jn\,\omega t}\, dt} =$$
$$= \overline{c_{-n}} = c_n \,.$$

Tedy f a $\overline{f}$ mají stejné koeficienty a můžeme použít Princip.

Je-li f reálná funkce můžeme sloučit dva komplexně sdružené členy dohromady a dostat tak čistě reálnou řadu:

$n \geq 1$

$$c_n\, e^{jn\omega t} + c_{-n}\, e^{-jn\omega t} =$$
$$c_n(\cos n\omega t + j \sin n\omega t) + c_{-n}\, (\cos n\omega t - j \sin n\omega t) =$$
$$= (c_n + c_{-n})\, \cos n\omega t + (j\, c_n - j c_{-n})\, \sin n\omega t =$$
$$= 2\,\mathrm{Re}\, c_n \cos n\omega t - 2\,\mathrm{Im}\, c_n \sin n\omega t \,.$$

Označme

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2\,\mathrm{Re}\,c_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos n\omega t\,dt \\
b_n &= -2\,\mathrm{Im}\,c_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin n\omega t\,dt
\end{aligned}
$$

kosínově-sínový tvar:

$$
\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\,,
$$

Amplituda:

$$
A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\,.
$$

Transformační vztahy mezi koeficienty:

$n \geq 1$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \quad 2\ \mathrm{Re}\,c_n & \qquad c_n &= \frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2} \\
b_n &= -2\ \mathrm{Im}\,c_n\,. & \qquad c_{-n} &= \frac{a_n}{2} + j\frac{b_n}{2}
\end{aligned}
$$

Důležité je, že Fourierovy koeficienty umožní zrekonstruovat funkci (jsou vlastně souřadnicemi vůči nekonečné bázi).
V některých případech je funkce přímo rovna součtu své Fourierovy řady.

Je-li reálná funkce $f(t)$ s periodou T po částech spojitá a má po částech spojitou derivaci, pak

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \,,$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Souvislost Laurentovy a Fourierovy řady:

Nechť $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, je goniometrická funkce

$$f(t) = R(\cos t, \sin t),$$

kde $R\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ je racionální funkce ve dvou proměnných, tedy podíl dvou polynomů ve dvou proměnných, který je definován pro každou dvojici $(\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$.

K aplikaci Laurentových řad pro výpočet Fourierovy řady vede formální podobnost Laurentovy řady s komplexním tvarem Fourierovy řady. Pokusíme se využít Eulerovu identitu $e^{jt} = \cos t + j \sin t, t \in \mathbb{R}$, ze které plyne, že pro $z = e^{jt}$ platí

$$\cos t = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$$
$$\sin t = \frac{z - \frac{1}{z}}{2j} = \frac{z^2 - 1}{2jz}.$$

Definujeme-li tedy komplexní funkci

$$\tilde{f}(z) = R\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2jz}\right),$$

dostáváme racionální funkci komplexní proměnné, pro kterou platí

$$\tilde{f}(e^{jt}) = R(\cos t, \sin t),\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Jinými slovy, $\tilde{f}$ nabývá v odpovídajících bodech na jednotkové kružnici C hodnotu $f(t)$. Funkce $\tilde{f}$ je holomorfní v jistém mezikruží obsahujícím C. Rozviňme v tomto mezikruží funkci $\tilde{f}$ v Laurentovu řadu se středem v počátku:

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Dosazením $z = e^{jt}$ máme

$$R(\cos t, \sin t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnt}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Vidíme tedy, že koeficienty Laurentova rozvoje funkce $\tilde{f}$ jsou současně koeficienty komplexní Fourierovy řady funkce f. Tato metoda umožňuje často pohodlnější výpočet než je výpočet koeficientů c_n pomocí integrálního vzorce.

Úloha: Pomocí Laurentovy řady nalezněte Fourierovu řadu funkce

$$f(t) = \frac{1}{2 + \cos t}.$$

Řešení: Funkce $f(t)$ vyhovuje předpokladům předešlé úlohy. Spočítáme si nejdříve

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2 + \frac{z^2+1}{2z}} = \frac{2z}{z^2 + 4z + 1}.$$

Funkce $\tilde{f}(z)$ je racionální funkce s nulovými body jmenovatele $z_1 = -2 + \sqrt{3}$, $z_2 = -2 - \sqrt{3}$.
Budeme hledat Laurentův rozvoj funkce $\tilde{f}$ v mezikruží obsahující jednotkový kruh, tedy v oblasti dané nerovnicemi

$$|z_1| = 2 - \sqrt{3} < |z| < |z_2| = 2 + \sqrt{3}\,.$$

Rozklad na částečné zlomky má tvar

$$\tilde{f}(z) = \frac{A}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2},$$

kde

$$A = \frac{-2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}, \qquad B = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Laurentovy rozvoje parciálních zlomků jsou

$$\frac{A}{z-z_1} = \frac{A}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{z_1}{z}} = A\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{z^{n+1}},$$

$|z| > |z_1|$

$$\frac{B}{z-z_2} = B\frac{1}{z_2}\frac{1}{\frac{z}{z_2}-1} = -B\frac{1}{z_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{z_2^n} =$$

$$= -B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{z_2^{n+1}}\,,$$

$|z| < |z_2|$

Platí tedy

$$f\tilde{(}z) = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^n}{z^{n+1}} - B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{z_2^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

$$|z_1| < |z| < |z_2|,$$

kde

$$c_0 = -\frac{B}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

a pro $n \geq 1$

$$c_n = -\frac{B}{z_2^{n+1}} = -\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{(-2-\sqrt{3})^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{(-2-\sqrt{3})^n},$$

$$c_{-n} = Az_1^{n-1} = \frac{-2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}(-2+\sqrt{3})^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-2+\sqrt{3})^n.$$

V tomto konkrétním případě jsou c_n reálné a $c_n = c_{-n}$.

Vrátíme se nyní k funkci $f(t)$.

$$f(t) = \tilde{f}(e^{jt}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnt} =$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(e^{jnt} + e^{-jnt}) =$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\, c_n \cos nt.$$

Po dosazení numerických hodnot

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} (-2+\sqrt{3})^n \cos nt.$$

3 Fourierova transformace

motivace: spektrální rozklad obecné neperiodické funkce, nediskrétní škála frekvencí, koreluje funkci s harmonickými funkcemi $g(t) = e^{j\omega t}$, $\omega \in \mathbb{R}$.

3.1. Definice. Nechť $f(t)$ je komplexní funkce definovaná na $\mathbb{R}$. Funkce

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jpt} \, dt \, .$$

se nazývá *Fourierova transformace funkce* f.

Funkce

$$\check{f}(p) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{jpt} \, dt \, .$$

se nazývá *inverzní Fourierova transformace funkce* f.

(Za definiční obor se považuje množina všech p, pro které existují příslušné integrály.)

Konvence:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dt = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(t) \, dt \, .$$

Poznámka:

$$\hat{f}(p) = 2\pi\, \check{f}(-p)$$

Značení a terminologie: $F : f \to \hat{f}$, $F^{-1} : f \to \check{f}$

Fourierova transformace a inverzní Fourierova transformace.

Ff, $f(t) \doteq \hat{f}(p)$, $F\{f(t)\} = \hat{f}(p)\,.$

Postačující podmínka pro existenci Fourierovy transformace:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty\,.$$

Pak totiž:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)\, e^{-jpt}|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty\,.$$

Značení:

$$L^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,|\, \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty\}\,.$$

Je-li $f \in L^1(\mathbb{R})$, pak $\hat{f}$ a $\check{f}$ jsou vždy definovány na celém $\mathbb{R}$.

3.2. Příklad. Obraz bránové funkce

$$f_a(t) = \begin{cases} 1 & t \in < -a, a > \\ 0 & \textsf{jinde} \end{cases}$$

$a > 0$

$$\hat{f}_a(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(t)\, e^{-jpt}\, dt = \int_{-a}^{a} e^{-jpt}\, dt$$

$$= \left[\frac{e^{-jpt}}{-jp}\right]_{t=-a}^{t=a} = \frac{e^{jap} - e^{-jap}}{jp} = 2\frac{\sin ap}{p}$$

3.3. Příklad.

$$\check{f}_a(p) = \frac{1}{2\,\pi}\hat{f}_a(-p) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(-ap)}{-p} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin ap}{p}$$

3.4. Příklad. Obraz gaussovské funkce

$$f(t) = e^{-at^2}\,, \qquad a > 0\,.$$

Vychází z Laplaceova integrálu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}\,.$$

Po substituci

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\,.$$

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2 - jpt}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t+\frac{jp}{2a})^2 - \frac{p^2}{4a}}\,dt\,.$$

Substituce:

$$u = t + \frac{jp}{2a}\,.$$

$$= e^{-\frac{p^2}{4a}} \int_{-\infty+\frac{jp}{2a}}^{\infty+\frac{jp}{2a}} e^{-au^2}\,du = e^{-\frac{p^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2}\,du =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\frac{p^2}{4a}}$$

Nezávislost na integrační cestě je delikátní záležitost:

$p > 0$

C_R:

kladně orientovaný obdélník s vrcholy

$$(-R, 0), (R, 0), (R, j\frac{p}{2a}), (-R, j\frac{p}{2a})$$

Podle Cauchyovy věty:

$$\int_C e^{-az^2}\, d\, z = 0\,. \qquad (1)$$

C_2 ... pravá vertikální úsečka, má parametrizaci:

$$\varphi(t) = R + jt \qquad t \in < 0, \frac{p}{2a} > \ .$$

Odhadneme velikost funkce e^{-az^2} na této úsečce.

$$|e^{-a(R+tj)^2}| = |e^{-a\,R^2 - 2aRjt + a\,t^2}| = e^{-aR^2} e^{at^2}$$
$$\leq e^{-aR^2} e^{a(\frac{p}{2a})^2}\,.$$

Odtud

$$\left|\int_{C_2} e^{-a\,z^2}\, dz\right| \leq \frac{p}{2a} e^{-aR^2} e^{a(\frac{p}{2a})^2} \to 0 \qquad \text{pro } R \to \infty\,.$$

a obdobně

$$\int_{C_4} e^{-a\,z^2}\,dz \to 0 \qquad \text{pro } R \to \infty\,.$$

Rozepsáním (1) na úsečky máme

$$\int_{C_1} e^{-a\,z^2}\,dz + \int_{C_2} e^{-a\,z^2}\,dz + \\ + \int_{C_3} e^{-a\,z^2}\,dz + \int_{C_4} e^{-a\,z^2}\,dz = 0\,.$$

Limitním přechodem $R \to \infty$ dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-az^2}\,dz - \int_{-\infty+\frac{p}{2a}\,j}^{\infty+\frac{p}{2a}\,j} e^{-az^2}\,dz = 0\,.$$

Dosud byl obraz i vzor reálná funkce. Toto nastává pouze v symetrických případech.

3.5. Příklad. Vybíjení kondenzátoru:

$\alpha > 0$

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\hat{f}(p) = \int_0^\infty e^{-\alpha\, t}\, e^{-jpt}\, dt = \int_0^\infty e^{-(\alpha+jp)t}\, dt = \\ = \left[\frac{-1}{\alpha+jp} e^{-(\alpha+jp)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha+jp}\,.$$

Aplikace reziduové věty (viz skripta)

Předpoklady: P a Q jsou polynomy, $stQ > stP$ a Q nemá reálné kořeny

Pak

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\, e^{jt}\, dt = 2\pi j \sum_{\substack{\{z \mid Q(z)=0\,, \\ \operatorname{Im} z>0\}}} \operatorname{res}_z \left(\frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{jz} \right)}$$

Při výpočtu Fourierovy transformace racionální funkce $\frac{P(t)}{Q(t)}$ potřebujeme integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\, e^{-jpt}\, dt$$

Ten se dá substitucí převést na integrál výše:

Substituce pro $p \neq 0$:

$u = -pt$, $du = -p\, dt$.

Pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\, e^{-jpt}\, dt \qquad = \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(-\frac{u}{p})}{Q(-\frac{u}{p})}\, e^{ju}\, \frac{du}{|p|}$$

Označíme-li

$$R(z) = \frac{P(-\frac{z}{p})}{Q(-\frac{z}{p})}$$

máme:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\, e^{-jpt}\, dt = \frac{2\pi j}{|p|} \sum_{\substack{\{z|\, Q(-z/p)=0\,, \\ \operatorname{Im} z>0\}}} \operatorname{res}_z R(z) e^{jz}\,.$$

3.6. Příklad. $\qquad f(t) = \dfrac{1}{t^2+1}\,.$

$p \neq 0$

$$R(z) = \frac{1}{\frac{z^2}{(-p)^2}+1} = \frac{p^2}{z^2+p^2}\,.$$

$$\hat{f}(p) = \frac{2\pi j}{|p|} \operatorname{res}_{j|p|} \frac{p^2}{z^2+p^2} e^{jz} = \frac{2\pi j\, p^2}{|p|} \cdot \frac{e^{-|p|}}{2j|p|} = \pi e^{-|p|}\,.$$

Pro $p = 0$ dopočítáme ze spojitosti obrazu, nebo z definice:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1}\, dt = [\mathsf{arctg}\, t]_{-\infty}^{\infty} = \pi\,.$$

Zásadní je věta o inverzní Fourierově transformaci:

3.7. Věta.
Věta o inverzní Fourierově transformaci
Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(i) *Je-li* f *spojitá na* $\mathbb{R}$ *a* $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ *pak*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p)\, e^{jpt}\, dp$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

(ii) *Je-li* f *a* f' *po částech spojitá funkce na* $\mathbb{R}$ *pak*

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p)\, e^{jpt}\, dp$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Význam:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_n$

aproximující součty tohoto integrálu:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \hat{f}(\omega_i)(\omega_{i+1} - \omega_i)\, e^{j\omega_i t}$$

jsou kombinací harmonických funkcí $\omega_i(t) = e^{j\omega_i t}$.

$|\hat{f}(\omega)|$ udává amplitudu.

3.8. Důsledek. *Dvě spojité funkce z $L^1(\mathbb{R})$ jsou stejné, mají-li stejnou Fourierovu transformaci.*

Důkaz: $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ spojité $\hat{f} = \hat{g}$. Pro $h = f - g$ máme

$$\hat{h} = 0\,,$$

a tedy $h = 0$

3.9. Příklad.

$$g(t) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\,\frac{\sin p}{p}\, e^{j\,pt}\, dp.$$

Podle Příkladu 3.2 máme

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } t \in (-1, 1) \\ 1/2 & \text{je-li } t = 1, -1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Jinými slovy inverzní obraz funkce $h(p) = 2\,\frac{\sin p}{p}$ je funkce $g(t)$.

3.10. Tvrzení.
Základní gramatika Fourierovy transformace

(i) $F\{f(t-a)\} = e^{-jpa}\,\hat{f}(p)$
(posun ve vzoru)

(ii) $F\{f(at)\} = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{p}{a})\,,\, a \neq 0$
(změna měřítka, scaling)

(iii) $F\{\overline{f(-t)}\} = \overline{\hat{f}(p)}$
(pravidlo konjugace)

(iv) $F\{e^{jat}f(t)\} = \hat{f}(p-a)$
(posun obrazu, modulace vzoru)

Důkaz:

(i) $F\{f(t-a)\} = e^{-jpa}\,\hat{f}(p)$:

$$F\{f(t-a)\}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)\,e^{-jpt}\,dt$$

Substituce

$$u = t - a$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-jp(u+a)}\,du = e^{-jpa}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-jpu}\,du =$$
$$= e^{-jpa}\,\hat{f}(p)\,.$$

(ii)

$$F\{f(at)\}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)\, e^{-jpt}\, dt =$$

$$\text{substituce } u = a\,t\,, \quad du = a\,dt$$

$$= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-jp\frac{u}{a}}\, du = \frac{1}{|a|}\, \hat{f}(\frac{p}{a})\,.$$

(iii)

$$F\{\overline{f(-t)}\}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-t)}\, e^{-jpt}\, dt =$$

$$\text{substituce } u = -t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)}\, e^{jpu}\, du = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(u)\, e^{-jpu}}\, du =$$

$$= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-jpu}\, du} = \overline{\hat{f}(p)}\,.$$

(iv)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{jat}\, e^{-jpt}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j(p-a)\,t}\, dt = \hat{f}(p-a)\,.$$

3.11. Příklad. $e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2} \doteq e^{-jp}\sqrt{2\,\pi}\, e^{-\frac{1}{2}\,p^2}$

3.12. Příklad.

$$\sin t\, e^{-t^2} = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2\,j}\, e^{-t^2} \doteq$$

$$\doteq \frac{1}{2\,j}\sqrt{\pi}\left[e^{-\frac{(p-1)^2}{4}} - e^{-\frac{(p+1)^2}{4}}\right]$$

3.13. Příklad. Předpokládejme, že platí věta o inverzní Fourierově transformaci. Jaké reálné funkce mají reálný Fourierův obraz ?

Řešení: $\hat{f}(p) = \overline{\hat{f}(p)}$ a tedy $f(-t) = f(t)$. Jsou to pouze sudé funkce.

3.14. Příklad. Nalezněte obraz funkce $g(t) = f(2t-3)$ pomocí obrazu funkce $f(t)$.

Řešení:

$$\begin{array}{ccc} f(t) \rightarrow & f(t-3) \rightarrow & f(2t-3) \\ \hat{f}(p) \rightarrow & e^{-3j\,p}\hat{f}(p) \rightarrow & \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}jp}\hat{f}(\frac{p}{2}) \end{array}$$

3.15. Lema. Riemannovo-Lebesgueovo lemma
Je-li $f \in L^1(\mathbb{R})$, *pak* $\hat{f}$ *je spojitá funkce a*

$$\lim_{p \to \pm\infty} \hat{f}(p) = 0\,.$$

3.16. Věta. Obraz derivace
Nechť $f(t)$ *je spojitě diferencovatelná funkce a* $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$. *Pak*

$$\boxed{F\{f'(t)\}(p) = jp\,\hat{f}(p)\,.}$$

Důkaz:
$f' \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \int_0^\infty f'(t)\,dt = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0)\,.$
Tedy existuje limita $\lim_{t\to\pm\infty} f(t)$. Tato limita musí být nula neboť $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Nyní použijeme metodu per-partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, e^{-jp\,t}\, dt =$$

$$\left[f(t)\, e^{-j\,p\,t} \right]_{t=-\infty}^{t=\infty} + j\,p \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-jp\,t}\, dt =$$

$$= j\,p\,\hat{f}(p)\,.$$

3.17. Příklad. $f(t) = e^{-a\,t^2}$, $a > 0$. Pak

$$f'(t) = -2\,a\,t\,e^{-a\,t^2} \doteq j\,p\,\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{p^2}{4a}}\,.$$

Důsledek:

$f, f', \ldots, f^{(k)}$ spojité funkce z $L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow$

$$f^{(k)}(t) \doteq (j\,p)^k\,\hat{f}(p)$$

a dle Riemannova-Lebesgueova lemmatu

$$\lim_{|p|\to\infty} p^k \hat{f}(p) \to 0\,.$$

- Aplikace pro řešení diferenciálních rovnic

3.18. Věta. Derivace obrazu
Nechť $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ *a* $t f(t) \in L^1(\mathbb{R})$. *Pak*

$$\boxed{F\{t\, f(t)\}(p) = j\, \frac{d}{dp}\hat{f}(p)\,.}$$

Je možno ukázat korektnost derivace za integračním znamením.

3.19. Příklad. Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$f(t) = t\, e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Řešení:

$$t\, e^{-\frac{t^2}{2}} \doteq j\frac{d}{dp}\sqrt{2\pi}\, e^{\frac{-p^2}{2}} = -j\sqrt{2\pi}\, p\, e^{-\frac{p^2}{2}}\,.$$

Konvoluce je operace na množině integrovatelných funkcí. Motivace: Co odpovídá ve Fourierově transformaci součinu funkcí?

3.20. Definice. Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. *Konvoluce* funkcí f a g je funkce $h = f * g$ daná vztahem

$$\boxed{(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)\,ds\,.}$$

3.21. Příklad. $h = f_a * f_a$, kde f_a je bránová funkce.

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(s)\,f_a(t-s)\,ds\,.$$

Integrujeme 1 přes průnik intervalů

$$< -a, a > \cap < t-a, t+a > \ .$$

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < -2a \\ t + 2a & t \in < -2a, 0 > \\ 2\,a - t & t \in < 0, 2\,a > \\ 0 & t > 2\,a \end{cases}$$

3.22. Věta. Obraz konvoluce
Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. *Pak pro* $h = f * g$ *platí*

$$\hat{h}(p) = \hat{f}(p)\, \hat{g}(p)\,.$$

Důkaz: Založen na záměně pořadí integrace

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, g(t-s)\, ds\right)}^{h(t)} e^{-jp\,t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-s)\, e^{-j\,p\,(t-s)}\, dt\right)}_{\text{posun } u=t-s} f(s)\, e^{-j\,p\,s}\, ds =$$

$$= \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, e^{-jp\,u}\, du\right)}_{\hat{g}(p)} \cdot \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, e^{-jp\,s}\, ds\right)}_{\hat{f}(p)}$$

3.23. Příklad. Trojúhelník:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < -2a \\ t + 2a & t \in < -2a, 0 > \\ 2\,a - t & t \in < 0, 2\,a > \\ 0 & t > 2\,a \end{cases}$$

Platí $f(t) = f_a(t) * f_a(t)$
Podle věty o obrazu konvoluce:

$$\hat{f}(p) = \left(2\,\frac{\sin ap}{p}\right)^2 = \frac{4\sin^2 ap}{p^2}\,.$$

3.24. Důsledek. *Za předpokladu, že funkce* $f(t)$, $g(t)$, $f(t)\,g(t)$, $\hat{f}(p)$, $\hat{g}(p)$ *jsou v* $L^1(\mathbb{R})$ *platí*

$$f(t)g(t) \doteq 2\pi(\hat{f} * \hat{g})(-p)\,.$$

Souvislost Fourierovy transformace a Fourierovy řady

Předpokládejme, že $f(t)$ je periodická funkce s periodou $T > 0$ taková, že

$$\int_a^{a+T} |f(t)|\, dt < \infty\,.$$

Označme $\mathbf{1}_{<a,a+T>}$ charakteristickou funkci intervalu $< a, a + T >$ a

$$f_T = \mathbf{1}_{<a,a+T>} \cdot f(t)\,.$$

Pro Fourierův koeficient, c_n, funkce $f(t)$ platí

$$c_n \quad = \quad \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt \quad = \quad \frac{1}{T}\,\hat{f}_T(n\omega)$$

3.25. Příklad. Mějme trojúhelníkové impulsy dané příkladem 3.23. Perioda je $4a$. Pak

$$\hat{f}_T(p) = \left(2\,\frac{\sin ap}{p}\right)^2 = \frac{4\sin^2 ap}{p^2}\,.$$

$n \neq 0$

$\omega = \frac{2\pi}{4a} = \frac{\pi}{2a}$

$$c_n = \frac{1}{4a}\hat{f}_T\left(\frac{2\pi}{4a}n\right) = \frac{1}{4a}\frac{4\sin^2(a\frac{2\pi}{4a}n)}{(\frac{2\pi}{4a}n)^2} =$$

$$= \frac{4a}{\pi^2}\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}n)}{n^2}\,.$$

$$\sin^2(\frac{\pi}{2}n) = \begin{cases} 0 & n \text{ sudé} \\ 1 & n \text{ liché} \end{cases}$$

$$c_0 = \frac{1}{4a}\hat{f}_T(0) = \frac{1}{4a}\cdot 4a^2 = a\,.$$

Fourierova transformace je základem oborů:

- teorie signálů
- harmonická analýza
- kvantová mechanika
- waveletová analýza
- parciální diferenciální rovnice
- atd.

4 Laplaceova transformace

1. Přímá Laplaceova transformace v komplexním oboru

4.1. Definice. Předpokládejme, že $f(t)$ je komplexní funkce definovaná na intervalu $< 0, \infty)$. *Laplaceova transformace* funkce f je komplexní funkce $F(p)$ daná vztahem

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-p\,t}\, dt\,.$$

Za definiční obor Laplaceova obrazu považujeme množinu všech komplexních p s $\operatorname{Re} p > 0$, pro která existuje výše uvedený integrál.

Konvence:

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0\,. \end{cases}$$

Často ztotožňujeme f a $\mathbf{1}(t) f(t)$.

Značení: $F = \mathcal{L} f$, $f \doteq F$, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$
Přímá Laplaceova transformace je zobrazení $f \to \mathcal{L} f$.

4.2. Definice. Funkce $f(t)$ definovaná na kladné části reálné osy se nazývá *funkce třídy* $\mathcal{L}_0$ (též *předmět standardního typu*), jestliže

(i) f je po částech spojitá,

(ii) f je nejvýše exponenciálního růstu, tj. existují konstanty $a, M \geq 0$ tak, že

$$|f(t)| \leq M\, e^{a\,t} \qquad \text{pro všechna } t \geq 0\,.$$

• Příklady funkcí třídy $\mathcal{L}_0$: omezené po částech spojité funkce, polynomy, kvazipolynomy (součiny polynomů a exponenciálních funkcí).

• Laplaceova transformace je definována pro širší třídu funkcí než transformace Fourierova.

• absolutní hodnota komplexní exponenciální funkce e^z:

$$|e^z| = |e^{\mathrm{Re}\, z} \cdot e^{j\, \mathrm{Im}\, z}| = |e^{\mathrm{Re}\, z}| \cdot |e^{j\, \mathrm{Im}\, z}| = e^{\mathrm{Re}\, z}\,.$$

4.3. Příklad. $f(t) = e^{(1+j)\,t}\,.$

$$F(p) = \int_0^\infty e^{(1+j)\,t} e^{-p\,t}\,dt = \int_0^\infty e^{(1+j-p)\,t}\,dt = \\ = \left[\frac{e^{(1+j-p)\,t}}{1+j-p}\right]_0^\infty .$$

Vzhledem k tomu, že

$$|e^{(1+j-p)\,t}| = e^{(1-\mathrm{Re}\, p)\,t}$$

limita v ∞ existuje (a je rovna nule) právě když $\mathrm{Re}\, p > 1$. Tedy

$$F(p) = \frac{1}{p-1-j} \qquad \mathrm{Re}\, p > 1\,.$$

Zobecnění: Pro $a \in \mathbb{C}$.

$$\boxed{e^{a\,t} \doteq \frac{1}{p-a}} \qquad \mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, a$$

4.4. Věta. *Předpokládejme, že $f(t) \in \mathcal{L}_0$ má Laplaceův obraz $F(p)$. Pak platí následující tvrzení:*

(i) *Existuje $\alpha \geq 0$ tak, že $F(p)$ je holomorfní v polorovině $\{p \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} p > \alpha\}$*

(ii) $\lim_{\operatorname{Re} p \to \infty} F(p) = 0$.

Důkaz (ii)

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t} .$$

Vezměme p s $\operatorname{Re} p > \alpha$.

$$\left| \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt \right| \leq \int_0^\infty M\, e^{\alpha t} e^{-\operatorname{Re} p\, t}\, dt =$$

$$= \left[M\, \frac{e^{(\alpha - \operatorname{Re} p)\, t}}{\alpha - \operatorname{Re} p} \right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{M}{\operatorname{Re} p - \alpha} \to 0$$

pro $\operatorname{Re} p \to \infty$.

4.5. Důsledek. *Je-li $f(t) \in \mathcal{L}_0$ s Laplaceovým obrazem $F(p)$, pak existují konstanty $M, \alpha \geq 0$ takové, že*

$$|F(p)| \leq \frac{M}{\operatorname{Re} p - \alpha} ,$$

pro všechna p s $\operatorname{Re} p > \alpha$.

Další důležité obrazy:

$$
\begin{aligned}
\sin \omega t &\doteq \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \\
\cos \omega t &\doteq \frac{p}{p^2+\omega^2} \\
t^n &\doteq \frac{n!}{p^{n+1}}
\end{aligned}
$$

Základní gramatika Laplaceovy transformace:

$$
\begin{aligned}
f(t) &\doteq F(p) \\
e^{at} f(t) &\doteq F(p-a)\,, \quad a \in \mathbb{R} \\
f(\omega t) &\doteq \frac{1}{\omega} F(\frac{p}{\omega})\,, \quad \omega > 0 \\
t f(t) &\doteq -F'(p)
\end{aligned}
$$

Pravidla o translaci:

$$
\begin{aligned}
f(t) &\doteq F(p)\\
\mathbf{1}(t-a)\,f(t-a) &\doteq e^{-ap}\,F(p)\,,a>0\\
\mathbf{1}(t-a)\,f(t) &\doteq e^{-ap}\,\mathcal{L}\{f(t+a)\}
\end{aligned}
$$

4.6. Příklad. Spočtěte obraz konečného impulsu

$$
f(t)=\begin{cases}1 & t\in<a,2a>\\ 0 & \text{jinak.}\end{cases}
$$

Řešení:

$$
f(t)=\mathbf{1}(t-a)-\mathbf{1}(t-2a)\doteq e^{-ap}\frac{1}{p}-e^{-2ap}\frac{1}{p}\,.
$$

4.7. Věta. Obraz periodické funkce
Je-li $f \in \mathcal{L}_0$ periodická funkce s periodou $T > 0$, pak Laplaceův obraz funkce f je funkce

$$F(p) = \frac{\int_0^T f(t)\, e^{-pt}\, dt}{1 - e^{-pT}}\,.$$

Důkaz:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\, e^{-pt}\, dt =$$

Substituce $t = nT + x$, $dt = dx$:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T f(nT+x)\, e^{-p(nT+x)}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pnT} \int_0^T f(x)\, e^{-px}\, dx =$$

$$= \int_0^T f(x)\, e^{-px}\, dx \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-pT})^n = \frac{\int_0^T f(x)\, e^{-px}\, dx}{1 - e^{-pT}}\,.$$

4.8. Příklad. Nalezněte obraz periodického prodloužení funkce

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in < a, 2a > \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

s periodou $T = 2a$.

Řešení: $T = 2a$

$$\mathbf{1}(t-a) - \mathbf{1}(t-2a) \doteq e^{-pa}\frac{1}{p} - e^{-2pa}\frac{1}{p}\,.$$

$$F(p) = \frac{1}{p}\cdot\frac{(e^{-ap} - e^{-2ap})}{1 - e^{-2ap}} = \frac{1}{p}\cdot\frac{e^{-ap}(1 - e^{-ap})}{(1 - e^{-ap})(1 + e^{-ap})} =$$
$$= \frac{1}{p}\cdot\frac{e^{-ap}}{1 + e^{-ap}} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1 + e^{ap}}$$

V některých případech se dá Laplaceova transformace mocninné řady počítat člen po členu.

4.9. Věta. *Předpokládejme, že $f(t) \in \mathcal{L}_0$ a jsou splněny následující dvě podmínky*

(i) $$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n$$

pro všechna $t \geq 0$.

(ii) *Řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n!}{p^{n+1}}$$

konverguje v jistém okolí nekonečna.

Pak pro Laplaceův obraz $F(p)$ funkce $f(t)$ platí

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n!}{p^{n+1}}\,.$$

4.10. Příklad. $\quad f(t) = \dfrac{\sin t}{t}\,.$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, t^{2n}}{(2n+1)!}\,.$$

Zkoumejme konvergenci řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2n+1)!\, p^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\, p^{2n+1}}\,.$$

Odmocninové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{2n+1}}\,\frac{1}{|p|} = \frac{1}{|p|} < 1\,.$$

Řada tedy konverguje pro $|p| > 1$. Pro Laplaceův obraz $F(p)$ máme

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\, p^{2n+1}} \qquad \text{pro } \operatorname{Re} p > 1\,.$$

Dá se ukázat, že

$$F(p) = \operatorname{arctg} \frac{1}{p}\,.$$

2. Inverzní Laplaceova transformace

• Nutná podmínka pro existenci vzoru v $\mathcal{L}_0$ je holomorfnost v jisté pravé polorovině a nulová limita funkce pro $\operatorname{Re} p \to \infty$. Do této kategorie spadají racionální funkce.

4.11. Tvrzení. *Je-li $F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$, kde P and Q jsou polynomy, $st\, Q > st\, P$, pak F je Laplaceovým obrazem funkce z $\mathcal{L}_0$.*

---

algoritmus: rozklad na částečné zlomky

$$\boxed{\frac{e^{at}t^{n-1}}{(n-1)!} \doteq \frac{1}{(p-a)^n}\,.}$$

4.12. Příklad.

$$F(p) = \frac{2(p^2-1)}{(p^2+1)^2}\,.$$

rozklad na částečné zlomky:

$$F(p) = \frac{A}{(p+j)^2} + \frac{B}{(p+j)} + \frac{C}{(p-j)^2} + \frac{D}{(p-j)}\,.$$

Po výpočtu

$$F(p) = \frac{1}{(p+j)^2} + \frac{1}{(p-j)^2} \doteq e^{-jt}\,t + e^{j\,t}t = 2t\,\cos t\,.$$

4.13. Příklad.

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}\,.$$

$$F(p) = \frac{A}{p+j} + \frac{B}{(p+j)^2} + \frac{C}{p-j} + \frac{D}{(p-j)^2}\,.$$

$\pm j$ je pólem druhého řádu funkce $F(p)$.

$$A = \operatorname{res}_{-j} F(p) = \lim_{p\to -j} [F(p)\,(p+j)^2]' =$$

$$\lim_{p\to -j}\left(\frac{1}{(p-j)^2}\right)' = \frac{-2}{(-j-j)^3} = \frac{j}{4}\,.$$

$$C = \overline{A} = -\frac{j}{4}\,.$$

$$B = \lim_{p\to -j} F(p)(p+j)^2 = \frac{1}{(-j-j)^2} = -\frac{1}{4}\,.$$

$$D = \overline{B}\,.$$

Vzor:

$$f(t) = -\frac{1}{4} t\, e^{-jt} - \frac{1}{4} t\, e^{j\,t}$$

$$+\frac{j}{4}\, e^{-j\,t} - \frac{j}{4} e^{jt} =$$

$$= -\frac{1}{2} t\cos t + \frac{1}{2}\sin t\,.$$

Obecnější než racionální funkce jsou funkce holomorfní v okolí nekonečna mající v nekonečnu nulovou limitu.

4.14. Věta. (Věta o rozkladu)
Nechť $F(p)$ je holomorfní funkce v okolí nekonečna s Laurentovým rozvojem

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n} \, .$$

Pak $F(p)$ je Laplaceovým obrazem funkce

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} t^{n-1} \, .$$

4.15. Příklad.

$$F(p) = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}} \, .$$

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{1!}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{2!p^3} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{p^{k+1}} \, .$$

Tedy

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{t^k}{k!} = J_0(2\sqrt{t}) \, .$$

Integrální formule a metoda reziduí

odvození integrálního vyjádření:

Předpoklady:
$f(t) \in \mathcal{L}_0$, $f'(t)$ po částech spojitá,
$f(t) = 0$ pro $t < 0$. Existuje $\alpha > 0$ tak, že

$$|f(t)| \le M\, e^{\alpha\, t}\,, \qquad t \ge 0\,.$$

Pro $x > \alpha$ je

$$f(t)\, e^{-x\, t} \in L^1(\mathbb{R})\,.$$

Zvolme pevně $p = x + j\, y$, kde $x > \alpha\,, y \in \mathbb{R}$.
Počítejme hodnotu Laplaceovy transformace v bodě p:

$$\mathcal{L}f(p) = F(x + j\, y) = \int_0^\infty (f(t)\, e^{-x\, t})\, e^{-j\, y\, t}\, dt\,.$$

Jinými slovy

$$F(x + j\, y) = F\{f(t)e^{-xt}\}(y)\,.$$

Můžeme použít větu o inverzní Fourierově transformaci aplikovanou na funkci

$$f(t)\, e^{-x\, t}$$

V bodech spojitosti funkce $f(t)$ máme:

$$f(t)\, e^{-x\,t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x + j\,y)\, e^{j\,y\,t}\, dy \qquad t > 0\,.$$

Odtud

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x\,t} e^{j\,y\,t} F(x + j\,y)\, dy\,.$$

Tento integrál se dá interpretovat jako křivkový integrál přes přímku: Zvolme nejdříve úsečku, C_R, s krajními body

$$x - j\,R\,, x + j\,R\,, \qquad R > 0\,.$$

Parametrizace této úsečky je

$$\varphi(y) = x + j\,y \qquad y \in < -R, R > \;.$$

$$\varphi'(y) = j$$

$$\int_{C_R} F(p) e^{p\,t}\, dp = \int_{-R}^{R} F(x + j\,y)\, e^{x\,t}\, e^{j\,y\,t}\, j\, dy\,.$$

Tedy

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{C_R} F(p)\, e^{p\,t}\, dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} F(x + jy)\, e^{xt + j\,yt}\, dy\,.$$

Limitou pro $R \to \infty$ dostaneme

Riemannův–Mellinův vzorec

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{L_x} F(p)\, e^{p\,t}\, dp\,.$$

L_x … **Bromwichova linie**. Přímka daná parametrizací

$$\varphi(t) = x + j\,t \qquad t \in (-\infty, \infty)\,.$$

Též používáme zápis

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi\, j} \int_{-\infty j + x}^{\infty j + x} F(p)\, e^{p\,t}\, dp}$$

Všimněme si, že na x, $x > \alpha$ nezáleží.

Jak vypočítat integrál $\int_{-\infty j+a}^{\infty j+a} F(p)\, e^{p\,t}\, dp$, $a > 0$?

Předpokládejme, že uvedený integrál existuje.

Technické předpoklady:

(i) Laplaceův obraz, $F(p)$, se dá rozšířit na funkci holomorfní v $\mathbb{C}$ vyjma spočetně mnoha izolovaných singulárních bodů $p_1, p_2, \ldots$ ležících v polorovině $\{p \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} p < a\}$

(ii) Existuje posloupnost polokružnic

$$K_n = \{p \in \mathbb{C} \mid |p - a| = R_n, \operatorname{Re} p \leq a\}$$

s poloměry $R_n \to \infty$ tak, že

$$\int_{K_n} F(p)\, e^{p\,t}\, dp \to 0 \qquad \text{pro } n \to \infty\,.$$

Technické předpoklady implikují pomocí reziduové věty, že

$$\boxed{\int_{-\infty j+a}^{\infty j+a} F(p)\, e^{p\,t}\, dp = 2\pi j \sum_n \operatorname{res}_{p_n} F(p)\, e^{p\,t}\,.}$$

Metoda reziduí:

$$\boxed{f(t) = \sum_{p_n} \operatorname{res}_{p_n} F(p)\, e^{p\,t}}$$

Dá se použít u některých důležitých funkcí jako racionální funkce, a obrazy periodických funkcí. Ve všech případech je možno výsledek ověřit zkouškou.

Testovací příklady:

4.16. Příklad. $F(p) = \dfrac{1}{p^2}$

$$f(t) = \operatorname{res}_0 \frac{e^{p\,t}}{p^2} = \lim_{p\to 0} (e^{p\,t})' = te^0 = t\,.$$

4.17. Příklad. $F(p) = \dfrac{p}{p^2+a^2} \qquad a > 0\,.$

$$f(t) = \operatorname{res}_{ja} \frac{p}{p^2+a^2} e^{p\,t} + \operatorname{res}_{-ja} \frac{p}{p^2+a^2} e^{p\,t} =$$
$$= \frac{aj}{2\,aj}\, e^{j\,a\,t} + \frac{-aj}{-2\,aj}\, e^{j\,a\,t} = \frac{1}{2} e^{aj\,t} + \frac{1}{2} e^{-aj\,t} = \cos at\,.$$

4.18. Poznámka. *Pokud je singularita p_n pólem prvního řádu funkce $F(p)$, pak*

$$\operatorname{res}_{p_n} F(p)\, e^{p\,t} = (\operatorname{res}_{p_n} F(p)) \cdot e^{p_n\,t}\,.$$

4.19. Příklad. $$F(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)(p-3)}\,.$$

$$f(t) = e^t \operatorname{res}_1 F(p) + e^{2t} \operatorname{res}_2 F(p) + e^{3t} \operatorname{res}_3 F(p) =$$
$$= \frac{e^t}{2} - e^{2t} + \frac{1}{2} e^{3t}\,.$$

4.20. Příklad. $$F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p-2)(p-3)}$$

$$\operatorname{res}_1 \frac{e^{pt}}{(p-1)^2(p-2)(p-3)} = \lim_{p\to 1}\left(\frac{e^{pt}}{(p-2)(p-3)}\right)' =$$
$$= \lim_{p\to 1}\left(\frac{t\,e^{pt}}{(p-2)(p-3)} - \frac{2p-5}{(p-2)^2(p-3)^2}\,e^{pt}\right) =$$
$$\frac{3}{4}e^t + t\frac{1}{2}e^t\,.$$

Ostatní singularity jsou jednoduché póly a tedy

$$f(t) = \frac{3}{4}\,e^t + t\frac{1}{2}e^t - e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t}\,.$$

4.21. Příklad.

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}\,.$$

singularity $\pm j$, poly druhého řádu

$$\operatorname{res}_j \frac{e^{pt}}{(p^2+1)^2} = \lim_{p\to j}\left[\frac{e^{pt}}{(p+j)^2}\right]' =$$
$$= \lim_{p\to j} \frac{te^{pt}(p+j)^2 - e^{pt}2(p+j)}{(p+j)^4} = \frac{-t\,e^{jt}}{4} - \frac{je^{jt}}{4}\,.$$

Podobně

$$\operatorname{res}_{-j} \frac{e^{pt}}{(p^2+1)^2} = \frac{-te^{-jt}}{4} + \frac{1}{4}je^{-jt}\,.$$

Závěr:

$$f(t) = -\frac{1}{2}t\,\cos t + \frac{1}{2}\,\sin t\,.$$

4.22. Příklad.

$$F(p) = \frac{1}{p(1+e^p)}\,.$$

Singularity: $0, e^p = -1$, tj. $p_n = (2n+1)j\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

Aplikujeme metodu reziduí:

$$\operatorname{res}_0 \frac{e^{pt}}{p(1+e^p)} = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}\,.$$

Pro $p_n = (2n+1)\,\pi j$

$$\operatorname{res}_{p_n} \frac{e^{pt}}{p(1+e^p)} = \frac{e^{tp_n}}{p_n\,\underbrace{e^{p_n}}_{=-1}} = -\frac{e^{t(2n+1)\,\pi j}}{(2n+1)\pi j}\,.$$

$$f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{t\,(2n+1)\pi\,j}}{(2n+1)\pi\,j} =$$

$$= \frac{1}{2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)\,\pi\,t]\; + j\sin[(2n+1)\,\pi\,t]}{(2n+1)\pi j} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\pi\,t]}{(2n+1)}\,.$$

Dostáváme takto periodickou funkci s periodou $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Na základě této informace jsme dokonce schopni explicitně stanovit danou funkci.

$$\frac{1}{p(1+e^p)} = \frac{G(p)}{1-e^{-2p}}$$

Tedy

$$G(p) = \frac{1-e^{-2p}}{p(1+e^p)} = \frac{(1-e^{-p})(1+e^{-p})}{p(1+e^{-p})e^p} = \\ = \frac{1}{p}e^{-p} - \frac{1}{p}e^{-2p} \doteq \mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-2)\,.$$

Budeme se teď věnovat zobecnění této metody.

Metoda odštěpení polů

Motivace:

kvazipolynom: $p(t)\, e^{at} \ldots\ p(t)$ je polynom, $a \in \mathbb{C}$.

Laplaceův vzor	Laplaceův obraz
součet kvazipolynomů	racionální funkce $\frac{P(p)}{Q(p)}$
součet funkcí "kvazipolynom$\cdot\mathbf{1}(t-a)$"	součet funkcí tvaru $\frac{P(p)}{Q(p)}\, e^{-ap}, a \geq 0.$
konečné impulsy dané kvazipolynomy	součet funkcí tvaru $\frac{P(p)}{Q(p)}\, e^{-ap}, a \geq 0.$
periodické funkce z kvazipolynomů	součet funkcí $\frac{P(p)}{Q(p)} \frac{e^{-ap}}{1-e^{-pT}}$, $a \geq 0, T > 0$
součet všech funkcí výše	součty součet všech funkcí výše

Takovéto funkce vznikají při řešení systémů diferenciálních a integro-diferenciálních rovnic, popisují lineární dynamické systémy. Typická situace:

$$\boxed{\underbrace{Y(p)}_{\mathcal{L}-\text{obraz výstupu}} = \underbrace{F(p)}_{\text{přenosová funkce}} \cdot \underbrace{X(p)}_{\mathcal{L}-\text{obraz vstupu}}}$$

Přenosová funkce je obvykle ryze lomená funkce, jejíž singularity mají zápornou reálnou část.

To nás vede k úloze nalézt vzor k funkci typu

$$\boxed{F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} \frac{e^{-ap}}{1 - e^{-pT}}\,, \qquad a \geq 0, T > 0}$$

Je možno použít metodu reziduí, singularity jsou dvojího typu:

(i) Kořeny polynomu $Q(p)$.
Je-li p_1 kořen polynomu Q, pak je pólem řádu l funkce $F(p)$. Výpočet rezidua vede k funkci typu

$$p_{l-1}(t)e^{p_1 t}\,, \qquad \text{kde } p_{l-1} \text{ je polynom stupně } l-1\,.$$

Vyplyne z konkrétních výpočtů.

(ii) Kořeny rovnice $e^{-Tp} = 1$, tj. body

$$\frac{2\pi n j}{T} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Nekonečně těchto bodů není kořenem polynomu Q. V těchto bodech má $F(p)$ jednonásobné poly. Výpočtem reziduí pak dostaneme funkce typu

$$c_n\, e^{\frac{2n\pi j}{T} t}\,, \qquad c_n \in \mathbb{C}\,.$$

Součet těchto funkcí je periodická funkce s periodou $T > 0$ (Dostaneme ji ve formě Fourierovy řady).

Závěr: Vzor $f(t)$ je tvaru

$$f(t) = \underbrace{h(t)}_{\text{součet kvazipolynomů, neustálená složka}} + \underbrace{g(t)}_{\text{periodická funkce s periodou } T}$$

4.23. Příklad. $F(p) = \dfrac{1}{p-2}\,\dfrac{e^{-p}}{1-e^{-3p}}\,.$

vzor $f(t)$

$$f(t) = A\,e^{2t} + g(t)\,.$$

$g(t)$ je funkce s periodou 3.

$$\operatorname{res}_2 \frac{1}{p-2}\frac{e^{-p}}{1-e^{-3p}}\,e^{pt} = \frac{e^{-2}}{1-e^{-6}}\,e^{2t}$$

$$A = \frac{e^{-2}}{1-e^{-6}}\,.$$

$$F(p) = \frac{1}{p-2}\,\frac{e^{-p}}{1-e^{-3p}} = \frac{A}{p-2} + \frac{G(p)}{1-e^{-3p}}$$

$G(p)$ je obraz konečného impulzu délky 3 generující funkci $g(t)$.

Pronásobením funkcí

$$(1-e^{-3p})$$

dostáváme

$$G(p) = \frac{e^{-p}}{p-2} - \frac{A(1-e^{-3p})}{p-2} \doteq$$
$$\doteq e^{2(t-1)}\mathbf{1}(t-1) - A\,e^{2t} + A\,e^{2(t-3)}\mathbf{1}(t-3)\,.$$

$$g(t) = \begin{cases} -Ae^{2t} & t \in < 0, 1) \\ e^{2(t-1)} - Ae^{2t} = (e^{-2} - A)e^{2t} & t \in < 1, 3) \end{cases}$$

Dále se periodicky opakuje.

$$g(t) \doteq \begin{cases} -0,1356\, e^{2t} & t \in < 0, 1) \\ -0,00033\, e^{2t} & t \in < 1, 3) \end{cases}$$

Např.

$$\begin{aligned} f(100) = Ae^{200} + g(100) = Ae^{200} + g(99 + 1) = \\ = Ae^{200} + (e^{-2} - A)\, e^{2}\,. \end{aligned}$$

4.24. Příklad. $$F(p) = \frac{1}{p(1 - e^{-p})}.$$

0.. dvojnásobný pol

$$\operatorname{res}_0 F(p)e^{pt} = \lim_{p \to 0} \left(\frac{pe^{pt}}{1 - e^{-p}} \right)' =$$

$$= \lim_{p \to 0} e^{pt} \frac{(1 + tp)(1 - e^{-p}) - pe^{-p}}{(1 - e^{-p})^2} =$$

(2 krát L'Hospitalovo pravidlo)

$$= \frac{2t + 1}{2}.$$

$$f(t) = \frac{2t + 1}{2} + g(t),$$

kde $g(t)$ má periodu 1.
Fourierovo vyjádření $g(t)$: $n \neq 0$

$$\operatorname{res}_{2n\pi j} F(p)e^{pt} = \frac{e^{2n\pi tj}}{2n\pi j}$$

$$g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{e^{2n\pi tj}}{2n\pi j} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi t}{n}.$$

Explicitní vyjádření:

$$F(p) = \frac{1}{p(1-e^{-p})} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2p} + \frac{G(p)}{1-e^{-p}}$$

$$G(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}(1-e^{-p}) - \frac{1}{2p}(1-e^{-p}) \doteq$$
$$\doteq 1 - t + (t-1)\mathbf{1}(t-1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{1}(t-1)\,.$$

$$g(t) = \frac{1}{2} - t \qquad t \in <0,1)\,.$$

$$f(t) = t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - t = 1 \qquad t \in <0,1)\,.$$

$$f(t) = t + \frac{1}{2} + g(t-1) = t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - (t-1) = 2 \qquad t \in <1,2)$$

Tedy

$$f(t) = n \qquad t \in <n-1,n)\,.$$

4.25. Příklad. Určete analyticky inverzní Laplaceův obraz funkce

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)\,(p+2)\,(1-e^{-p})}\,.$$

Řešení

$$res_{-1}\, e^{pt}\, F(p) = \frac{e^{-t}}{1-e} = A\, e^{-t};\ A = \frac{1}{1-e}$$

$$res_{-2}\, e^{pt}\, F(p) = -\frac{e^{-2t}}{1-e^2} = B\, e^{-2\,t};\ B = \frac{-1}{1-e^2}$$

Perioda je 1.

$$\frac{1}{(p+1)\,(p+2)\,(1-e^{-p})} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2} + \frac{G(p)}{1-e^{-p}}$$

Odtud

$$\begin{aligned} G(p) &= \frac{1}{(p+1)\,(p+2)} - \frac{A\,(1-e^{-p})}{p+1} - \frac{B\,(1-e^{-p})}{p+2} \\ &= \frac{-1}{p+2} + \frac{1}{p+1} - \frac{A\,(1-e^{-p})}{p+1} - \frac{B\,(1-e^{-p})}{p+2} \end{aligned}$$

Pro $t \in < 0, 1)$ je periodická část

$$g(t) = -e^{-2\,t} + e^{-t} - A\,e^{-t} - B\,e^{-2\,t} = (1-A)\,e^{-t} - (1+B)\,e^{-2\,t}$$

Závěr:

$$f(t) = A\,e^{-t} + B\,e^{-2\,t} + g(t)\,.$$

Predikce: pro velké t je $f(t)$ skoro periodická funkce.

5 Transformace Z

Motivace: zpracování diskrétního signálu, vzorkování, umožňuje použít analytické operace na diskrétní objekty.

$$Z : (a_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} .$$

Otázka: Pro jaké posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ v jistém okolí nekonečna?

5.1. Tvrzení. *Řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

konverguje v nějakém okolí nekonečna právě tehdy když existují konstanty $M \geq 0$ a $c \in \mathbb{R}$ tak, že

$$|a_n| \leq M\, e^{cn} \qquad \text{\textit{pro všechna} } n \,. \tag{2}$$

Důkaz: Předpokládejme, že $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ konverguje ve vnějšku kruhu $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R'\}$. Její součet

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}\,.$$

je na této oblasti holomorfní funkce.

Zvolme kladně orientovanou kružnici C se středem v počátku, ležící v $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R'\}$, tj. s poloměrem $R > R' > 0$.

Podle integrálního vyjádření koeficientů Laurentovy řady (tady je třeba řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ interpretovat jako řadu se středem v počátku) máme

$$\begin{aligned} |a_n| = \left| \frac{1}{2\pi\, j} \int_C \frac{F(z)}{z^{-n+1}}\, dz \right| \leq \\ \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{R^{1-n}} \cdot \max_{z \in C} |F(z)| \cdot 2\pi\, R = \\ = R^n \cdot \underbrace{\max_{z \in C} |F(z)|}_{=M}\,. \end{aligned}$$

Tedy

$$|a_n| \leq M e^{n \ln R}\,.$$

Opačná implikace, předpokádejme, že platí odhad (2). Pro

$$|z| > e^c$$

máme odhad

$$\frac{|a_n|}{|z|^n} \leq M \frac{(e^c)^n}{|z|^n}\,.$$

Řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \frac{(e^c)^n}{|z|^n}$$

je geometrická řada s absolutní hodnotou kvocientu

$$\frac{e^c}{|z|} < 1\,.$$

Dle srovnávacího kritéria konverguje řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

pro všechna z s $|z| > e^c$.

Značení:

Z_0 ... množina všech komplexních posloupností $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, které jsou nejvýše exponenciálního růstu. Tj.

$$|a_n| \le M\, e^{cn} \qquad \text{pro všechna } n\,,$$

kde $M \ge 0$, $c \in \mathbb{R}$.

Ekvivalentně, pro $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ existuje $M \ge 0$ a $a > 0$ tak, že

$$|a_n| \le M\, a^n \qquad \text{pro všechna } n\,.$$

- Každá omezená posloupnost je v Z_0
- Každá posloupnost $(p(n))_{n=0}^{\infty}$, kde p je polynom, je v Z_0:

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{e^n} = 0\,.$$

  Tedy například

  $$|p(n)| \leq Me^n$$

  pro dostatečně velká M.
- Vzorkování kvazipolynomu je v Z_0.
- $(n^n)_{n=0}^{\infty} \notin Z_0$

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{e^{cn}} = \lim_{n\to\infty} e^{n(\ln n - c)} = \infty\,.$$

- $(n!)_{n=0}^{\infty} \notin Z_0$.
  Podílové kritérium pro řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{z^n}$:

  $$\frac{(n+1)!}{|z|^{n+1}} \cdot \frac{|z|^n}{n!} = \frac{n+1}{|z|} \to \infty\,, n \to \infty\,.$$

  Nekonverguje v žádném bodě.

5.2. Definice. *Z-obraz* posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ je funkce

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}\,.$$

Značení:

$$Z(a_n)_{n=0}^{\infty} = F(z)$$

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} \doteq F(z)$$

K_0 ... funkce holomorfní v okolí ∞ mající v ∞ vlastní limitu.

5.3. Věta. *Z-transformace je prosté zobrazení množiny Z_0 na množinu K_0.*

Důkaz: Věta o Laurentově rozvoji.

Inverzní transformace Z: Z^{-1}.

5.4. Příklad. $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 2, 0, 4, 0, 0, \dots)\,.$

$$F(z) = 1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^3}\,.$$

$z \neq 0.$

5.5. Příklad.

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{\text{index } m}, 0, 0, \dots) = (\delta_{mn})_{n=0}^{\infty}\,.$$

$$F(z) = \frac{1}{z^m}$$

5.6. Příklad. $(a_n)_{n=0}^{\infty} = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n=0}^{\infty}$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = e^{\frac{1}{z}}\,.$$

$z \neq 0\,.$

5.7. Příklad. $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (c)_{n=0}^{\infty}\,.$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c}{z^n} = c\frac{1}{1 - 1/z} = \frac{cz}{z-1}\,,$$

$|z| > 1.$

5.8. Příklad. $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)\,.$

$$F(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} + \cdots = \frac{\frac{1}{z}}{1 - 1/z^2} = \frac{z}{z^2 - 1}\,.$$

$|z| > 1.$

5.9. Příklad. Víme, že se posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ se zobrazí na funkci $F(z)$. Jaká posloupnost se zobrazí na funkci $F(z^2)$?

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

$$F(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{2n}}$$

Tedy

$$(a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \dots)$$

má Z-obraz $F(z^2)$.

5.10. Příklad. $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a^n)_{n=0}^{\infty}\,, \qquad a \in \mathbb{C}$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} = \frac{z}{z-a}\,.$$

$|z| > |a|$.

5.11. Věta. Základní gramatika Z-transformace
Předpokládejme, že $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ *a* $(b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$*, přičemž*

$$Z(a_n)_{n=0}^{\infty} = F(z)\,.$$

Pak platí

(i) *(Linearita)*

$$Z(c_1\, a_n + c_2\, b_n)_{n=0}^{\infty} = c_1 Z(a_n)_{n=0}^{\infty} + c_2\, Z(b_n)_{n=0}^{\infty}$$

pro libovolná $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$*.*

(ii) *(Multiplikace)*

$$Z(a^n\, a_n)_{n=0}^{\infty} = F\left(\frac{z}{a}\right),$$

pro všechna $a \neq 0$*.*

(iii) *(Derivace obrazu)*

$$Z(n\, a_n)_{n=0}^{\infty} = -zF'(z)\,.$$

Důkaz:

(i)

$$Z(c_1\, a_n + c_2\, b_n)_{n=0}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_1\, a_n + c_2\, b_n}{z^n} =$$

$$= c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} = c_1 Z(a_n)_{n=0}^{\infty} + c_2 Z(b_n)_{n=0}^{\infty}\,.$$

(ii) $$Z(a^n\, a_n)_{n=0}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n\, a_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(\frac{z}{a})^n} = F\left(\frac{z}{a}\right).$$

(iii)

$$F'(z) \quad = \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}\right)' \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} -n a_n \frac{1}{z^{n+1}}\,.$$

$$- \quad zF'(z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n a_n}{z^n} \quad = \quad Z(n\, a_n)_{n=0}^{\infty}\,.$$

5.12. Příklad. $(c + 2\ a^n)_{n=0}^{\infty}$

$$Z(c + 2\ a^n)_{n=0}^{\infty} = Z(c)_{n=0}^{\infty} + 2Z(a^n)_{n=0}^{\infty} = \\ = \frac{cz}{z-1} + 2\,\frac{z}{z-a} \\ |z| > \max(1, |a|)$$

5.13. Příklad. $(\sin \omega n)_{n=0}^{\infty}$.

$$\sin n\omega \qquad = \qquad \frac{1}{2j}(e^{j\omega n} \qquad - \qquad e^{-j\omega n})\,.$$

$$F(z) = \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega}} - \frac{z}{z-e^{-j\omega}}\right) = \\ = \frac{1}{2j}\frac{z^2 - ze^{-j\omega} - z^2 + ze^{j\omega}}{z^2 - 2z\cos\omega + 1} = \frac{z\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$$

5.14. Příklad. $\quad (a^n \sin n\omega)_{n=0}^{\infty}$

$$Z(a^n \sin n\omega)_{n=0}^{\infty} = \frac{\frac{z}{a}\sin\omega}{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - 2\frac{z}{a}\cos\omega + 1} =$$

$$= \frac{az\sin\omega}{z^2 - 2az\cos\omega + a^2}\,.$$

5.15. Příklad. $\quad (n)_{n=0}^{\infty}\,.$

$$Z(n)_{n=0}^{\infty} \quad = \quad -z\left(\frac{z}{z-1}\right)' \quad = \quad \frac{z}{(z-1)^2}$$

5.16. Příklad. $\quad (n^2)_{n=0}^{\infty}$

$$Z(n^2)_{n=0}^{\infty} = -z\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)' = -z\,\frac{(z-1)^2 - z2(z-1)}{(z-1)^4} = \frac{z^2+z}{(z-1)}$$

Takto je možno získat obraz každého polynomu.

5.17. Příklad. $\quad (a^n\, n)_{n=0}^{\infty}$

$$F(z) = \frac{\frac{z}{a}}{(\frac{z}{a}-1)^2} = \frac{az}{(z-a)^2}\,.$$

5.18. Věta. Posun doprava

Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ *a* k *je nazáporné celé číslo. Definujme posloupnost* $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ *vztahem*

$$b_n = \begin{cases} a_{n-k} & \textit{jestliže } n \geq k \\ 0 & \textit{jestliže } n < k\,. \end{cases}$$

Pak

$$\boxed{Z(b_n)_{n=0}^{\infty} = \frac{1}{z^k}\, F(z)\,,}$$

kde $F(z)$ *je obraz* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

Též:

$$\boxed{(a_{n-k}\mathbf{1}(n-k))_{n=0}^{\infty} \doteq \frac{1}{z^k} F(z)\,.}$$

$$\boxed{(\overbrace{0,\dots 0}^{k}, a_0, a_1, \dots) \doteq \frac{1}{z^k} F(z)\,.}$$

Důkaz:

$$Z(b_n)_{n=0}^{\infty} = \frac{a_0}{z^k} + \frac{a_1}{z^{k+1}} + \frac{a_2}{z^{k+2}} + \cdots$$
$$= \frac{1}{z^k}(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots) = \frac{1}{z^k} F(z)\,.$$

5.19. Příklad. $\quad (0,0,0,1,1,1,\cdots)$

$$(1)_{n=0}^{\infty} \doteq \frac{z}{z-1}$$

$$(0,0,0,1,1,1,\cdots) \doteq \frac{1}{z^3}\frac{z}{z-1}\,.$$

5.20. Věta. Translace vlevo

Předpokládejme, že $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ má $Z-$obraz $F(z)$ a k je celé nezáporné číslo. Definujme posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ rovností

$$b_n = a_{n+k} \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Pak

$$Z(b_n)_{n=0}^{\infty} = z^k\left[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1}\frac{a_n}{z^n}\right].$$

$$\boxed{(a_k, a_{k+1}, \dots) \doteq z^k \left(F(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} - \frac{a_2}{z^2} - \dots - \frac{a_{k-1}}{z^{k-1}} \right)}$$

Důkaz:

$$Z(b_n)_{n=0}^{\infty} = a_k + \frac{a_{k+1}}{z} + \frac{a_{k+2}}{z^2} + \cdots$$

$$z^k \left[F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{a_n}{z^n} \right] = z^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{a_n}{z^k} \right) =$$

$$= z^k \left(\frac{a_k}{z^k} + \frac{a_{k+1}}{z^{k+1}} + \frac{a_{k+2}}{z^{k+2}} + \cdots \right) = a_k + \frac{a_{k+1}}{z} + \frac{a_{k+2}}{z^2} + \cdots$$

5.21. Příklad. $(\sin 5\omega, \sin 6\omega, \dots)$

$$F(z) = z^5 \left(\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z\ \cos \omega + 1} - \frac{\sin \omega}{z} - \frac{\sin 2\omega}{z^2} - \frac{\sin 3\omega}{z^3} - \frac{\sin 4\omega}{z^4} \right)$$

5.22. Příklad. $((n+3)^2)_{n=0}^{\infty}$

$$(n^2)_{n=0}^{\infty} \doteq \frac{z^2+z}{(z-1)^3}\,.$$

$$F(z) = z^3\left(\frac{z^2+z}{(z-1)^3} - 0 - \frac{1}{z} - \frac{4}{z^2}\right) = \\ = \frac{z^5+z^4}{(z-1)^3} - z^2 - 4z\,.$$

Diference posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ je definována rovností

$$\Delta(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_{n+1} - a_n)_{n=0}^{\infty}\,.$$

Diference vyšších čádů:

$$\Delta^k(a_n)_{n=0}^{\infty} = \Delta\Delta^{k-1}(a_n)_{n=0}^{\infty}\,.$$

Příklady:

$$\Delta^2(a_n)_{n=0}^{\infty} = \Delta(a_{n+1}-a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_{n+2}-a_{n+1}-(a_{n+1}-a_n))_{n=0}^{\infty} = \\ (a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n)_{n=0}^{\infty}$$

$$\Delta(n)_{n=0}^{\infty} = (1)_{n=0}^{\infty} \,.$$

$$\Delta^2(n)_{n=0}^{\infty} = (0)_{n=0}^{\infty} \,.$$

5.23. Tvrzení. *Nechť* $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$ *se* Z*-obrazem* $F(z)$*. Pak*

$$Z(\Delta a_n)_{n=0}^{\infty} = (z-1)F(z) - za_0 \,.$$

Důkaz:

$$(a_{n+1})_{n=0}^{\infty} = (a_1, a_2, \dots) \doteq z[F(z) - a_0] \,.$$

$$\Delta(a_n)_{n=0}^{\infty} \doteq zF(z) - za_0 - F(z) \,.$$

5.24. Definice. Předpokládejme, že $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$.
Konvoluce těchto posloupností je posloupnost

$$(c_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty} \, ,$$

definová vztahem

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \, b_{n-k} \qquad n = 0, 1, \ldots \, .$$

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \, b_0 \\ c_1 &= a_0 \, b_1 + a_1 \, b_0 \\ c_2 &= a_0 \, b_2 + a_1 \, b_1 + a_2 \, b_0 \end{aligned}$$

5.25. Příklad. $(1)_{n=0}^{\infty} * (1)_{n=0}^{\infty} = (n+1)_{n=0}^{\infty}$

5.26. Příklad. $(1)_{n=0}^{\infty} * (e^n)_{n=0}^{\infty} = (1, 1+e, 1+e+e^2, \dots)$

5.27. Příklad. Co je konvoluce s posloupností $(0, 1, 0, 0, \dots)$?

$$(0, 1, 0, 0, \dots) * (a_0, a_1, a_2, \dots) = (0, a_0, a_1, \dots)$$

5.28. Příklad. Co je konvoluce s posloupností

$(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k}, 1, 0, \dots) = (\delta_{kn})_{n=0}^{\infty}$?

$$(\delta_{kn})_{n=0}^{\infty} * (a_n)_{n=0}^{\infty} = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k}, a_0, a_1, \dots)$$

Posun doprava o k-pozic.

5.29. Věta. Věta o konvoluci

Předpokládejme, že

$(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0,$
$Z(a_n)_{n=0}^{\infty} = F(z)$, $Z(b_n)_{n=0}^{\infty} = G(z)$.

Pak

$$\boxed{Z[(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}] = F(z) \cdot G(z)\,.}$$

Důkaz:

$$F(z)G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{z^m} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) \frac{1}{z^n} = Z[(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty}]$$

5.30. Příklad. $(n+1)_{n=0}^{\infty} = (1)_{n=0}^{\infty} * (1)_{n=0}^{\infty} \doteq \left(\frac{z}{z-1} \right)^2$

5.31. Příklad. $(1)_{n=0}^{\infty} * (e^n)_{n=0}^{\infty} \doteq \frac{z}{z-1} \frac{z}{z-e} = \frac{z^2}{(z-1)(z-e)}$

5.32. Příklad. Určete posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, pro kterou platí

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} * (2^n)_{n=0}^{\infty} = (4^n)_{n=0}^{\infty}\,.$$

$$Z(a_n)_{n=0}^{\infty} \cdot \frac{z}{z-2} = \frac{z}{z-4}$$

$$\begin{aligned} Z(a_n)_{n=0}^{\infty} &= \frac{z-2}{z-4} = 1 + \frac{2}{z-4} = \\ &= (\delta_{n0} + 2 \cdot \mathbf{1}(n-1)4^{n-1})_{n=0}^{\infty} = (1, 2, 8, 32, \dots)\,. \end{aligned}$$

5.33. Příklad. Pro jakou posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ platí, že

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$$

pro všechna $(b_n)_{n=0}^{\infty} \in Z_0$.

$$F(z) \cdot G(z) = G(z)$$

$$F(z) = 1$$

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 0, 0, \dots)\,.$$

Důsledek: Konvolutivní součin je komutativní, asociativní a má jednotkový prvek.

Význam konvoluce

$L : Z_0 \mapsto Z_0$

vstup $\mapsto$ výstup

(i) L je translačně invariantní, tj. jestliže
$L(a_n)_{n=0}^{\infty} = (b_n)_{n=0}^{\infty}$, pak

$$L(\mathbf{1}(n-k)a_{n-k})_{n=0}^{\infty} = (\mathbf{1}(n-k)b_{n-k})_{n=0}^{\infty} .$$

(ii) L je lineární, tj

$$L(c_1(a_n)_{n=0}^{\infty} + c_2(b_n)_{n=0}^{\infty} + \cdots) = c_1 L(a_n)_{n=0}^{\infty} + c_2 L(b_n)_{n=0}^{\infty} +$$

Předpokládejme, že

$L(1, 0, \dots) = (b_0, b_1, \dots)$

vstup:

$a_0(1, 0, 0, \dots) + a_1(0, 1, 0, 0, \dots) + \dots$

výstup:

$$\begin{array}{llllll}
a_0 & (b_0, & b_1, & b_2, & b_3, & \dots) \ + \\
a_1 & (0, & b_0, & b_1, & b_2 & \dots) \ + \\
a_2 & (0, & 0, & b_0, & b_1, & \dots) \ + \\
\dots & \dots & \dots & & & \\
\hline
 & (a_0 b_0, & a_0 b_1 + a_1 b_0, & a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, & \dots &)
\end{array}$$

Závěr:

Odezva na $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je
$(a_n)_{n=0}^{\infty} * (b_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * L(1,0,0,\dots)$ neboli

$$\boxed{L(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * L(1,0,0,\dots)\,.}$$

5.34. Tvrzení. *Je-li* $Z(a_n)_{n=0}^{\infty} = F(z)$, *pak*

$$Z\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n=0}^{\infty} = \frac{zF(z)}{z-1}\,.$$

Důkaz:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n=0}^{\infty} = (a_n)_{n=0}^{\infty} * (1)_{n=0}^{\infty} = \frac{z}{z-1}F(z)\,.$$

5.35. Příklad. $$Z\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) = \frac{z}{z-1}\cdot\frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2}{(z-1)^3}$$

Inverzní Z transformace

$$Z^{-1} : K_0 \mapsto Z_0$$

$$F(z) \mapsto (a_n)_{n=0}^{\infty}$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}\,.$$

Metody výpočtu:

- rozvoj v Laurentovu řadu

- integrální forma, reziduová věta

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_C F(z) z^{n-1}\, dz$$

kde C je kladně orientovaná kružnice se středem v počátku, ležící v oblasti, kde je obraz holomorfní

Podle reziduové věty:

$$\boxed{a_n = \sum_{z_i} \mathrm{res}_{z_i}(F(z)\, z^{n-1})\,.}$$

Suma přes singularity ležící uvnitř C.

- přímé vzorce

$$a_0 = \lim_{z\to\infty} F(z)$$

$$a_1 = \lim_{z\to\infty} z(F(z) - a_0)$$

$$a_2 = \lim_{z\to\infty} z^2\left(F(z) - a_0 - \frac{a_1}{z}\right)$$

$$a_{n+1} = (-1)^{n+1} \lim_{z\to\infty} \frac{z^{n+2}}{(n+1)!}[z^n F(z)]^{(n+1)}\,.$$

- známé obrazy

- konvoluce

5.36. Příklad. $F(z) = \sin\dfrac{1}{z}$

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}}\,.$$

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \\ a_{2n} &= 0 \end{aligned}$$

5.37. Příklad. $F(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-e)}$

$$F(z) = \frac{1}{1-e}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-e}\right)$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{z}{z-1} \doteq (0, 1, 1, \dots)$$

$$\frac{1}{z-e} = \frac{1}{z}\cdot\frac{z}{z-e} \doteq (0, 1, e, e^2, \dots)$$

$$F(z) = \frac{1}{1-e}\,(0, 0, 1-e, 1-e^2, \dots)\,.$$

5.38. Příklad. $\quad F(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-e)}$

Metodou reziduí.

$$a_0 = \lim_{z\to\infty} F(z) = 0\,.$$

$n \geq 1$

$$a_n = \operatorname{res}_1 \frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-e)} + \operatorname{res}_e \frac{z^{n-1}}{(z-1)(z-e)} = $$
$$= \frac{1}{1-e} + \frac{e^n}{e-1} = \frac{1-e^{n-1}}{1-e}\,.$$

5.39. Příklad. $\quad F(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2}$

$$F(z) = \frac{1}{z}\frac{z}{(z-1)^2} \doteq (0, 0, 1, 2, 3, ...)\,.$$

rezidui:

$n \geq 1$

$$a_n = \operatorname{res}_1 \frac{z^{n-1}}{(z-1)^2} = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz} z^{n-1} = n-1\,.$$

5.40. Příklad. Pomocí Z transformace nalezněte součet

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2\,.$$

Řešení

$$(n^2) \doteq \frac{z^2+z}{(z-1)^3}\,.$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} k^2\right) \doteq \frac{z}{z-1}\frac{z^2+z}{(z-1)^2} = \frac{z^3+z^2}{(z-1)^4}\,.$$

$$\operatorname{res}_1 \frac{z^3+z^2}{(z-1)^4} z^{n-1} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{3!}(z^{n+2}+z^{n+1})''' =$$
$$= \frac{1}{3!}[(n+2)(n+1)n+(n+1)n(n-1)] = \frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1)\,.$$

Aplikace Z transformace pro řešení diferenčních rovnic

Motivace: teorie signálů, numerické řešení pariálních diferenciálních rovnic, ladder networks, ...

Diferenční rovnice mají podobnou struktutu jako rovnice diferenciální, hledá se řešení ve tvaru posloupnosti vyhovující počátečním podmínkám.
Řešení těchto rovnic pomocí transformace Z je diskrétní analogie řešení diferenciálních rovnic pomocí Laplaceovy transformace.

5.41. Příklad.

$$y_{n+2} + 2\,y_{n+1} + y_n = 0$$

$$y_0 = y_1 = 1\,.$$

(homogenní diferenční rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty)

$$(y_n)_{n=0}^{\infty} \doteq Y(z)\,.$$

$$(y_{n+1})_{n=0}^{\infty} \doteq z[Y(z) - y_0] = z(Y(z) - 1)\,.$$

$$(y_{n+2})_{n=0}^{\infty} \doteq z^2\left[Y(z) - y_0 - \frac{y_1}{z}\right] =$$

$$= z^2\left[Y(z) - 1 - \frac{1}{z}\right] = z^2Y(z) - z^2 - z\,.$$

Provedeme transformaci rovnice:

$$z^2Y(z) - z^2 - z + 2zY(z) - 2z + Y(z) = 0\,.$$

$$Y(z)(z^2 + 2z + 1) = z^2 + 3z\,.$$

$$Y(z) = \frac{z^2 + 3z}{(z+1)^2}\,.$$

Provedeme inverzní transformaci:

$n \geq 1$

$$y_n = \operatorname{res}_{-1} \frac{(z^2 + 3z)z^{n-1}}{(z+1)^2} = \lim_{z \to -1} (n+1)z^n + 3nz^{n-1} =$$

$$= (n+1)(-1)^n + 3n(-1)^{n-1} = (-1)^n(1 - 2n)\,.$$

$$(y_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 1, -3, 5, \dots)\,.$$

Mnohdy dává lepší představu než numerický výpočet, ve kterém se hromadí zaokrouhlovací chyby:

5.42. Příklad.

$$y_{n+2} = \frac{10}{3} y_{n+1} - y_n \,.$$

$$y_0 = 1, y_1 = \frac{1}{3} \,.$$

Transformace:

$$z^2[Y(z) - 1 - \frac{1}{3z}] = \frac{10}{3} z[Y(z) - 1] - Y(z)$$

$$Y(z)(z^2 - \frac{10}{3} z + 1) = z^2 + \frac{z}{3} - \frac{10}{3} z = z^2 - 3z$$

$$Y(z) = \frac{z^2 - 3z}{(z-3)(z-\frac{1}{3})} = \frac{z}{z - \frac{1}{3}} \doteq (\frac{1}{3^n})_{n=0}^{\infty}$$

Numerický výpočet na tři platné číslice dá nesmyslné výsledky:

$$y_0 = 1, y_1 = 0,333, ..., y_6 = -0,092, ..., y_{10} = -5,65$$

5.43. Příklad.

Fibonanciho čísla

Fibonanci (1212) Liber Abaci

Úloha o populaci králíků:

každý pár se zreprodukuje po dvou měsících

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233

Posloupnost se řídí zákonem

$$\overbrace{y_{n+2}}^{\text{co bude}} = \overbrace{y_{n+1}}^{\text{co je}} + \overbrace{y_n}^{\text{přírůstek}}$$

$$y_0 = y_1 = 1$$

Transformace rovnice:

$$z^2\left[Y(z) - 1 - \frac{1}{z}\right] = z[Y(z) - 1] + Y(z)$$

$$(z^2 - z - 1)Y(z) = z^2$$

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}$$

Inverze:

$$z\,\frac{z}{z^2-z-1} = z\,\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{z}{z-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{z}{z-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)$$

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

Kombinace dvou geometrických řad, jedna z nich mizí v nekonečnu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1,61803\,,$$

což je poměr zlatého řezu.

5.44. Příklad. $\Delta^2 y_n + y_n = 0$

$y_0 = 1, \Delta y_0 = 0\,.$

$$\Delta(y_n)_{n=0}^{\infty} \doteq (z-1)\,Y(z) - z$$

$$\Delta^2(y_n)_{n=0}^{\infty} = (z-1)[(z-1)Y(z)-z]-0 = (z-1)^2Y(z)-z(z-1)$$

$$[(z-1)^2+1]Y(z) = z(z-1)$$

$$Y(z) = \frac{z(z-1)}{(z-1)^2+1} = \frac{z^2-z}{z^2-2z+2} =$$
$$= z\frac{z-1}{(z-1-j)(z-1+j)} = z\left(\frac{A}{z-1-j}+\frac{B}{z-1+j}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}z\left(\frac{1}{z-1-j}+\frac{1}{z-1+j}\right).$$

$$y_n = \frac{1}{2}[(1+j)^n + (1-j)^n] = \mathrm{Re}(\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}})^n =$$
$$= 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}\,.$$

5.45. Příklad. $\Delta^2 y_n = 2$

$y_0 = 0, \Delta y_0 = 1$

$\Delta^2 (y_n)_{n=0}^{\infty} = (z-1)^2 Y(z) - z$

$Y(z)(z-1)^2 = 2\dfrac{z}{z-1} + z\,.$

$Y(z) = \dfrac{2z}{(z-1)^3} + \dfrac{z}{(z-1)^2}\,.$

$\operatorname{res}_1 \dfrac{z^n}{(z-1)^3} = \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{1}{2}(z^n)'' = \dfrac{1}{2} n(n-1)$

$y_n = n(n-1) + n = n^2\,.$

5.46. Příklad. Rovnice s konvolučním jádrem

$y_{n+2} + \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k\, y_{n-k} = 1$

$y_0 = y_1 = 0$

$z^2 Y(z) + \dfrac{z}{z-2} Y(z) = \dfrac{z}{z-1}\,.$

$Y(z) = \dfrac{z-2}{(z-1)^3}$

$$y_n = \operatorname{res}_1 \frac{(z-2)z^{n-1}}{(z-1)^3} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{2}(z^n - 2z^{n-1})'' =$$
$$= \frac{1}{2} n(n-1) - (n-1)(n-2) = (n-1)[2 - \frac{n}{2}]$$

5.47. Příklad. Vyjádřete vzorcem řešení diferenční rovnice

$$y_{n+1} - 2y_n = a_n\,,$$

kde $y_0 = 0$ a $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je obecná posloupnost ze Z_0.

Transformace:

$$zY(z) - 2Y(z) = F(z)\,,$$

kde $F(z)$ je obraz $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

$$Y(z) = \frac{F(z)}{z-2} \doteq (\mathbf{1}(n-1)2^{n-1})_{n=0}^{\infty} * (a_n)_{n=0}^{\infty}\,.$$

Pro $n \geq 1$

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} a_{n-k}\,.$$

5.48. Příklad. $y_{n+3} + y_n = a_n$

$y_0 = y_1 = y_3 = 0\,.$

$$Y(z) = \frac{F(z)}{z^3 + 1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^3+1} = \frac{1}{z^3}\frac{1}{1+\frac{1}{z^3}} &= \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \,\frac{1}{z^{3(n+1)}} \doteq \\
&\doteq (0,0,0,1,0,0,-1,0,0,1,0,0,-1,\dots)
\end{aligned}$$

$y_n = a_{n-3} - a_{n-6} + a_{n-9} - \dots$

5.49. Příklad. Pomocí diferenčních rovnic určete součet

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}\,.$$

Řešení:

$$y_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}\,.$$

$$y_{n+1}-y_n=\frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$y_0=0$$

$$\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n=0}^{\infty}\doteq\frac{2z}{(2z-1)^2}=\frac{1}{2}\frac{z}{(z-\frac{1}{2})^2}$$

$$\left(\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)_{n=0}^{\infty}\doteq\frac{1}{2}\frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})^2}$$

$$zY(z)-Y(z)=\frac{1}{2}\frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})^2}\,.$$

$$Y(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)}\frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})^2}$$

$$\mathrm{res}_1\,\frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)}\frac{z^{n+1}}{(z-\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{(\frac{1}{2})^2}=2\,.$$

$$\operatorname{res}_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)}\frac{z^{n+1}}{(z-\frac{1}{2})^2} =$$

$$= \lim_{z\to 1/2} \frac{1}{2}\left(\frac{z^{n+1}}{z-1}\right)' = \lim_{z\to 1/2} \frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)z^n(z-1)-z^{n+1}}{(z-1)^2} =$$

$$2\left[\frac{n+1}{2^n}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2^{n+1}}\right] = -\frac{n+1}{2^n} - \frac{1}{2^n}\,.$$

$$y_n = 2 - \frac{n+1}{2^n} - \frac{1}{2^n}\,.$$

6 Speciální funkce

Funkce $\Gamma(z)$

jedna z nejdůležitejších funkcí, vyrovná se významem exponenciální funkci a funkci goniometrické. Motivací je interpolovat přirozeným způsobem faktoriály

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n &= \frac{1}{2}n(n+1) \\ 1\cdot 2\cdots n &= ? \end{aligned}$$

Euler (1729): vyjádření funkce Γ ve tvaru nekonečného součinu.

Funci Γ budeme definovat ve dvou krocích, nejdříve pro $\operatorname{Re} z > 0$ pomocí integrálního vzorce, posléze pro obecné $z \in \mathbb{C}$ pomocí kombinace integrálu a nekonečné řady.

6.1. Definice. Funkce $\Gamma(z)$ je pro $z \in \mathbb{C}$ s $\operatorname{Re} z > 0$ definována integrálem

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1}\, dx\,.$$

(Přitom $x^{z-1} = e^{(z-1)\ln x}$, $x > 0$).

Existence příslušného integrálu:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}\,dx = \int_0^1 e^{-x}x^{z-1}\,dx + \int_1^\infty e^{-x}x^{z-1}\,dx\,.$$

$$|e^{-x}x^{z-1}| = |e^{-x}e^{(z-1)\ln x}| = e^{-x}\,x^{\operatorname{Re} z-1}\,.$$

Jelikož

$$\int_1^\infty e^{-x}x^{\operatorname{Re} z-1}\,dx < \infty$$

existuje integrál

$$\int_1^\infty e^{-x}x^{z-1}\,dx\,.$$

Pro $x \in (0,1)$ můžeme psát

$$|e^{-x}x^{z-1}| \le x^{\operatorname{Re} z-1}\,.$$

a tedy ($\operatorname{Re} z > 0$)

$$\int_0^1 |e^{-x}x^{z-1}|\,dx \le \int_0^1 x^{\operatorname{Re} z-1}\,dx = \left[\frac{x^{\operatorname{Re} z}}{\operatorname{Re} z}\right]_0^1 = \frac{1}{\operatorname{Re} z}\,.$$

6.2. Příklad. $$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 1\,.$$

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-x}x^{-1/2}\,dx$$

Substituce: $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t^2}(t^2)^{-1/2}\,2t\,dt = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}\,.$$

Pro $z = 0$ memá integrál definující funkci $\Gamma(z)$ smysl:

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx \geq \frac{1}{e}\int_0^1 \frac{1}{x} = \frac{1}{e}[\ln x]_0^1 = \infty\,.$$

6.3. Tvrzení. $\boxed{\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)\,.}$

Důkaz:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^z \, dx =$$

$$\begin{array}{ll} u' = e^{-x} & v = x^z \\ u = -e^{-x} & v' = zx^{z-1} \end{array}$$

$$= [-e^{-x}x^z]_0^\infty + \int_0^\infty z e^{-x} x^{z-1} \, dx = z\Gamma(z)\,.$$

$|e^{z \ln x}| = e^{\operatorname{Re} z \ln x} \longrightarrow 0$ pro $x \to 0\,.$

Důsledek:

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$$

6.4. Příklad. $\displaystyle\int_0^\infty x^{100} e^{-x} \, dx = \Gamma(101) = 100!$

6.5. Příklad. Spočtěte $\Gamma(5/2)$.

$$\Gamma(5/2) = \Gamma(3/2+1) = 3/2\Gamma(3/2) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{4}\sqrt{}$$

Na funkci Γ vede řada důležitých integrálů:

6.6. Příklad. Vyjádřete Laplaceův obraz funkce $f(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$, pomocí funkce Γ.

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} t^\alpha \, dt$$

Substituce

$$u = pt$$

($p > 0$)

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-u}\frac{u^\alpha}{p^\alpha}\frac{1}{p}\, du = \frac{1}{p^{\alpha+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^\alpha \, du = \frac{1}{p^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha+1)\,.$$

6.7. Příklad. Spočtěte momenty gaussovských funkcí

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2}\, dx.$$

Substituce: $u = x^2$, $x = u^{1/2}$, $du = 2x\, dx$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2}\, dx = 2 \int_0^{\infty} x^{2k} e^{-x^2}\, dx = 2 \int_0^{\infty} u^k\, e^{-u}\, \frac{du}{2u^{1/2}} =$$

$$= \int_0^{\infty} u^{k-1/2} e^{-u}\, du = \Gamma(k - \frac{1}{2} + 1) = \Gamma(k + \frac{1}{2})\,.$$

Funce $\Gamma(x)$ je na reálné ose kladná, je rostoucí pro $x > 1$, a proto $\lim_{x\to\infty} \Gamma(x) = \infty$. Jaké je chování funkce u nuly a jak ji rozšířit na větší množinu? Základem je následující věta:

6.8. Věta. (i) *Funkce*

$$f(z) = \int_1^\infty e^{-x} x^{z-1}\, dx$$

je holomorfní v $\mathbb{C}$*.*

(ii) *Funkce*

$$g(z) = \int_0^1 e^{-x} x^{z-1}\, dx$$

je holomorfní v $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$*.*

(iii) *Funkce* $\Gamma(z)$ *je holomorfní v množině* $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$*.*

Důkaz je založen na rozvoji v mocninnou řadu - viz skripta.

6.9. Věta. $$\boxed{\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{\infty} e^{-x} x^{z-1}\, dx}$$

Hlavní myšlenkou důkazu je rozvoj integrálu $\int_0^1 e^{-x} x^{z-1}\, dx$ v mocninnou řadu - detaily viz skripta.

$$e^{-x} x^{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+z-1}\,.$$

Integrací získáme pro $\varrho > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_{\varrho}^{1} e^{-x} x^{z-1}\, dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{\varrho}^{1} x^{n+z-1}\, dx = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z}(1-\varrho^{n+z}) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\varrho^{n+z}}{n+z}}_{\to 0 \text{ pro } \varrho \to 0}\,.
\end{aligned}$$

Otázka konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$:

6.10. Tvrzení. *Pro dané* $\varepsilon > 0$ *je řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$$

stejnoměrně konvergentní na množině
$K_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid \min_{n=0,1,\dots} |z+n| \geq \varepsilon\}$.
Funkce

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$$

je holomorfní v množině $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Důkaz:

Pro $z \in K_\varepsilon$:

$$\left| \frac{(-1)^n}{n!\,(n+z)} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{(-1)^n}{n!} \,.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{\varepsilon} e^{-1} \,.$$

Podle Weierstrasseova kritéria konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}$ stejnoměrně na K_ε. Její součet je tedy holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

6.11. Definice. Funkce $\Gamma(z)$ je funkce definovaná na $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ vztahem

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{\infty} e^{-x} x^{z-1} \, dx \, .$$

6.12. Věta. *Funkce $\Gamma(z)$ je funkce holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ a má jednoduché poly v bodech $0, -1, -2, \dots$. Přitom*

$$\operatorname{res}_{-n} F(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \qquad \textit{pro } n = 0, 1, \dots \, .$$

6.13. Důsledek. *Funce $\frac{1}{\Gamma(z)}$ dodefinovaná nulou v $0, -1, -2, \dots$ je holomorfní funkce v $\mathbb{C}$ mající kořeny právě v bodech $0, -1, -2, \dots$.*

Asymptotické chování funkce Γ:

6.14. Věta. Stirlingův vzorec
Pro libovolné reálné číslo $s > 0$ *existuje* $\omega_s \in < -1, 1 >$ *tak, že*

$$\Gamma(s+1) = \sqrt{2s}\, s^s\, e^{-s} \left(\sqrt{\pi} + \frac{\omega_s}{\sqrt{2s}} \right).$$

Důkaz viz skripta

6.15. Důsledek. *Pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *existuje* $\omega_n \in < -1, 1 >$ *tak, že*

$$n! = \sqrt{2n}\, n^n e^{-n} \left(\sqrt{\pi} + \frac{\omega_n}{\sqrt{2n}} \right)$$

$$\boxed{n! \approx n^n\, e^{-n} \sqrt{2\pi n}}$$

6.16. Příklad. Je-li $n = 1000$ je $1000!$ v intervalu s koncovými body

$$\sqrt{2000}\, 1000^{1000}\, e^{-1000} \sqrt{\pi} \pm 1000^{1000} e^{-1000}$$

Besselovy funkce

motivovány řešením **Besselovy rovnice:**

$$z^2\, y'' + z\, y' + (z^2 - \nu^2)\, y = 0 \tag{3}$$

$$\nu \in \mathbb{C}$$

Řešením myslíme funkci $y(z)$ holomorfní v oblasti neobsahující nulu. Besselova rovnice je lineární diferenciální rovnicí druhého řádu. Množinou řešení je lineární prostor dimenze dva.

Řešení budeme hledat ve tvaru zobecněné mocninné řady

$$y(z) = z^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\, z^{2n}\,.$$

$$\begin{aligned}
y(z) &= z^\nu \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\, z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\, z^{2n+\nu} \\
y'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(2n+\nu)\, z^{2n+\nu-1} \\
y''(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(2n+\nu)(2n+\nu-1)\, z^{2n+\nu-2}
\end{aligned}$$

Dosazením do rovnice máme:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(2n+\nu)(2n+\nu-1)\, z^{2n+\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(2n+\nu)\, z^{2n+\nu}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\, z^{2n+\nu+2} - \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\, z^{2n+\nu} =$$
$$= 0$$

Vydělením z^{ν} a srovnáním koeficientů u z^{2n} dostaneme

$$\overbrace{a_{2n}(\nu+2n)(\nu+2n-1) + a_{2n}(\nu+2n)}^{a_{2n}(\nu+2n)^2}$$
$$+ a_{2n-2} - \nu^2\, a_{2n} = 0\,.$$

$$-a_{2n-2} = a_{2n}[(\nu+2n)^2 - \nu^2]$$

$$-a_{2n-2} = a_{2n}[4\nu n + 4n^2]$$

$$-a_{2n-2} = a_{2n}(2\nu+2n)\cdot 2n$$

Rekurentní podmínce vyhovují

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)\, 2^{2n+\nu}}$$

Ověření:

$$a_{2n}(2\nu+2n)\cdot 2n = \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)\,2^{2n+\nu}}\cdot 2(\nu+n)\cdot 2n =$$
$$= \frac{(-1)^n}{(n-1)!\,\Gamma(\nu+n)\,2^{2n-2+\nu}} = -a_{2(n-1)}$$

Řešení Besselovy rovnice tedy je funkce

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{z}{2})^{2n+\nu}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}\,.$$

Podílovým kritériem je možno ověřit, že řada konverguje pro všechna $z \in \mathbb{C}$.

Konvence:

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0, n \in \mathbb{N}\,.$$

6.17. Definice. Besselova funkce prvního druhu řádu ν je funkce

$$\boxed{J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{z}{2})^{2n+\nu}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}}$$

6.18. Příklad.

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{n!\,\Gamma(n+1)\cdot 2^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(n!)^2\, 2^{2n}} =$$

$$= 1 - \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{64} - \frac{z^6}{4096} + \cdots$$

6.19. Příklad.

$$J_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!\,\Gamma(n+2)\cdot 2^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!\,(n+1)!\, 2^{2n+1}} =$$

$$= \frac{z}{2} - \frac{z^3}{16} + \frac{z^5}{384} - \cdots$$

6.20. Příklad.

$$J_{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-1}}{n!\,\Gamma(n)\cdot 2^{2n-1}} = -\frac{z}{2} + \frac{z^3}{16} - \frac{z^5}{384} + \cdots$$

6.21. Věta. *Funkce $J_\nu(z)$ a $J_{-\nu}(z)$ jsou řešením Besselovy rovnice. Je-li navíc $\nu \notin \mathbb{Z}$ tvoří $J_\nu(z)$ a $J_{-\nu}(z)$ bázi prostoru všech řešení Besselovy rovnice.*

Důkaz:
Vyplývá z dřívějšího, stačí pouze ukázat, že $J_\nu(z)$ a $J_{-\nu}(z)$ jsou lineárně nezávislé pro $\nu \notin \mathbb{Z}$.

Sporem: existuje nenulové $c \in \mathbb{C}$ tak, že

$$c \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n+\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{2n-\nu}$$

Tedy $(a_0 \neq 0)$

$$cz^{2\nu} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{2n}}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}}$$

Na pravé straně je sudá holomorfní funkce. Funkce $z^{2\nu}$ je však holomorfní pouze když 2ν je celé číslo. V úvahu tedy přichází pouze případ 2ν je liché číslo, což nedá sudou funkci-spor.

Jak je to s řešením Besselovy rovnice pro n celočíselné?

6.22. Tvrzení. $J_{-n}(z) = (-1)^n \, J_n(z)$ *pro* $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz:

$$J_{-n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \, \Gamma(k-n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \, \Gamma(k-n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{1}{(m+n)! \, \Gamma(m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} =$$

$$= (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m! \, \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} = (-1)^n \, J_n(z) \, .$$

6.23. Tvrzení. Rekurentní vztahy pro Besselovy funkce

(i) $J'_\nu(z) = \frac{1}{2}[J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)]$

(ii) $\frac{2\nu}{z} J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)$

(iii) $J'_0(z) = -J_1(z)$

6.24. Příklad. $$J_2(z) = \frac{2}{z} J_1(z) - J_0(z)\,.$$

6.25. Tvrzení.

$$J_{1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin z$$
$$J_{-1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos z$$

Důkaz:

$$J_{1/2}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{z}{2})^{2n}}{n!\,\Gamma(1/2+n+1)}\,.$$

$$n!\ \Gamma(1/2+n+1) = n!\cdot(n+1/2)(n+1/2-1)\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi} =$$
$$= n!\,\frac{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}\,.$$

$$n!\,1\cdot 3\cdots(2n+1) = n!\,\frac{(2n+1)!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2n} =$$
$$= 1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot\frac{(2n+1)!}{2\cdot\underbrace{4\cdot 6\cdots 2n}_{2^{n-1}\times}} = \frac{(2n+1)!}{2^n}$$

$$n!\ \Gamma(1/2+n+1) = \frac{(2n+1)!\sqrt{\pi}}{2^n\cdot 2^{n+1}} = \frac{(2n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}\,.$$

$$J_{1/2}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\frac{z}{2})^{2n}}{n!\,\Gamma(1/2+n+1)} =$$
$$\left(\frac{z}{2}\right)^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\frac{z}{2})^{2n}}{(2n+1)!\sqrt{\pi}}2^{2n+1} =$$
$$= \left(\frac{2}{\pi\,z}\right)^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,z^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$
$$\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\ \sin z$$

6.26. Příklad. Nalezněte $J_{3/2}(z)$.

Identita (ii) pro $\nu = 1/2$.

$$\frac{2 \cdot 1/2}{z} J_{1/2}(z) = J_{-1/2}(z) + J_{3/2}(z)\,.$$

$$J_{3/2}(z) = \frac{1}{z} J_{1/2}(z) - J_{-1/2}(z) = \frac{1}{z}\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z - \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z\,.$$

Lieuville: Pouze v těchto případech, $\nu = 1/2 + k$, $k \in \mathbb{Z}$, je $J_\nu(z)$ popsatelené pomocí elementárních funkcí.

6.27. Definice. Neumannova (Weberova) funkce řádu ν, $N_\nu(z)$, je definována vztahem

$$N_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi\nu}$$

je-li $\nu \notin \mathbb{Z}$.

$$N_n(z) = \lim_{\nu \to n} N_\nu(z)$$

pro $n \in \mathbb{N}$.
(Existence limity je netriviální skutečnost.)

6.28. Věta. *$J_\nu(z)$ a $N_\nu(z)$ je báze prostoru všech řešení Besselovy rovnice.*

$N_n(z)$ má singularitu v nule:

$$N_n(x) \approx -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n$$

pro $x \to 0+$.

Aproximace pro velké reálné hodnoty :

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos(z - \frac{\nu\,\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \\ N_\nu(z) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin(z - \frac{\nu\,\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

(Cylindrické vlny)

$$N_{-n}(z) = (-1)^n N_n(z)$$

Jiná báze řešení je tvořená **Henkelovými funkcemi**:

$$
\begin{aligned}
H_\nu^{(1)}(z) &= J_\nu(z) + j\,N_\nu(z) \\
H_\nu^{(2)}(z) &= J_\nu(z) - j\,N_\nu(z)
\end{aligned}
$$

Aplikace Besselových funkcí pro řešení diferenciálních rovnic

1. Modifikace Besselovy rovnice, $\beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$.

$$\boxed{z^2 v''(z) + z\,v(z)' + (z^2\,\beta^2 - \nu^2)\,v(z) = 0}$$

Je-li $y(z)$ řešení Besselovy rovnice, pak

$$v(z) = y(\beta z)$$

je řešení 1. modifikace Besselovy rovnice.

$$v'(z) = \beta\,y'(\beta\,z)\,, \quad v''(z) = \beta^2\,y''(\beta\,z)$$

Dosazením do rovnice :

$$z^2\beta^2 y''(\beta z) + z\beta y'(\beta z) + (z^2\beta^2 - \nu^2)\,y(\beta\,z) = 0\,.$$

Kmity rovinné membrány

Rovnice vlnění:

$$\Delta u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad a > 0$$

$a > 0$.

$u(x, y, t)$ – výchylka v čase t v bodě (x, y).

Připomenutí Laplaceova operátoru:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Hledáme řešení ve tvaru

$$u(x, y, t) = \underbrace{v(x, y)}_{\text{amplituda}}\, e^{j\omega t}$$

$\omega > 0$

$$e^{j\omega t}\,\Delta v + \frac{\omega^2}{a^2}\, v e^{j\omega t} = 0$$

Vede na **Helmholtzovu rovnici**

$$\boxed{\Delta v + k^2 v = 0}$$

$$k = \frac{\omega}{a}$$

Zavedeme polární souřadnice:

$$v(x, y) = v(\varrho, \varphi)\,.$$

Přepočet Laplaceova operátoru je

$$\Delta v(\varrho, \varphi) = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}$$

Činíme předpoklad

$$v = f(\varrho)$$

tj. že v závisí pouze na ϱ - radiální vlna.

Helmholtzova rovnice se transformuje do podoby:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + k^2 v = 0$$

$$\varrho^2\frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + \varrho\frac{\partial v}{\partial \varrho} + \varrho^2 k^2 v = 0$$

Pro funkci $v(\varrho)$ je výše uvedená rovnice Helmhotzovou rovnicí s $\beta = k$.

Řešení je tedy funkce

$$v(\varrho) = J_0(k\varrho)$$

Závěr: jedno z řešení rovnice kmitů je

$$u(x, y, z) = J_0\left(\frac{\omega}{a}\sqrt{x^2 + y^2}\right) e^{j\omega t}$$

---

2. modifikace Besselovy rovnice

$$\boxed{z^2 w'' + z(1 - 2\alpha)w' + (\beta^2 z^2 + \alpha^2 - \nu^2)w = 0}$$

$\alpha, \beta, \nu \in \mathbb{C}$

Pokud $v(z)$ řeší 1. modifikaci Besselovy rovnice, pak

$$w(z) = z^\alpha\, v(z)$$

řeší druhou modifikaci Besselovy rovnice.

$$\begin{aligned} w(z) &= z^\alpha\, v(z) \\ w'(z) &= \alpha z^{\alpha-1} v(z) + z^\alpha v'(z) \\ w''(z) &= \alpha(\alpha - 1) z^{\alpha-2} v(z) + 2\alpha z^{\alpha-1} v'(z) + z^\alpha v''(z)\,. \end{aligned}$$

Dosazením do 2. modifikace Besselovy rovnice

$$
\begin{aligned}
&\alpha(\alpha-1)z^\alpha v + 2\alpha z^{\alpha+1}v' + z^{\alpha+2}v'' + \\
&\qquad + (1-2\alpha)\alpha z^\alpha v + (1-2\alpha)z^{\alpha+1}v' + \\
&\qquad\qquad + \beta^2 z^{\alpha+2}v + (\alpha^2-\nu^2)z^\alpha v\,.
\end{aligned}
$$

Vydělením z^α dostaneme

$$
\begin{aligned}
&\alpha(\alpha-1)v + 2\alpha z v' + z^2 v'' + \\
&\qquad + (1-2\alpha)\alpha v + (1-2\alpha)zv' + \\
&\qquad\qquad + \beta^2 z^2 v + (\alpha^2-\nu^2)z^\alpha v\,.
\end{aligned}
$$

Po úpravě

$$z^2v'' + zv + (z^2\beta^2 - \nu^2)v = 0$$

Prostorová vlna

$$\Delta u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$u(x, y, x, t)$ .... hodnota v čase t a prostorovém bodě (x, y, z).

Hledáme řešení ve tvaru:

$$u(x, y, z, t) = v(x, y, z)e^{j\omega t}$$

Dospějeme opět k Helmholtzově rovnici:

$$\Delta v + k^2 v = 0\,.$$

Vyjádření Laplaceova operátoru ve sférických souřadnicích $(\varrho, \varphi, \vartheta)$:

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + \frac{2}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos\vartheta}{\varrho^2}\frac{\partial v}{\partial \vartheta}$$

Další předpoklad:

$$v = f(\varrho)$$

sférická vlna.

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + \frac{2}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial \varrho}\,.$$

Po dosazení do rovnice máme

$$\varrho^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + 2\varrho \frac{\partial v}{\partial \varrho} + k^2 \varrho^2 v = 0$$

Je druhá modifikace Besselovy rovnice pro $1 - 2\alpha = 2$ tj. $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = k$, $\nu = \frac{1}{2}$.

Řešení:

$$v(\varrho) = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} J_{1/2}(k\varrho) = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \left(\frac{2}{\pi k \varrho} \right)^{1/2} \sin k\varrho = \frac{\sqrt{2}}{\varrho \sqrt{\pi k}} \sin k\varrho$$

Závěr:

$$u(x,y,z,t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{\pi k}} \sin(k\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,.$$

Obecné řešení je dáno tzv. sférickými funkcemi, ve kterých hrají Besselovy funkce důležitou roli.

7 Maticový počet

Základy lineární algebry (opakování a značení)

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots , x_n) \in \mathbb{C}^n \,.$$

Obvyklé aritmetické operace, skalární součin

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n} \,.$$

$B = \{\mathbf{b}_1, \dots , \mathbf{b}_n\}$ .... báze prostoru $\mathbb{C}^n$ pak

$[\mathbf{x}]_B =$ souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi B.

$\mathbf{e}_1, \dots , \mathbf{e}_n =$ standardní báze prostoru $\mathbb{C}^n$.

$$\mathbf{e_1} = (1, 0, \dots , 0) \,, \mathbf{e_2} = (0, 1, 0, \dots , 0) \,, \dots$$

$\mathbf{M}_{m\times n}$ ...
komplexní matice typu $m \times n$ (m řádků a n sloupců)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = (a_{ij})$$

Zápis:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{s_1} & \mathbf{s_2} & \dots & \mathbf{s_n} \end{pmatrix}$$

matice se sloupci $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r_1} \\ \mathbf{r_2} \\ \vdots \\ \mathbf{r_m} \end{pmatrix}$$

matice s řádky $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m$

Součin matic $\mathbf{A} \in M_{m \times k}$ a $\mathbf{B} \in M_{k \times n}$ je matice $\mathbf{C} \in M_{m \times n}$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix}$$

kde

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir}\, b_{rj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$

V případě kdy matice A a B jsou reálné je

$$c_{ij} = < \mathbf{r_i}, \mathbf{s_j} >$$

kde $\mathbf{r_i}$ je i-tý řádek matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{s_j}$ je j-tý sloupec matice $\mathbf{B}$.

7.1. Příklad.

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)$$

7.2. Příklad.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot (y_1, \dots, y_n) = (x_i y_j)_{ij} \in M_{n \times n}$$

7.3. Příklad.

Symbolem $\mathbf{Ax}$ rozumíme:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \mathbf{s_1} + x_2 \mathbf{s_2} + \cdots x_n \mathbf{s_n}$$

lineární kombinace sloupců.

7.4. Příklad. Symbolem $\mathbf{xA}$ rozumíme:

$$(x_1, \dots, x_m) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \dots + x_m a_{m1}, x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + \dots + x_m a_{m2}, \dots) =$$

$$x_1 \mathbf{r_1} + x_2 \mathbf{r_2} + \dots + x_m \mathbf{r_m}$$

lineární kombinace řádků

7.5. Příklad. $\mathbf{A} \in M_{n \times n}$

$$\mathbf{A}\mathbf{e_i} = \mathbf{s_i}$$

7.6. Příklad. $\mathbf{A} \in M_{n \times n}$

$$\mathbf{e_i}\mathbf{A} = \mathbf{r_i}$$

• *Transponovaná matice* k matici $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ je matice typu $n \times m$, $\mathbf{A}^T = (b_{ij})$, definová vztahem

$$b_{ij} = a_{ji}$$

• *Adjungovaná matice* k matici $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ je matice typu $n \times m$, $\mathbf{A}^* = (b_{ij})$, definová vztahem

$$b_{ij} = \overline{a}_{ji}$$

Některé vlastnosti součinu matic: neni komutativní, je asociativní, distributivní vůči sčítání,

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^* \mathbf{A}^*$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$$

7.7. Definice. *Lineární zobrazení* $T : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^m$ je zobrazení vyhovující následující podmínce pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$T(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha T(\mathbf{x}) + \beta T(\mathbf{y})\,.$$

Standardní matice lineárního zobrazení T je matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$, pro kterou platí

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{A} = \big(T(\mathbf{e_1}) \;\; T(\mathbf{e_2}) \;\; \ldots \;\; T(\mathbf{e_n})\big)$$

Je-li $U = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ báze $\mathbb{C}^n$
a $V = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ báze prostoru $\mathbb{C}^m$,
pak *matice lineárního zobrazení* T vůči bázím U a V je taková matice A typu $m \times n$, pro kterou platí

$$[T(\mathbf{x})]_V = \mathbf{A}[\mathbf{x}]_U$$

Platí, že

$$\mathbf{A} = \big([T(\mathbf{u_1})]_V \;\; [T(\mathbf{u_2})]_V \;\; \ldots \;\; [T(\mathbf{u_n})]_V\big)$$

7.8. Příklad. Popište transformaci v rovině $\mathbb{R}^2$ danou otočením kolem počátku o úhel α v kladném smyslu.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$T(x,y) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha)$$

Jsou-li $T_1 : \mathbb{C}^m \mapsto \mathbb{C}^k$ a $T_2 : \mathbb{C}^k \mapsto \mathbb{C}^n$ lineární zobrazení s maticemi $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, pak matice lineárního zobrazení $T_2 \circ T_1$ je matice $\mathbf{BA}$.

Je-li dané lineární zobrazení prosté s maticí A, je matice inverzního zobrazení matice inverzní A^{-1}.

7.9. Příklad. V prostoru popište transformaci, která vznikne otočením kolem osy x o úhel α v kladném smyslu následované otočením kolem osy y o úhel β v kladném smyslu.

Transformační matice:

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta\sin\alpha & -\sin\beta\cos\alpha \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta\sin\alpha & \cos\beta\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Lineární zobrazení $T : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$ má standardní matici $\mathbf{A}$. Vzhledem k bázi

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots , \mathbf{b}_n\}$$

má zobrazení T matici

$$\mathbf{B}$$

Jaký je vztah mezi maticemi $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$?

Zvolme matici

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix}\mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \cdots & \mathbf{b_n}\end{pmatrix}$$

Pak $\mathbf{P}$ je regulární matice a pro všechna $i = 1, \dots n$

$$\mathbf{P}\mathbf{e_i} = \mathbf{b}_i \qquad \mathbf{e_i} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{b_i}$$

- Pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ platí:

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{x}$$

Skutečně, je-li

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{b_1} + \alpha_2\mathbf{b_2} + \cdots + \alpha_n\mathbf{b_n}\,,$$

tj. je-li

$$(\alpha_1, \dots , \alpha_n) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

pak

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{b_1} + \alpha_2 \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b_2} + \cdots + \alpha_n\,\mathbf{P}^{-1}\mathbf{b_n} =$$

$$= \alpha_1\,\mathbf{e_1} + \alpha_2\,\mathbf{e_2} + \cdots + \alpha_n\,\mathbf{e_n} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

- pro matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ platí:

$$\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}}$$

Důkaz:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{e_i} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{b_i} = [\mathbf{A}\mathbf{b_i}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{b}_i)]_{\mathcal{B}}$$

7.10. Příklad. Lineární zobrazení T má standardní matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Stanovte jeho matici vůči bázi

$$\mathcal{B} = \{(1,1),(0,1)\}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory matic

7.11. Definice. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Komplexní číslo λ se nazývá *vlastní číslo* (*charakteristické číslo*) matice $\mathbf{A}$, jestliže existuje nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ takový, že

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \, .$$

Vektory $\mathbf{v}$ splňující tuto identitu se nazývají *vlastní (charakteristické vektory)* matice $\mathbf{A}$ příslušné vlastnímu číslu λ.

Spektrum, $\sigma(\mathbf{A})$, matice $\mathbf{A}$ je množina všech vlastních čísel matice A.

Je spektrum neprázdná množina?

$\mathbf{E}$ ... jednotková matice příslušného řádu

7.12. Tvrzení. *λ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ právě tehdy když*

$$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$$

Důkaz:

Vektor $\mathbf{v}$ je řešením soustavy

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\,,$$

což je homogenní soustava s maticí

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = 0\,.$$

Tato soustava má nenulové řešení právě tehdy když je matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ singulární, tj. právě tehdy když

$$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0\,.$$

Polynom

$$p(\lambda) = det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$$

je polynom stupně n, který má n kořenů, včetně násobnosti.

7.13. Důsledek. *Matice řádu n má celkem n vlastních čísel (včetně násobnosti).*

7.14. Definice. Polynom $p(\lambda) = det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ se nazývá *charakteristický polynom* matice $\mathbf{A}$.
Rovnice $p(\lambda) = 0$ se nazývá *charakteristická rovnice* matice $\mathbf{A}$.

7.15. Důsledek. *Matice* $\mathbf{A}$ *.řádu* n *je singulární právě tehdy když* $0 \in \sigma(\mathbf{A})$ *.*

7.16. Příklad. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)\lambda$$

$\lambda = 1$:
soustava

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

má řešení: $t(1, 0)$, $t \in \mathbb{C}$.
$\lambda = 0$:
soustava

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

má řešení: $t(0, 1)$, $t \in \mathbb{C}$.

7.17. Příklad. Jednotková matice $\mathbf{E}$ má pouze jediné vlastní číslo $\lambda = 1$ a všechny vektory v $\mathbb{C}^n$ jsou jejími charakteristickými vektory.

7.18. Příklad. Matice otočení

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 = 0$$

$$D = 4\cos\alpha^2 - 4 = 4(\cos^2\alpha - 1) = -4\sin^2\alpha$$

$$\lambda_{12} = \frac{2\cos\alpha \pm 2j\sin\alpha}{2} = \cos\alpha \pm j\sin\alpha\,.$$

Obecně, reálná matice má komplexně sdružená vlastní čísla.

7.19. Tvrzení. *Je-li $\mathbf{A}$ dolní (nebo horní) trojúhelníková matice, pak spektrum matice $\mathbf{A}$ je rovno množine diagonálních prvků.*

Důkaz:

$$det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_2 & 0 & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = 0$$

$$(a_{11}-\lambda_1)\cdot(a_{22}-\lambda_2)\cdots(a_{nn}-\lambda_n) = 0$$

Tedy

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{a_{11}, a_{22}, \dots , a_{nn}\}\,.$$

Vlastní čísla a vektory umožňují lépe popsat lineární zobrazení.

7.20. Příklad. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

$$det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)-30 =$$
$$\lambda^2-3\lambda-28 = (\lambda-7)(\lambda+4)$$

$\lambda_{1,2} = 7, -4\,.$

$$\lambda_1 = 7 \qquad \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektory jsou násobky vektoru $(1, 1)$.

$$\lambda_2 = -4 \qquad \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla jsou násobky vektoru $(-6, 5)$.

• numerické aspekty výpočtu vlastních čísel:

• neexistuje konečný algoritmus

• řada přibližných algoritmů počítající vlastní čísla přímo (QR algoritmus apod.).

Vlastní čísla umožní výpočet vysokých mocnin matice, aplikace na dynamické systémy, Markovovy procesy apod.

7.21. Příklad. Každý rok se z centra města přestěhuje 5% obyvatelstva do okrajové čtvrti a 3% se naopak přestěhují z okrajové čtvrti do centra. Na počátku žije 60% obyvatelstva v centru a 40% v okrajové čtvrti. Jak se bude složení obyvatelstva vyvíjet?
Migrační vektor:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

kde x_1 je podíl centra a x_2 je podíl okrajových čtvtrtí

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0,95x_1 + 0,03x_2 \\ 0,97x_2 + 0,05x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Vývoj:

$$\mathbf{x_0} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{A}\mathbf{x_k}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla:

$$\begin{vmatrix} 0,95-\lambda & 0,03 \\ 0,05 & 0,97-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1,92\lambda + 0,92$$

Kořeny charakteristického polynomu:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,92$$

Pro $\lambda_1 = 1$ jsou charakteristické vektory násobky vektoru

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0,375 \\ 0,625 \end{pmatrix}$$

Pro $\lambda = 0,92$ jsou charakteristické vektory násobky vektoru

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2}$$

kde $c_1 = 1$ $c_2 = 0,225$.

$$\mathbf{A}^k\mathbf{x_0} = c_1\lambda_1^k\mathbf{v_1} + c_2\lambda_2^k\mathbf{v_2} = c_1\mathbf{v_1} + c_2 0,92^k\mathbf{v_2}$$

Tedy

$$\mathbf{A}^k\mathbf{x_0} \to c_1\mathbf{v_1} = \mathbf{v_1} \text{ pro } k \to \infty$$

Závěr: systém spěje do rovnovážného stavu 37,5 % v centru a 62,5 % na okraji.

Vlastnosti dynamického systému závisí na velikosti vlastních čísel.

Některé body diskuse: $\mathbf{A}$ je matice 2×2 s kolmými vlastními vektory a vlastními čísly λ_1, λ_2.

1. $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1.$

přitahováno do (0,0).

2. $\lambda_1, \lambda_2 > 1$
jde do nekonečna z každé nenulové pozice

3. $\lambda_1 > 1, 0 < \lambda_2 < 1$
$(0, 0)$ je sedlový bod.

Aplikace pro řešení soustav lineárních rovnic:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$\mathbf{A} \in M_{n\times n}$, $\mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$

Předpokládejme, že existuje báze $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ složená z vlastních vektorů matice A příslušných k vlastním číslům $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Vyjádříme vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{b}$ vzhledem k bázi $\{\mathbf{v}_1, \dots , \mathbf{v}_n\}$.

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_2\mathbf{v_2} + \cdots + \alpha_n\mathbf{v_n}$$

$$\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{v_1} + \beta_2\mathbf{v_2} + \cdots + \alpha_n\mathbf{v_n}$$

a dosadíme do rovnice

$$\alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_1\mathbf{v_2} + \cdots + \alpha_n\lambda_n\mathbf{v}_n = \beta_1\mathbf{v_1} + \beta_2\mathbf{v_2} + \cdots + \beta_n\mathbf{v_n}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1\lambda_1 &= \beta_1 \\ \alpha_2\lambda_2 &= \beta_2 \\ \dots \end{aligned}$$

Za předpokladu nenulovosti všech vlastních čísel je

$$\mathbf{x} = \frac{\beta_1}{\lambda_1}\mathbf{v_1} + \frac{\beta_2}{\lambda_2}\mathbf{v_2} + \cdots + \frac{\beta_n}{\lambda_n}\mathbf{v_n}$$

Obecně, jsou-li nenulová vlastní čísla $\lambda_1, \dots , \lambda_k$, pak

$$\mathbf{x} = \frac{\beta_1}{\lambda_1}\mathbf{v_1} + \cdots + \frac{\beta_k}{\lambda_k}\mathbf{v_k} + \mathbf{y}\,,$$

kde $\mathbf{y}$ je jakýkoliv vlastní vektor matice $\mathbf{A}$ příslušný vlastnímu číslu 0.

Pro výpočet mocnin matice $\mathbf{A}$ je výhodné když existuje báze složená z vlastních vektorů. To není vždy splněno:

7.22. Příklad. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{1\} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Všechny charakteristické vektory jsou násobky vektoru $(1, 0)$ a tedy netvoří bázi prostoru $\mathbb{C}^2$.

7.23. Definice. Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ typu $n \times n$ se nazývají *podobné*, jestliže existuje regulární matice P tak, že

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\,.$$

• Podobnost je ekvivalence na množině $M_{n\times n}$.
• Podobné matice mají stejný determinant.
• Podobné matice mají stejné spektrum a charakteristický polynom
• je-li T lineární zobrazení z $\mathbb{C}^n$ do $\mathbb{C}^n$, pak všechny jeho matice vůči zvoleným bázím jsou podobné.

7.24. Definice. Je-li T lineární zobrazení z $\mathbb{C}^n$ do $\mathbb{C}^n$ pak $\lambda \in \mathbb{C}$ je *vlastní číslo zobrazení* T existuje-li nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ tak, že

$$T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$$

Jedná se o vlastní čísla matic zobrazení T.

Struktura vlastních vektorů

Značení: pro $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$

$$C_\lambda(\mathbf{A}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}\}.$$

7.25. Tvrzení. *Nechť* $\mathbf{A}$ *je matice* $n \times n$. *Pak platí následujcí tvrzení*

(i) $C_\lambda(\mathbf{A})$ *je podprostor prostoru* $\mathbb{C}^n$.

(ii) *Nenulové charakteristické vektory příslušné různým vlastním číslům matice* $\mathbf{A}$ *jsou lineárně nezávislé.*

(iii) *Dimenze prostoru* $C_\lambda(\mathbf{A})$ *je nejvýše rovna násobnosti* λ *jako kořene charakteristického polynomu matice* $\mathbf{A}$.

Důkaz:(i) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in C_\lambda(\mathbf{A})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\mathbf{A}(\alpha \mathbf{v_1} + \beta \mathbf{v_2}) = \alpha\lambda \mathbf{v_1} + \beta\lambda \mathbf{v_2} = \lambda(\alpha \mathbf{v_1} + \beta \mathbf{v_2})$$

(ii) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ jsou vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Předpokládejme, že λ_1 má největší absolutní hodnotu.

$$\alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2} + \cdots + \alpha_k \mathbf{v_k} = 0 \qquad / \cdot \mathbf{A}^m$$

$$\alpha_1 \lambda_1^m \mathbf{v_1} + \alpha_2 \lambda_2^m \mathbf{v_2} + \cdots + \alpha_k \lambda_1^m \mathbf{v_k} = 0 \quad / \cdot \frac{1}{\lambda_1^m}.$$

$$\alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m \mathbf{v_2} + \cdots + \alpha_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^m \mathbf{v_k} = 0$$

$$\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1, \qquad i > 1$$

Limitním přechodem $m \to \infty$ dostaneme

$$\alpha_1 \mathbf{v_1} = 0$$

a tedy $\alpha_1 = 0$.

Pokračujeme-li dále dostaneme

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0\,.$$

(iii)

Vezměme bázi $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ prostoru $C_{\lambda_1}(\mathbf{A})$ a doplňme ji na bázi V celého prostoru.

Lineární zobrazení se standardní maticí $\mathbf{A}$ má vůči bázi V matici, jejíž levý horní roh je diagonální matice $k \times k$ s λ_1 na hlavní diagonále. Charakteristický polynom má tedy činitel

$$(\lambda - \lambda_1)^k.$$

Násobnost je proto alespoň k, což je dimenze prostoru $C_{\lambda_1}(\mathbf{A})$.

7.26. Důsledek. *Má-li matice* $\mathbf{A}$ *navzájem různá vlastní čísla, pak existuje báze složená z vlastních vektorů matice* $\mathbf{A}$*.*

7.27. Důsledek. *Nechť* $\mathbf{A}$ *je matice* $n \times n$*. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *Existuje báze prostoru* $\mathbb{C}^n$ *složená z vlastních vektorů matice* $\mathbf{A}$*.*

(ii) *Pro každé* $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ *platí, že* $\dim C_\lambda(\mathbf{A})$ *je rovna násobnosti* λ *jako kořene chrakteristického polynomu matice* $\mathbf{A}$*.*

7.28. Tvrzení. *Nechť vlastní vektory* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *lineárního zobrazení* $T : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$ *tvoří bázi* V *prostoru* $\mathbb{C}^n$*. Pak* T *má vůči bázi* V *diagonální matici.*

7.29. Věta. *Matice* $\mathbf{A}$ *typu* $n \times n$ *je podobná diagonální matici právě tehdy když existuje báze prostoru* $\mathbb{C}^n$ *složená z vlastních vektorů matice* A.
Jsou-li navíc $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *nezávislé vlastní vektory matice* $\mathbf{A}$ *příslušné vlastním číslům* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *pak*

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}},$$

kde

$$\mathbf{D} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

a

$$\mathbf{P} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n).$$

Důkaz: První část plyne z předchozí diskuse.
Uvažujme lineární zobrazení T se standardní maticí $\mathbf{A}$. Pak T má vůči bázi $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ matici $\mathbf{D}$. Podle převodního vztahu je

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P},$$

a proto

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$$

algoritmus diagonalizace matice:

7.30. Příklad. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Nalezněte diagonální rozklad matice $\mathbf{A}$.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 .$$

vlastní číslo $\lambda_1 = 1$ ... báze $C_{\lambda_1}(\mathbf{A})$ je $(1, -1, 1)$.
vlastní číslo $\lambda_2 = -2$ ... báze $C_{\lambda_2}(\mathbf{A})$ je $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1} .$$

Počítání mocnin matice:

$$\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}\,.$$

$$\mathbf{D} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,.$$

$$\mathbf{D}^k = diag(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k)$$

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{PDP}^{-1}\mathbf{PDP}^{-1} = \mathbf{PD}^2\mathbf{P}^{-1}\,.$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{PD}^2\mathbf{P}^{-1}\mathbf{PDP}^{-1} = \mathbf{PD}^3\mathbf{P}^{-1}$$

Obecně:

$$\boxed{\mathbf{A}^k = \mathbf{PD}^k\mathbf{P}^{-1}\,.}$$

7.31. Příklad. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

Vlastní čísla: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3$.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 5^k - 3^k & 5^k - 3^k \\ 2 \cdot 3^k - 2 \cdot 5^k & 2 \cdot 3^k - 5^k \end{pmatrix}$$

Aplikace na řešení soustav diferenciálních rovnic

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$$

funkce splňujíci soustavu diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty:

$$\begin{array}{rcl}
y_1' &=& a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\
y_2' &=& a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\
\cdots & & \cdots \\
y_n' &=& a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n
\end{array}$$

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

Maticový zápis:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

Některá řešení se dají nagenerovat pomocí vlastních čísel a vektorů. Je-li $\mathbf{v}$ vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ matice $\mathbf{A}$, pak

$$\mathbf{y}(x) = e^{\lambda x}\mathbf{v}$$

je řešení soustavy. Zkouška:

$$\mathbf{y}'(x) = \lambda e^{\lambda x}\mathbf{v}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = e^{\lambda x}\lambda\,\mathbf{v}$$

Předpokládejme, že $\mathbb{C}^n$ má bázi složenou z vlastních vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ k vlastním číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pak pro

$$\mathbf{D} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

a

$$\mathbf{P} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$$

platí

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

Proveďme substituci

$$\mathbf{z}(x) = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{y}(x)$$

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{P}\,\mathbf{z}(x)$$

$$\mathbf{z}'(x) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{y}'(x) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{y}(x) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z}(x) = \mathbf{D}\mathbf{z}(x)$$

Rozepsáno do složek:

$$\begin{array}{rcl} z_1'(x) & = & \lambda_1 \, z_1(x) \\ z_2'(x) & = & \lambda_2 \, z_2(x) \\ \cdots & & \cdots \\ z_n'(x) & = & \lambda_n \, z_n(x) \end{array}$$

Řešení:

$$z_1(x) = C_1 e^{\lambda_1 x}, z_2(x) = C_2 e^{\lambda_2 x}, \ldots , z_n(x) = C_n e^{\lambda_n x}$$

$C_1, \ldots , C_n \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x) = \mathbf{P}\mathbf{z}(x) = (\mathbf{v}_1, \ldots , \mathbf{v}_n)\mathbf{z}(x) = \\ = C_1 \mathbf{v_1} e^{\lambda_1 x} + C_2 \mathbf{v_2} e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n \mathbf{v_n} e^{\lambda_n x} \end{aligned}$$

7.32. Příklad.

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_1 + 3y_2 + 3y_3 \\
y_2' &= -3y_1 - 5y_2 - 3y_3 \\
y_3' &= 3y_1 + 3y_2 + y_3
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}
$$

(viz. Příklad 7.30) vlastní číslo $\lambda_1 = 1$ vlastní vektor $(1, -1, 1)$ $\lambda_2 = -2$ vlastní vektory $(-1, 1, 0)$ $(-1, 0, 1)$.

$$
y(x) = C_1(1, -1, 1)e^x + C_2(-1, 1, 0)e^{-2x} + C_3(-1, 0, 1)e^{-2x}
$$

Ortonormální a samoadjungované matice

skalární součin: $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}$.

(velikost) *norma* vektoru: $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$

Vlastnosti skalárního součinu: $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \in \mathbb{C}$

(i) $< \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} >=< \mathbf{x}, \mathbf{y} > + < \mathbf{y}, \mathbf{z} >$

(ii) $< \alpha\mathbf{x}, \mathbf{z} >= \alpha < \mathbf{x}, \mathbf{y} >$

(iii) $< \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} >= \overline{\alpha} < \mathbf{x}, \mathbf{y} >$

(iv) $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= \overline{< \mathbf{y}, \mathbf{x} >}$

(v) $< \mathbf{x}, \mathbf{x} > \geq 0.$

Vlastnosti normy: ($\alpha \in \mathbb{C}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$)

(i) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$

(ii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

Jednotkový vektor: mající velikost $\|\mathbf{x}\| = 1$.
Pro nenulové $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ je $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ jednotkový vektor.

Vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou *kolmé* (*ortogonální*) jestliže $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >= 0$

Pokud jsou $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ kolmé, pak

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 .$$

(Pythagorova věta):

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 =< \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} >=< \mathbf{x}, \mathbf{x} > + < \mathbf{y}, \mathbf{y} >= \\ = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 .$$

Jednodimenzionální projekce:

Nechť $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ je nenulový vektor.
Projekce na jednodimenzionální prostor generovaný $\mathbf{y}$ je lineární zobrazení $P_{\mathbf{y}}$ dané rovností:

$$P_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} \rangle \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} = \frac{< \mathbf{x}, \mathbf{y} >}{\|\mathbf{y}\|^2} \mathbf{y} .$$

Platí, že $\mathbf{x} - P_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ a $\mathbf{y}$ jsou ortogonální:

$$< \mathbf{x} - P_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}), \mathbf{y} >=< \mathbf{x}, \mathbf{y} > - << \mathbf{x}, \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} > \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}, \mathbf{y} >=$$

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} > - \frac{1}{\|\mathbf{y}\|^2} < \mathbf{x}, \mathbf{y} > \cdot < \mathbf{y}, \mathbf{y} >=$$

$$=< \mathbf{x}, \mathbf{y} > - < \mathbf{x}, \mathbf{y} >= 0\,.$$

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.

$$\mathbf{x} = P_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) + (\mathbf{x} - P_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}))$$

je ortogonální rozklad. Podle Pythagorovy věty

$$\|P_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2\,.$$

Tj.

$$\frac{| < \mathbf{x}, \mathbf{y} > |^2}{\|\mathbf{y}\|^2} \leq \|\mathbf{x}\|^2\,.$$

Schwarzova nerovnost:

$$\boxed{| < \mathbf{x}, \mathbf{y} > | \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}$$

Rovnost nastává právě tehdy když jsou $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ lineárně závislé.

7.33. Definice. Množina A se nazývá *ortogonální* jestliže se skládá z navzájem kolmých vektorů. Množina A se nazývá *ortonormální* jestliže se skládá z navzájem kolmých a jednotkových vektorů.

Významnou roli budou hrát *ortonormální báze* (systémy pravoúhlých souřadnic).

7.34. Tvrzení. *Je-li* $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ *ortonormální báze, pak pro každé* $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ *platí, že*

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{U}} = (<\mathbf{x}, \mathbf{u}_1>, <\mathbf{x}, \mathbf{u}_2>, \dots, <\mathbf{x}, \mathbf{u}_n>)$$

Důkaz:

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \, \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \, \mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n \, \mathbf{u}_n \quad | \cdot \mathbf{u}_1$$

$$<\mathbf{x}, \mathbf{u_1}> = \alpha_1$$

atd.

7.35. Příklad. Eukleidovská báze $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ je ortonormální báze.

7.36. Příklad. Fourierova báze

Konvence: $\mathbf{x} = (x(0), x(1), \dots, x(n-1))$

$\mathcal{F} = \{\mathbf{f_0}, \mathbf{f_1}, \dots, \mathbf{f_{n-1}}\}$

$$\mathbf{f_m}(k) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{2\pi j \frac{km}{n}}$$

je ortonormální báze:

$$\omega = e^{\frac{2\pi j}{n}} (\omega^n = 1)$$

$$\mathbf{f_m}(k) = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{mk}$$

$$< \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_m >= \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{il} \omega^{-ml} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{(i-m)l} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{n} n = 1 \text{ je-li } i = m \\ \frac{1}{n} \frac{1-\omega^{(i-m)n}}{1-\omega^{i-m}} = 0 \text{ je-li } i \neq m\,. \end{cases}$$

Je-li $n = 2$ je

$$\mathbf{f}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) \qquad \mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$$

Je-li $n = 4$ je

$$\mathbf{f}_0 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) \qquad \mathbf{f}_1 = \frac{1}{2}(1, j, -1, -j)$$

$$\mathbf{f}_2 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1) \qquad \mathbf{f}_3 = \frac{1}{2}(1, -j, -1, j)$$

Diskrétní Fourierova transformace:

$\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$

$$\hat{\mathbf{x}} = \sqrt{n}\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{F}}$$

Ortogonalizace vektorů:

(změna kosoúhlých souřadnic na pravoúhlé)

Mějme nezávislé vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$
Vytvořme otogonální systém se stejným lineárním obalem $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v_1} \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 - \frac{< \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 >}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - P_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{v}_3) - P_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_3) \\
&= \mathbf{v}_3 - \frac{< \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 >}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 - \frac{< \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 >}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 \\
\ldots & \quad \ldots \\
\mathbf{u}_k &= \mathbf{v}_k - \sum_{m=1}^{k-1} P_{\mathbf{u}_m}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{v}_k - \sum_{m=1}^{k-1} \frac{< \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_m >}{\|\mathbf{u}_m\|^2}\mathbf{u}_m\,.
\end{aligned}$$

Ortonormální množinu pak dostaneme normováním získaných vektorů. Tomuto procesu se říká *Grammův-Shcmidtův* ortogonalizační proces.

7.37. Důsledek. *Každý podprostor prostoru $\mathbb{C}^n$ má ortonormální bázi. Každou ortonormální množinu je možno rozšířit na ortonormální bázi.*

7.38. Definice. *Ortonormální matice* je čtvercová matice $n \times n$, jejíž sloupce tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbb{C}^n$.

Unitární zobrazení je lineární zobrazení T z $\mathbb{C}^n$ do $\mathbb{C}^n$, které zachovává skalární součin, tj.

$$< T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y}) >=< \mathbf{x}, \mathbf{y} > \qquad \text{pro všechna } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$$

7.39. Příklad. Matice otočení

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

je ortonormální maticí. Zobrazení určené touto maticí je unitární.

Předpokládejme, že $\mathbf{A}$ je matice se sloupci $\mathbf{A} = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n)$ Spočítejme součin

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{s}}_1 \\ \overline{\mathbf{s}}_2 \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{s}}_n \end{pmatrix} (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n) = (< \overline{\mathbf{s}_j}, \overline{\mathbf{s}_i} >)$$

Tedy matice $\mathbf{A}$ je ortonormální právě tehdy když $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ je jednotková matice, tj. právě tehdy když $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^*$.

Je-li A ortonormální, pak

$$
\begin{aligned}
&< \mathbf{Ax}, \mathbf{Ay} >= \\
&=< x_1\mathbf{s}_1 + x_2\mathbf{s}_2 + \cdots + x_n\mathbf{s}_n, y_1\mathbf{s}_1 + y_2\mathbf{s}_2 + \cdots + y_n\mathbf{s}_n >= \\
&\qquad = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\,\overline{y_n} =< \mathbf{x}, \mathbf{y} > \ .
\end{aligned}
$$

tj., $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ je unitární zobrazení. Platí i opak. Je-li zobrazení unitární, pak sloupcové vektory jsou obrazem standardní báze a tedy musí být jednotkové a navzájem kolmé.

Shrnutí:

7.40. Věta. *Pro matici $\mathbf{A}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) $\mathbf{A}$ *je ortonormální*

(ii) $\mathbf{A}^*$ *je ortonormální*

(iii) $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^*$

(iv) *Lineární zobrazení se standardní maticí $\mathbf{A}$ je unitární.*

7.41. Tvrzení. *Je-li* $\mathbf{A}$ *ortonormální matice, pak* $\sigma(\mathbf{A}) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Důkaz: $\mathbf{A}$ je ortonormální a λ je vlastní číslo s charakeristickým vektorem $\mathbf{v}$, pak

$$< \mathbf{v}, \mathbf{v} >=< \mathbf{A}\,\mathbf{v}, \mathbf{A}\,\mathbf{v} >= |\lambda|^2 < \mathbf{v}, \mathbf{v} >$$

a tedy $|\lambda| = 1$.

7.42. Definice. Matice $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ se nazývá *samoadjungovaná*, jestliže

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}\,.$$

Matice $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ se nazývá *symetrická*, jestliže

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\,.$$

Lineární zobrazení T z $\mathbb{C}^n$ do $\mathbb{C}^n$ se nazývá *samoadjungované*, jestliže pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ platí

$$< T(\mathbf{x}), \mathbf{y} >=< \mathbf{x}, T(\mathbf{y}) >$$

Matice $\mathbf{A} = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n)$

$$< \mathbf{A}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j >= a_{ji}$$

$$< \mathbf{e}_i, \mathbf{A}\mathbf{e}_j >= \overline{< \mathbf{A}\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i >} = \overline{a_{ij}}\,.$$

Tedy matice $\mathbf{A}$ je samoadjungovaná právě tehdy když, pro všechna $i, j = 1, \dots, n$,

$$< \mathbf{A}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j >=< \mathbf{e}_i, \mathbf{A}\mathbf{e}_j >$$

7.43. Tvrzení. *Matice $\mathbf{A}$ je samoadjungovaná právě tehdy když příslušné lineární zobrazení je samoadjungované, tj. právě tehdy když*

$$< \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} >=< \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y} > \text{ \textit{pro všechna} } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$$

Struktura vlastních čísel a vektorů samoadjungované matice:

7.44. Tvrzení. *Je-li $\mathbf{A}$ samoadjungovaná matice, pak $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}$.*

Důkaz:

$$\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

$$\lambda < \mathbf{v}, \mathbf{v} >=< \lambda\mathbf{v}, \mathbf{v} >=< \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{v} >=$$
$$=< \mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v} >=< \mathbf{v}, \lambda\mathbf{v} >= \overline{\lambda} < \mathbf{v}, \mathbf{v} >$$

Tedy $\lambda = \overline{\lambda}$.

7.45. Tvrzení. *Jsou-li λ_1 a λ_2 různá vlastní čísla samoadjungované matice $\mathbf{A}$ s příslušnými vlastními vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, pak $<\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2>= 0$.*

Důkaz:

$$\lambda_1 < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >=< \lambda_1 \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >=< \mathbf{A}\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >=$$
$$=< \mathbf{v}_1, \mathbf{A}\mathbf{v}_2 >=< \mathbf{v}_1, \lambda_2 \mathbf{v}_2 >= \lambda_2 < \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > \ .$$

Tedy $<\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2>= 0$.

7.46. Věta. Spektrální rozklad *Pro každou samoadjungovanou matici $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ existuje ortonormální báze prostoru $\mathbb{C}^n$ složená z vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$. Navíc platí*

Důkaz: Vezměme maximální systém $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$ a ukažme, že $k = n$.
Sporem: pokud $k < n$ lze systém $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ zvětšit na ortonormální bázi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-k}$. Pro jakékoliv $\mathbf{v}_i$ a $\mathbf{u}_j$ platí

$$< \mathbf{v}_i, \mathbf{A}\,\mathbf{u}_j >=< \mathbf{A}\mathbf{v}_i, \mathbf{u}_j >= \lambda_i < \mathbf{v}_i, \mathbf{u}_j >= 0$$

Lineární obal V množiny $\mathbf{u}_1, \dots \mathbf{u}_{n-k}$ se skládá z vektorů kolmých ke všem vektorům $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$. Podle výpočtu výše zobrazí lineární zobrazení T se standardní maticí $\mathbf{A}$ prostor V do prostoru V. T musí mít ve V charakteristický vektor, což je spor s maximalitou $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$.

7.47. Věta. Spektrální rozklad
Je-li T samoadjungované zobrazení, pak existuje ortonormální báze $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ prostoru $\mathbb{C}^n$ složená z charakteristických vektorů zobrazení T s vlastními čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Přitom T je následující kombinace jednodimenzionálních projekcí

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= \lambda_1 < \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 > \mathbf{v}_1 + \lambda_2 < \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 > \mathbf{v}_2 + \cdots \\ &+ \lambda_n < \mathbf{x}, \mathbf{v}_n > \mathbf{v}_n \,. \end{aligned}$$

Důkaz: Pro $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$.

$$\begin{gathered} T(\mathbf{x}) = T(< \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 > \mathbf{v}_1 + \cdots + < \mathbf{x}, \mathbf{v}_n > \mathbf{v}_n) = \\ =< \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 > T(\mathbf{v}_1) + \cdots + < \mathbf{x}, \mathbf{v}_n > T(\mathbf{v}_n) = \\ = \lambda_1 < \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 > \mathbf{v}_1 + \lambda_2 < \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 > \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n < \mathbf{x}, \mathbf{v}_n > \mathbf{v}_n \end{gathered}$$

Každá samoadjungovaná matice je lineární kombinací matic

$$(\overline{u_1}\mathbf{u}, \overline{u_2}\mathbf{u}, \dots, \overline{u}_n\mathbf{u})$$

7.48. Věta. Spektrální věta
Je-li $\mathbf{A}$ samoadjungovaná matice pak existuje diagonální matice $\mathbf{D}$ a ortonormální matice $\mathbf{P}$ tak, že

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^* \mathbf{A} \mathbf{P}$$

Důkaz: Existuje ortonormální báze $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$, které přísluší vlastním číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Matice $\mathbf{P} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je ortonormální.
Matice $\mathbf{D} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Z dřívějška víme, že

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\,.$$

7.49. Příklad. Spektrální rozklad matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98 = -(\lambda - 7)^2(\lambda + 2)$$

$\lambda = 7 : \dots$ vlastní vektory $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1); \mathbf{v}_2 = (-1/2, 1, 0)$
$\lambda = -2 : \dots$ vlastní vektor $\mathbf{v}_3 = (-1, -1/2, 1)$
První dva nutno ortogonalizovat:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - < \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 > \mathbf{u}_1 =$$
$$= (-\frac{1}{2}, 1, 0) + \frac{1}{4}(1, 0, 1) = (-1/4, 1, 1/4)\,.$$

Ortonormální báze složená z vlastních vektorů je tedy báze:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) \quad \frac{1}{\sqrt{18}}(-1, 4, 1) \quad \frac{1}{3}(-2, -1, 2)\,.$$

Předpokládejme, že $\mathbf{A} \in M_{n\times n}$. *Kvadratická forma* příslušná matici $\mathbf{A}$ je funkce

$$Q(\mathbf{x}) = <\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}> = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$$

Kvadratické formy je možno analyzovat pomocí spektrálního rozkladu matice $\mathbf{A}$.
Předpokládejme, že matice $\mathbf{A}$ je samoadjungovaná, má ortonormální bázi
$\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$
složenou z vlastních vektorů příslušných vlastním číslům
$\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Pak pro $\mathbf{x}$ s $[\mathbf{x}]_{\mathcal{V}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ máme

$$\begin{aligned} &< \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} >= \\ &=< \alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n\mathbf{v}_n, \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n >= \\ &\qquad = \lambda_1|\alpha_1|^2 + \lambda_2|\alpha_2|^2 + \cdots + \lambda_n|\alpha_n|^2 \,. \end{aligned}$$

7.50. Příklad. Nalezněte osy elipsy

$$x^2 + 2y^2 + xy = 1 \,.$$

$$Q(x,y) = x^2 + 2y^2 + xy$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + \frac{7}{4}\,.$$

Vlastní čísla: $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$ $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$

Matice soustavy pro charakteristiký vektor λ_1 je

$$\begin{pmatrix} -1/2-\sqrt{2}/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2-\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Charakteristický vektor je

$$(\sqrt{2}-1, 1)\,.$$

Charakteristický vektor k λ_2 musí být k němu kolmý, tj.

$$(-1, \sqrt{2}-1)$$

Osy jsou kolmé přímky obsahující charakteristické vektory.

7.51. Definice. Matice $\mathbf{A} \in M_{n\times n}$ je
pozitivně definitní jestliže

$$< \mathbf{Ax}, \mathbf{x} >> 0 \qquad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}\,.$$

Matice $\mathbf{A} \in M_{n\times n}$ je
pozitivně semidefinitní jestliže

$$< \mathbf{Ax}, \mathbf{x} > \geq 0 \qquad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n\,.$$

7.52. Tvrzení. *Samoadjungovaná matice $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní právě tehdy když všechna vlastní čísla $\mathbf{A}$ jsou kladná.*
Samoadjungovaná matice $\mathbf{A}$ je pozitivně semidefinitní právě tehdy když všechna vlastní čísla $\mathbf{A}$ jsou nezáporná.

Důkaz:
$\mathbf{A}$ má (reálná vlastní čísla)
$\lambda_1, \dots, \lambda_n$
a příslušnou ortonormální bázi vlastních vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.
Předpokládejme, že $\lambda_i > 0$ pro všechna i.
Pro vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ máme

$$< P_{\mathbf{v}_i}(\mathbf{x}), \mathbf{x} >=<< \mathbf{x}, \mathbf{v}_i > \mathbf{v}_i, \mathbf{x} >=$$
$$=< \mathbf{x}, \mathbf{v}_i > \cdot < \mathbf{v}_i, \mathbf{x} >= |< \mathbf{x}, \mathbf{v}_i >|^2$$

Tedy

$$< \mathbf{Ax}, \mathbf{x} >=$$
$$\lambda_1| < \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 > |^2 + \lambda_2| < \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 > |^2 + \cdots + \lambda_n| < \mathbf{x}, \mathbf{v}_n > |^2 >$$
$$> 0$$

Naopak, jestliže $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní, pak pro jakékoliv $i = 1, \dots n$ platí

$$< \mathbf{Av}_i, \mathbf{v}_i >= \lambda_i > 0$$

Semidefinitnost podobně.

7.53. Příklad. $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

má vlastní čísla $\frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}$ a je tedy pozitivně definitní. Vrstevnice funkce

$$Q(x, y) = x^2 + 2y^2 + xy$$

jsou elipsy se stejnými osami.

7.54. Věta. Sylvestryho věta
Symetrická reálná matice je pozitivně definitní právě tehdy když všechny determinanty matic z prvků současně v prvních k řádcích a sloupcích jsou kladné.

Princip maxima:

7.55. Tvrzení. *Je-li* $\mathbf{A}$ *pozitivně definitní matice, pak*

$$\max_{\|\mathbf{x}\|=1} < \mathbf{Ax}, \mathbf{x} >= \varrho(\mathbf{A})$$

Důkaz:

$\mathbf{A}$ má vlastní čísla $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$ s vlastními vektory $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Pro libovolný jednotkový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ platí

$$< \mathbf{Ax}, \mathbf{x} >=$$
$$\lambda_1 \,|< \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 >|^2 + \lambda_2 \,|< \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 >|^2 + \cdots + \lambda_n \,|< \mathbf{x}, \mathbf{v}_n >|^2 \leq$$
$$\leq \lambda_1 (|< \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 >|^2 + |< \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 >|^2 + \cdots + |< \mathbf{x}, \mathbf{v}_n >|^2) = \lambda_1 \,.$$

Použití pozitivně definitních matic:

- Klasifikace a hledání extrémů, optimalizační úlohy
- Principle component analysis

Kovarianční matice je vždy pozitivně definitní, je možné ji diagonalizovat a nalézt tak lineární kombinace veličin, které jsou nekorelované. Data je možno nahradit kombinací veličin s rozhodujícím rozptylem - kombinace obrázků v různých frekvenčních pásmech, apod.

- Operátor energie (Hamiltonián) ve fyzice ...

Normy matic a vektorů

K numerickým metodám potřebujeme zobecnit pojem velikost vektoru.

7.56. Definice. Zobrazení $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \to < 0, \infty)$ se nazývá norma, platí-li pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ a $\alpha \in \mathbb{C}$

(i) $\|\mathbf{x}\| = 0$ právě tehdy když $\mathbf{x} = 0$.

(ii) $\|\alpha\,\mathbf{x}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{x}\|$

(iii) $\|x + y\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

7.57. Příklad. • Eukleidovská norma

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{< \mathbf{x}, \mathbf{x} >}$$

• Řádková (maximová norma)

$$\|\mathbf{x}\|_R = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

• Sloupcová (součtová norma)

$$\|\mathbf{x}\|_S = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

• $\|\mathbf{x}\|_R \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_R \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_S$

• $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}$
právě tehdy když $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}\| = 0$.

Maticová norma:

7.58. Definice. Je-li $\|\cdot\|$ norma na $\mathbb{C}^n$, pak odpovídající norma matice $\mathbf{A} \in M_{n\times n}$ je

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|\,.$$

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

Maticová norma má stejné vlastnosti jako vektorová

7.59. Tvrzení. *Nechť $\|\cdot\|$ je norma na $\mathbb{C}^n$. Pro odpovídající maticovou normu platí*

(i) $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|$ *($\mathbf{A} \in M_{n\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$)*

(ii) $\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$ *($\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{n\times n}$)*

Důkaz: (i) $\frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\|$.

$$\text{(ii)}\, \|\mathbf{A}\mathbf{B}\| = \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|\,.$$

Řádková (sloupcová) maticová norma je dána řádkovou (sloupcovou) vektorovou normou. Maticová norma odpovídající normě eukleidovské se nazývá <u>*spektrální*</u>.

7.60. Tvrzení. *Pro každou matici* $\mathbf{A} \in M_{n\times n}$ *platí*

(i) $\|\mathbf{A}\|_R = \max_{i=1,\dots n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ *(maximální řádkový součet)*

(ii) $\|\mathbf{A}\|_S = \max_{j=1,\dots n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ *(maximální sloupcový součet)*

(iii) $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\varrho(\mathbf{A}^* \mathbf{A})}$

Důkaz: (i) $\|\mathbf{x}\|_R \leq 1$

$$\|\mathbf{Ax}\|_R = \max_{i=1,\dots,n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j| \leq$$

$$\leq$$

$$\leq \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \cdot \max_j |x_j| \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \,.$$

Tedy $\|\mathbf{A}\|_R \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Nechť pro i_0 máme maximální řádkový součet. Volme

$$\mathbf{x} = (sgn\, a_{i_0 1}, sgn\, a_{i_0 2}, \dots , sgn\, a_{i_0 n})$$

Pak $\|\mathbf{x}\|_R \leq 1$.
Přitom i_0 složka součinu $\mathbf{Ax}$ je

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| = \|\mathbf{Ax}\|_R\,.$$

(ii) Podobně
Volme $\mathbf{x}$ s $\|\mathbf{x}\|_S = 1$. Pak

$$\|\mathbf{Ax}\|_S = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j| \leq$$
$$\leq \left(\max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \|\mathbf{x}\|_S \leq \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\,.$$

Tedy

$$\|\mathbf{A}\|_S \leq \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Volbou $\mathbf{x} = \mathbf{e}_{j_0}$, kde j_0 má největší sloupcový součet dosáhneme toho, že

$$\|\mathbf{Ax}\|_S = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij_0}|$$

(iii) $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ je pozitivně semidefinitní.

$$\|\mathbf{Ax}\|_2^2 =< \mathbf{Ax}, \mathbf{Ax} >=< \mathbf{A}^*\mathbf{Ax}, \mathbf{x} > \ .$$

$$\|\mathbf{A}\|_2^2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} < \mathbf{A}^*\mathbf{Ax}, \mathbf{x} >= \varrho(\mathbf{A}^*\mathbf{A})$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\varrho(\mathbf{A}^*\mathbf{A})}\,.$$

7.61. Příklad. $\qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\|\mathbf{A}\|_R = 3, \qquad \|\mathbf{A}\|_S = 3$$

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 1)$$

$$\sigma(\mathbf{A}^*\,\mathbf{A}) = \{1, 3 \pm 2\sqrt{2}\}$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$$

7.62. Tvrzení. *Pro každou maticovou normu $\|\cdot\|$ platí*

$$\|\mathbf{A}\| \geq \varrho(\mathbf{A})\,.$$

Důkaz: Je-li λ vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ s vlastním vektorem $\mathbf{v}$, je

$$\frac{\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = |\lambda|\,.$$

- Pro samoadjungovanou matici $\mathbf{A}$ platí, že

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \varrho(\mathbf{A})\,.$$

8 Numerické řešení soustav rovnic

Iterační metody pro systém lineárních rovnic

Lineární soustava s maticí $\mathbf{A} \in M_{n\times n}$ a pravou stranou $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,.$$

Převede se na úlohu o pevném bodu

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{q}$$

kde $\mathbf{H}$ je *iterační matice* a $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^n$.
$\mathbf{x}_t$ je řešení tj.

$$\mathbf{x}_t = (\mathbf{E} - \mathbf{H})^{-1}\mathbf{q}\,.$$

Iterační metoda: vytváříme posloupnost vektorů v $\mathbb{C}^n$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{H}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q}$$

8.1. Definice. Řekneme, že iterační metoda je konvergentní, jestliže pro libovolnou výchozí volbu konverguje posloupnost $(\mathbf{x}^{(k)})_{k=0}^{\infty}$ k řešení $\mathbf{x}_t$.

8.2. Věta. Postačující podmínka konvergence
Je-li $\|\mathbf{H}\| < 1$ *pro jakoukoliv maticovou normu* $\|\cdot\|$, *pak je iterační metoda konvergentní a platí, že*

$$\boxed{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}_t\| \leq \frac{\|\mathbf{H}\|}{1 - \|\mathbf{H}\|} \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| \,.}$$

Důkaz: Je-li $\|\mathbf{H}\| < 1$ pak $\varrho(\mathbf{H}) < 1$.
$\sigma(\mathbf{E} - \mathbf{H}) = \{1 - \lambda \mid \lambda \in \sigma(\mathbf{H})\}$
Tedy nula nemůže být ve spektru matice $\mathbf{E} - \mathbf{H}$ a tato matice je regulární.

Z iterační formule dostaneme postupným dosazováním

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{H}^k \mathbf{x}^{(1)} + (\mathbf{E} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^2 + \cdots + \mathbf{H}^{k-1})\mathbf{q}$$

Položme

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{E} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^2 + \cdots + \mathbf{H}^{k-1}$$

$$(\mathbf{E} - \mathbf{H})\mathbf{S}_k = \mathbf{E} - \mathbf{H}^k$$

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{H}^k\| \leq \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{H}\|^k = 0$$

Tedy

$$\lim_{k\to\infty}(\mathbf{E}-\mathbf{H})\mathbf{S}_k = \mathbf{E}$$

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{S}_k = (\mathbf{E}-\mathbf{H})^{-1}$$

Proto

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{x}^{(k)} = \lim_{k\to\infty}(\mathbf{H}^k\mathbf{x}^{(1)}+\mathbf{S}_k\mathbf{q}) = (\mathbf{E}-\mathbf{H})^{-1}\mathbf{q} = \mathbf{x}_t\,.$$

Odhad chyby:

$$\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}_t = \mathbf{H}(\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}_t)-\mathbf{H}(\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)})$$

Tedy

$$\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}_t\| \le \|\mathbf{H}\|\,\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}_t\| + \|\mathbf{H}\|\,\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}\|$$

$$(1-\|\mathbf{H}\|)\,\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}_t\| \le \|\mathbf{H}\|\,\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}\|\,.$$

$$\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}_t\| \le \frac{\|\mathbf{H}\|}{1-\|\mathbf{H}\|}\,\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}\|$$

8.3. Věta. Nutná a postačující podmínka konvergence

Iterační metoda s iterační maticí $\mathbf{H}$ *konverguje právě tehdy když* $\varrho(\mathbf{H}) < 1$.

Poznámka: konvergence je tím rychlejší čím je $\varrho(\mathbf{H})$ a $\|\mathbf{H}\|$ menší. Pro spektrální poloměr blízko jedničky je problematická.

8.4. Příklad.

$$\begin{aligned} 11x_1 + 2x_2 + x_3 &= 15 \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 &= 16 \\ 2x_1 + 3x_2 - 8x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Přepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{11}(15 - 2x_2 - x_3) \\ x_2 &= \frac{1}{10}(16 - x_1 - 2x_3) \\ x_3 &= \frac{1}{8}(-1 + 2x_1 + 3x_2) \end{aligned}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{15}{11} \\ \frac{16}{10} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{H}\|_R = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8} < 1 \quad \|\mathbf{H}\|_S = \frac{2}{11} + \frac{3}{8} = \frac{49}{88} < 1$$

Iterační proces:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{11}(15 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{10}(16 - x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{8}(-1 + 2x_1^{(k)} + 3x_2^{(k)})
\end{aligned}
$$

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}_t\|_R \leq \frac{5}{3}\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_R$$

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}_t\|_S \leq \frac{49}{39}\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_S$$

Postupné iterace začínající nulovým vektorem

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,36363636363636353 \\ 1,6 \\ -0,125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,08409091000000002 \\ 1,488636364 \\ 0,815909090999999975 \end{pmatrix}$$

10. iterace: $\begin{pmatrix} 1,05643283599999993 \\ 1,36420807500000007 \\ 0,650708756400000032 \end{pmatrix}$

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1.056443024 \\ 1.364217252 \\ 0.6506922258 \end{pmatrix}$$

Násobení matice a vektoru stojí n^2 operací, GEM stojí n^3 operací. Příklad ukazuje Jacobiho nmetodu, postupné upřesňování souřadnic je Gaussova-Seidlova metoda.

Řešení obecných soustav rovnic

Značení:

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots , f_n)$$

Systém rovnic:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Rozepsáno do složek

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots , x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, \dots , x_n) &= 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots , x_n) &= 0 \end{aligned}$$

8.5. Příklad.

$$\begin{aligned} 3x_1 - \cos(x_2\, x_3) - \frac{1}{2} &= 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0,1)^2 + \sin x_3 + 1,06 &= 0 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} &= 0 \end{aligned}$$

Metoda iterace převádí tento problém na úlohu o pevném bodu:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

Existuje mnoho vět a pevném bodě, které jsou základem numerických metod.

8.6. Věta. *Předpokládejme, že $D \subset \mathbb{R}^n$ je n-rozměrný interval a $\mathbf{g}$ je zobrazení z D do D. Předpokládejme dále, že $\mathbf{g}$ má spojité parciální derivace prvního řádu a existuje konstanta $K < 1$ taková, že*

$$\left|\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right| \leq \frac{K}{n}$$

pro všechna $\mathbf{x} \in D, i, j = 1, \ldots n$.
Pak existuje jediný pevný bod $\mathbf{p} \in D$ zobrazení $\mathbf{g}$.
Pro libovolnou volbu počátečního členu $\mathbf{x}^{(0)} \in D$ konverguje posloupnost $(\mathbf{x}^{(k)})_{k=0}^{\infty}$ daná rekurentním vztahem

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{g}(\mathbf{x}^{(k-1)})$$

k bodu $\mathbf{p}$ a navíc platí, že

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{p}\|_R \leq \frac{K^k}{1-K}\,\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_R$$

Metoda prosté iterace:

konstrukce posloupnosti výše, metoda startovací, alespoň rychlosti prvního řádu.

8.7. Příklad.

$$\begin{aligned} 3x_1 - \cos(x_2\,x_3) - \frac{1}{2} &= 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0,1)^2 + \sin x_3 + 1,06 &= 0 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} &= 0 \end{aligned}$$

Přepíšeme na úlohu o pevném bodu:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}\cos(x_2\,x_3) + \frac{1}{6} \\ x_2 &= \frac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1,06} - 0,1 \\ x_3 &= -\frac{1}{20}e^{-x_1\,x_2} - \frac{10\pi - 3}{60} \end{aligned}$$

$D =< -1, 1 >^3$

Výpočtem a odhady je možno se přesvědčit, že předpoklady předchozí věty jsou splněny:

$$\left|\frac{\partial g_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right| \leq 0,281$$

na D a tedy

$$K = 3 \cdot 0,281 = 0,843.$$

Iterační metoda s počátečním bodem $\mathbf{x}_0 = (0,1, 0,1, -0,1)$.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_R$
0	0,1	0,1	-0,1	-
1	0,49998333	0,00944115	-0,52310127	0,423
2	0,49999593	0,00002557	-0,5233631	$9,4 \cdot 10^{-3}$
3	0,50000000	0,00001234	-0,52359814	$2,3 \cdot 10^{-4}$
4	0,50000000	0,00000003	-0,52359847	$1,2 \cdot 10^{-5}$
5	0,50000000	0,00000002	-0,52359877	$3,1 \cdot 10^{-7}$

Odhad chyby

$$\|\mathbf{x}^{(5)} - \mathbf{p}\|_R \leq \frac{(0,843)^5}{1-0,843}(0,423) < 1,15\,.$$

Řešení:

$$\mathbf{p} = (0,5, 0, \frac{-\pi}{6})$$

Chyba je v řádkové normě menší než $2 \cdot 10^{-8}$.

Dá se zrychlyt použitím nově vypočtených souřadnic.

Newtonova metoda:

V jednorozměrném případě:

$$f(x) = 0$$

$$x_k = x_{k-1} - \frac{x_{k-1}}{f'(x_{k-1})}$$

Ve vícerozměrném případě se nahradí reciproká hodnota první derivace inverzí Jacobiho matice zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Konverguje pokud zvolíme počáteční aproximaci blízko řešení - zpřesňující metoda. Konvergence je pak často druhého řádu.

Posloupnost:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} - \underbrace{J(\mathbf{x}^{(k-1)})^{-1}}_{\text{inverzní matice}} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k-1)}) \,.$$

Při výpočtu $J(\mathbf{x}^{(k-1)})^{-1}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k-1)})$ se řeší soustava rovnic:

$$J(\mathbf{x}^{k-1})\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k-1)}) \,.$$

8.8. Příklad.

$$\begin{aligned} 3x_1 - \cos(x_2\,x_3) - \frac{1}{2} &= 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0,1)^2 + \sin x_3 + 1,06 &= 0 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} &= 0 \end{aligned}$$

Výpočet pro stejnou počáteční aproximaci jako dříve:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\lVert\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\rVert_R$
0	0,1	0,1	-0,1	-
1	0,50003702	0,01946686	-0,52152047	0,42
2	0,50004593	0,00158859	-0,52355711	$1,70 \cdot 10^{-2}$
3	0,50000034	0,00001244	-0,52359845	$1,58 \cdot 10^{-3}$
4	0,50000000	0,00000000	-0,52359877	$1,24 \cdot 10^{-5}$
5	0,50000000	0,00000000	-0,52359877	0